



DOI:10.12404/j.issn.1671-1815.2401491

引用格式:雷傲宇,蒋友津,刘承锡,等.基于数据驱动型多项式混沌逼近的概率潮流计算[J].科学技术与工程,2025,25(2):598-609.

Lei Aoyu, Jiang Youjin, Liu Chengxi, et al. Probabilistic power flow calculation based on the data-driven polynomial chaos approximation [J]. Science Technology and Engineering, 2025, 25(2): 598-609.

电工技术

## 基于数据驱动型多项式混沌逼近的概率潮流计算

雷傲宇<sup>1</sup>, 蒋友津<sup>2,3</sup>, 刘承锡<sup>2,3\*</sup>, 梅勇<sup>1</sup>, 罗永建<sup>2,3</sup>, 甄鸿越<sup>4</sup>

(1. 中国南方电网电力调度控制中心, 广州 510663; 2. 武汉大学电气与自动化学院, 武汉 430072;

3. 交直流智能配电网湖北省工程中心, 武汉 430072; 4. 流输电技术国家重点实验室(南方电网科学研究院), 广州 510663)

**摘要** 为了分析不确定性因素对电力系统的影响,兼具快速性和准确性的多项式混沌逼近法 (polynomial chaos approximation, PCA) 被广泛应用于概率潮流计算中。多项式混沌逼近法要求已知随机输入变量的概率密度函数 (probability density function, PDF), 同时随机输入变量需要满足独立条件。针对已知随机输入变量为历史数据的情况,提出了一种数据驱动型多项式混沌逼近 (data driven polynomial chaos approximation, DDPCA) 的概率潮流方法。首先, DDPCA 根据历史数据选择最优的正交多项式,进而确定考虑随机输入变量非线性相关性时的高斯样本,然后结合蒙特卡洛积分计算权重。紧接着,基于高斯样本进行少量的潮流计算,并根据潮流结果和权重求解逼近系数,进而求取随机输出变量的统计特征。将所提方法与点估计法进行了比较,在三个算例上的结果验证了所提方法的有效性。

**关键词** 数据驱动; 多项式混沌逼近; 高斯样本; 概率潮流; 蒙特卡洛积分; 非线性相关性

中图分类号 TM301;

文献标志码 A

### Probabilistic Power Flow Calculation Based on the Data-Driven Polynomial Chaos Approximation

LEI Ao-yu<sup>1</sup>, JIANG You-jin<sup>2,3</sup>, LIU Cheng-xi<sup>2,3\*</sup>, MEI Yong<sup>1</sup>, LUO Yong-jian<sup>2,3</sup>, ZHEN Hong-yue<sup>4</sup>

(1. CSG Power Dispatch Control Center, Guangzhou 510663, China; 2. School of Electrical Engineering and Automation,

Wuhan University, Wuhan 430072, China; 3. Hubei Engineering and Technology Research Center for AC/DC Intelligent Distribution Network, Wuhan 430072, China; 4. State Key Laboratory of HVDC, Electric Power Research Institute, CSG, Guangzhou 510663, China)

**[Abstract]** In order to analyze the influence of uncertain factors on power system, PCA (polynomial chaos approximation) method, which is both fast and accurate, is widely used in probabilistic power flow calculation. The polynomial chaotic approximation method requires that the probability density function of the random input variable is known, and the random input variable must satisfy the independent condition. A probabilistic power flow method based on DDPCA (data driven polynomial chaos approximation) was proposed for the known random input variables which are historical data. First, DDPCA selects the optimal orthogonal polynomial according to the historical data, and then determines the Gaussian sample considering the nonlinear correlation of random input variables, and then computes the weights with Monte Carlo integral. Then, a small amount of power flow was calculated based on Gaussian samples, and the approximation coefficient was solved according to the power flow results and weights, and then the statistical characteristics of the random output variables were obtained. The proposed method was compared with the point estimation method, and the effectiveness of the proposed method was verified by the results of three examples.

**[Keywords]** data-driven; polynomial chaos approximation; Gaussian samples; probabilistic power flow; Monte Carlo integral; nonlinear correlation

收稿日期: 2024-03-05; 修订日期: 2024-10-24

基金项目: 中国南方电网有限责任公司科技项目 (ZDKJXM20210063); 广东省基础与应用基础研究项目 (2022A1515240033)

第一作者: 雷傲宇 (1990—), 男, 汉族, 四川仁寿人, 博士, 高级工程师。研究方向: 电力系统风险评估和运行控制。E-mail: leiay@csg.cn。

\* 通信作者: 刘承锡 (1985—), 男, 苗族, 广东深圳人, 博士, 教授。研究方向: 电力系统稳定与控制, 高比例新能源电力系统的不确定性和随机性问题。E-mail: liuchengxi@whu.edu.cn。

随着全球经济的腾飞,能源短缺、气候变暖和环境破坏问题的日益加剧,中国提出了碳中和碳达峰的远景目标,着力构建新型低碳能源体系,提升清洁能源利用水平和电力系统运行效率<sup>[1]</sup>。实际电力系统受到各种不确定性的影响,如风电、光电和负荷的随机性,受区域内天气变化影响,可再生能源的间歇性和波动性特征对电网的威胁亦越发显著<sup>[2]</sup>。评估这些随机因素对电力系统运行状态的影响正变得越来越重要,概率潮流方法已被广泛应用于评估含不确定性的电力系统运行状态。目前运用于电力系统概率潮流的方法主要有3种:模拟法、近似法和解析法。模拟法主要有蒙特卡洛模拟、准蒙特卡洛模拟<sup>[3]</sup>和拉丁超立方采样<sup>[4]</sup>等,近似法主要是点估计法<sup>[5]</sup>,解析法主要有半不变量法<sup>[6]</sup>和多项式混沌逼近法<sup>[7]</sup>。基于蒙特卡洛模拟法(Monte Carlo simulation, MCS)的概率潮流计算是最为简单和准确的方法,但这种方法需要大量重复性的潮流计算,所需计算时间很高。为了提高计算效率,准蒙特卡洛模拟法通过减少蒙特卡洛模拟法的计算次数提高了计算效率,但其计算效率有待进一步提高,而拉丁超立方采样<sup>[8]</sup>通过分层抽样能够减少样本方差,从而有效减少潮流计算次数。半不变量法通过对潮流方程进行线性化,并利用半不变量的可累加性计算随机输出变量的矩,该方法简单有效,但当随机输入变量的变化范围较大时,该方法的精度难以保证。点估计法在少量样本上进行确定性潮流计算,进而根据潮流结果和样本权重获取随机输出变量的矩,该方法计算速度快,但该方法的高阶矩精度较低,难以获取输出变量的准确概率分布。项式混沌逼近法(polynomial chaos approximation, PCA)根据随机输入变量选择最优的正交多项式去逼近随机输出变量,通过各种求解方法获得逼近系数,进而计算随机输出变量等统计特征。该方法可以保留潮流方程的非线性,且能够得到随机输出变量的近似解析表达式。该方法不仅可以求取随机输出变量的统计特征,还能够进行灵敏度分析、随机控制等,因此被广泛应用于不确定性量化中。

目前求解 PCA 逼近系数的方法主要有伽辽金法、概率配点法和高斯求积法。伽辽金法<sup>[9-10]</sup>具有较好的数值稳定性,但其在求解 PCA 逼近系数时需要选取初始点。概率配点法<sup>[11]</sup>根据待定系数法求解逼近系数,该方法的数值稳定性较差。高斯求积法<sup>[12-13]</sup>通过在高斯积分点上进行确定性潮流,利用高斯积分求取常数向量,进而求解 PCA 逼近系数,该方法实现简单,数值稳定性较高。传统基于 PCA

的概率潮流通常指定随机输入变量的概率密度函数,然而在工程实际应用中,已知的随机输入变量信息通常是其历史数据,为了选择最优的正交多项式,需要对 PCA 进行拓展。同时,点估计法和 PCA 等方法在处理随机输入变量的主要思路是通过各种去相关变换将不独立的随机输入变量转化为独立的随机变量。其中,应用最为广泛的是 Nataf 变换<sup>[14]</sup>,Nataf 变换将随机输入变量转化为独立的标准正态随机变量,文献[15]针对 Nataf 变换无法处理源荷相关系数矩阵非正定的情况,采用一种基于奇异值分解的扩展 Nataf 变换,并结合拉丁超立方采样进行交直流混合系统的概率潮流。然而,Nataf 变换需要已知随机输入变量的概率密度函数。同时,该方法是基于相关系数的转换,当随机变量的分布严重偏离正态分布时,该方法会导致非线性相关性的大量丢失。

针对已知随机输入变量为历史数据的情况,并考虑随机输入变量之间的非线性相关性,现提出一种数据驱动型多项式混沌逼近的概率潮流方法。该方法不需要指定随机输入变量的概率密度函数,可以根据历史数据直接构造最优的正交多项式,接着基于所得正交多项式生成考虑变量非线性相关性的高斯样本,利用高斯样本进行少量潮流计算,结合历史数据和潮流结果求解 PCA 逼近系数,进而得到输出变量的解析表达式。所提方法是一种数据驱动型概率潮流逼近方法,该方法无需指定随机输入变量的概率密度函数,能够处理已知信息为历史数据且考虑随机输入变量非线性相关性的情况,并且能够快速准确地得到电力系统随机输出变量的概率分布等统计特征。将所提方法与基于 Nataf 变换的点估计法进行比较,验证所提方法的有效性。

## 1 不确定性建模

高比例新能源电力系统中的不确定性变量主要包括风机出力、光伏出力和负荷功率等。以风机出力和负荷功率的随机性为例,将风机出力和负荷功率作为随机输入变量来分析其与随机输出变量之间的关系。由于所提方法是数据驱动型,因此可推广至其他随机场景。

根据风机安装位置处的风速和风机出力模型可以计算风机出力。具体而言,风机有功出力模型<sup>[13]</sup>为

$$P_w = \begin{cases} 0, & \omega > \omega_c \text{ 或 } \omega < \omega_k \\ k_1 \omega + k_2, & \omega_k < \omega < \omega_s \\ P_N, & \omega_s < \omega < \omega_c \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中: $P_w$ 为风机出力; $\omega$ 为风速; $P_N$ 为风机额定

功率;  $\omega_k$  为风机切入风速;  $\omega_s$  为额定风速;  $\omega_c$  为风机切出风速;  $k_1 = P_N / (\omega_s - \omega_k)$ ;  $k_2 = -k_1 \omega_k$ 。

风机通常可采用恒定电压控制。对于负荷的随机性,通常认为负荷功率服从正态分布。

## 2 多项式混沌逼近理论

### 2.1 单维随机变量的逼近

对于电力系统中的一个随机输入变量  $x$ , 在电力系统中  $x$  通常是风机出力、光伏出力和负荷功率等。电力系统的随机输出变量  $y$  (电压幅值等) 可以表示为  $y=f(x)$ , 当  $f(x)$  平方可积时,  $y$  可以利用一组正交多项式进行<sup>[16]</sup>逼近, 公式为

$$y \approx \sum_{i=0}^P \alpha_i \Phi_i(x) \quad (2)$$

式(2)中:  $\alpha_i$  为第  $i$  阶正交多项式对应的逼近系数;  $\Phi_i(x)$  为随机输入变量  $x$  的第  $i$  阶正交多项式;  $P$  为逼近阶数, 当  $P$  趋于无穷大时, 式(2)的截断误差趋于 0。

逼近系数的计算公式为

$$\alpha_i = \frac{\langle f(x), \Phi_i(x) \rangle}{\langle \Phi_i(x), \Phi_i(x) \rangle} \quad (3)$$

正交多项式定义为

$$\int \Phi_i(x) \Phi_j(x) p(x) dx = \begin{cases} \gamma_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (4)$$

式(4)中:  $p(x)$  为随机输入变量  $x$  的概率密度函数;

$$\gamma_i = \int \Phi_i(x) \Phi_i(x) p(x) dx。$$

随机变量  $x$  对应的正交多项式可由施密特正交化公式求得, 当遵循“首 1 原则”<sup>[17]</sup>时, 施密特正交化流程可表示为

$$\begin{cases} \Phi_0(x) = 1 \\ \Phi_i(x) = x^i - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\langle x^i, \Phi_k(x) \rangle}{\langle \Phi_k(x), \Phi_k(x) \rangle} \Phi_k(x), \\ i = 1, 2, \dots, P \end{cases} \quad (5)$$

式(5)中:  $\langle \Phi_k(x), \Phi_k(x) \rangle$  代表内积运算。

$$\langle \Phi_k(x), \Phi_k(x) \rangle = \int \Phi_k(x) \Phi_k(x) p(x) dx \quad (6)$$

因此, 只要知道随机输入变量  $x$  的概率密度函数, 那么即可按照式(5)构建正交多项式, 进而根据式(3)求解逼近系数, 从而获得随机输出变量  $y$  (如电压幅值等) 的 PCA 逼近表达式。

### 2.2 多维随机变量的逼近

对于  $d$  维随机输入变量, 如  $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_d]$  可以表示电力系统中的多个风机出力。电力系统的随机输出变量  $y$  (电压幅值等) 可以表示为  $y =$

$f(\mathbf{X})$ , 当  $f(\mathbf{X})$  平方可积时,  $y$  可以利用一组多元多项式进行逼近, 即

$$\begin{cases} y \approx \sum_{i=0}^K \alpha_i \Psi_i(\mathbf{X}) \\ K = \frac{(P+d)!}{d!P!} - 1 \end{cases} \quad (7)$$

基底多项式  $\Psi_i(\mathbf{X})$  满足

$$\begin{cases} \Psi_i(\mathbf{X}) = \prod_{j=1}^d \Phi_{k_j}^j(x_j), \\ \sum_{j=1}^d k_j \leq P, \quad i = 0, 1, 2, \dots, K \end{cases} \quad (8)$$

式(8)中:  $P$  为逼近阶数, 当  $P$  趋于无穷大时, 式(7)的截断误差将趋于 0;  $\Phi_{k_j}^j(x_j)$  为随机输入变量  $x_j$  对应的第  $k_j$  阶正交多项式。

当随机输入变量独立时, 逼近系数  $\alpha_i$  为

$$\alpha_i = \frac{\langle f(\mathbf{X}), \Psi_i(\mathbf{X}) \rangle}{\langle \Psi_i(\mathbf{X}), \Psi_i(\mathbf{X}) \rangle} \quad (9)$$

式(9)中:  $\langle f(\mathbf{X}), \Psi_i(\mathbf{X}) \rangle = \iint \dots \int f(\mathbf{X}) \Psi_i(\mathbf{X}) P(\mathbf{X}) d\mathbf{X}$ 。

当随机输入变量独立时, 其联合概率密度函数  $P(\mathbf{X})$  满足

$$P(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^d p_i(x_i) \quad (10)$$

式(10)中:  $p_i(x_i)$  为随机变量  $x_i$  的概率密度函数; 当  $p_i(x_i)$  为第  $i$  个风机出力对应的概率密度函数时,  $P(\mathbf{X})$  则为风机出力的联合概率密度函数。

这种情况下, 只要知道  $p_i(x_i)$ , 则可根据式(5)构建正交多项式, 并按照式(10)计算联合概率密度函数, 最后按照式(9)求解逼近系数, 即可获得随机输出变量  $y$  (如电压幅值等) 的 PCA 逼近表达式。

## 3 数据驱动型多项式混沌逼近的概率潮流计算

### 3.1 基于多项式混沌逼近的概率潮流

概率潮流模型可以用一组带有随机输入变量的非线性方程组来表示, 即

$$S(\mathbf{Y}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = 0 \quad (11)$$

式(11)中:  $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_d]$  为  $d$  维随机输入变量;  $\mathbf{Y}(\mathbf{X})$  为待求随机输出变量, 具体而言, 待求随机输出变量包括 PQ 节点的电压幅值和电压相角、PV 节点的电压相角、发电机出力和线路传输功率等。

根据多项式混沌逼近理论, 待求随机输出变量可表示为

$$\begin{cases} y_i(\mathbf{X}) \approx \sum_{j=0}^K \alpha_j^i \Psi_j(\mathbf{X}) \\ K = \frac{(P+d)!}{d!P!} - 1 \end{cases} \quad (12)$$

式(12)中: $y_i(\mathbf{X})$ 为第*i*个待求输出变量; $P$ 为逼近阶数; $\alpha_j^i$ 为第*i*个待求随机输出变量的第*j*+1项逼近系数; $\Psi_j(\mathbf{X})$ 为随机输入变量对应的第*j*+1项多元多项式。

基于多项式混沌逼近的概率潮流就是求解逼近系数的过程,只要求出逼近系数,就能获得待求随机输出变量的解析表达式,进而计算其均值等统计特征。

### 3.2 数据驱动型高斯求积的 PCA 逼近系数求解

当 $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_d]$ 不独立时,传统的基于高斯求积的 PCA 逼近系数求解方法则是将不独立的随机输入变量通过去相关变换(如 Nataf 变换<sup>[18]</sup>)转化成独立的随机输入变量,进而根据高斯型积分计算公式[式(9)],但去相关变换需要取概率密度函数,且会丢失部分非线性相关性。为此,本文研究中提出一种数据驱动型高斯求积的 PCA 逼近系数求解方法,该方法可以考虑随机输入变量之间的非线性相关性。根据最佳平方逼近理论<sup>[19]</sup>,此时逼近系数可以由法方程计算得到,即

$$\begin{bmatrix} \langle \Psi_0, \Psi_0 \rangle & \langle \Psi_0, \Psi_1 \rangle & \dots & \langle \Psi_0, \Psi_k \rangle \\ \langle \Psi_1, \Psi_0 \rangle & \langle \Psi_1, \Psi_1 \rangle & \dots & \langle \Psi_1, \Psi_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \Psi_k, \Psi_0 \rangle & \langle \Psi_k, \Psi_1 \rangle & \dots & \langle \Psi_k, \Psi_k \rangle \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \Psi_0, f \rangle \\ \langle \Psi_1, f \rangle \\ \vdots \\ \langle \Psi_k, f \rangle \end{bmatrix} \quad (13)$$

式(13)左侧矩阵为法矩阵,可由随机输入变量进行多重积分得到。右侧向量为常数向量,本文研究采用数值积分方法计算常数向量,即

$$\langle f, \Psi_k \rangle = \iint \dots \int f(\mathbf{X}) \Psi_k(\mathbf{X}) P(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \approx \sum_{i=1}^n A_i f(\mathbf{X}^i) \Psi_k(\mathbf{X}^i) \quad (14)$$

式(14)中: $\mathbf{X}^i = [x_1^i, x_2^i, \dots, x_d^i]$ 为第*i*个样本点; $n$ 为样本数; $A_i$ 为第*i*个样本对应的权重。

本文研究中确定样本时考虑随机输入变量之间的非线性相关性,权重的计算式为

$$A_i = \iint \dots \int P(\mathbf{X}) \prod_{j=1}^d L_j^i(x_j) d\mathbf{X} \quad (15)$$

式(15)中: $L_j^i(x_j)$ 为第*i*个样本点中第*j*个随机输入变量对应的单维拉格朗日基函数。

$$L_j^i(x_j) = \prod_{k=1, k \neq i}^n \frac{x_j - x_j^k}{x_j^i - x_j^k} \quad (16)$$

式(16)中: $x_j^k$ 为第*k*个样本点对应的第*j*个随机输入变量的取值。

当每维随机输入变量的样本点为*m*个,而总样本数由每维随机输入变量一一组合而成时,根据拉格朗日插值原理<sup>[20]</sup>,按照式(15)确定权重,可以精确计算 $m^d$ 个联合矩。

对于单维随机输入变量,样本点采用高斯积分点可以获得最高的代数精度,而高斯积分点就是其正交多项式的根。对于多维随机输入变量,如果样本由每个随机输入变量的高斯积分点一一组合而成,根据一维高斯型积分<sup>[16,21]</sup>,可以再确定 $md$ 个联合矩,此时的样本称之为高斯样本。实际应用中*m*取2或者3就可以获得良好的精度。

因此,基于数据驱动型高斯求积的 PCA 逼近系数求解可以概述为:根据正交多项式的根确定高斯样本、权重和法矩阵,再基于高斯样本进行确定性潮流,根据潮流结果和权重求取常数向量,进而求得随机输出变量的 PCA 逼近系数。

### 3.3 数据驱动型正交多项式构建

根据前述分析可知,确定最优正交多项式、法矩阵和权重需要知道随机输入变量的概率密度函数。对此,本节直接计算风机出力的正交多项式。利用风速数据,依据第1节中的风机出力模型来计算风机的实际出力,以此作为风机出力数据的基础。

对于一组正交多项式基底 $\{\Phi_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$ 满足式(4),可重写为

$$\langle \Phi_i, \Phi_j \rangle = \int \Phi_i \Phi_j p(x) dx = 0, \quad i \neq j \quad (17)$$

对于服从“首1原则”的正交多项式基底有

$$\Phi_n = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_n^i x^i \quad (18)$$

式(18)中: $\Phi_n$ 为正交多项式基底的第*n*阶多项式,只需确定 $a_n^i$ 即可确定 $\Phi_n$ 。

根据式(17)和式(18)可得到

$$\langle \Phi_n, \Phi_k \rangle = \langle \left( x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_n^i x^i \right) \left( x^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_k^j x^j \right) \rangle = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (19)$$

注意到 $\sum_{j=0}^{k-1} a_k^j x^j$ 可以由 $\{\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{k-1}\}$ 线性表示,则式(19)可以重新表示为

$$\langle \Phi_n, \Phi_k \rangle = \langle \Phi_n, x^k + \sum_{l=0}^{k-1} c_l \Phi_l \rangle = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (20)$$

式(20)中: $c_l$ 为线性表示的第*l*+1项系数。

根据式(20)可以看出,在 $\Phi_n$ 与 $\{\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{k-1}\}$ 均正交的情况下,只要再满足 $\langle \Phi_n, x^k \rangle = 0$ 就能满足式(17),此时有

$$\langle x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_n^i x^i, x^k \rangle = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (21)$$

对于随机输入变量  $x$ , 其第  $i$  阶原点矩可表示为

$$m^i = \int x^i p(x) dx \quad (22)$$

对于风机出力的离散数据, 其原点矩可按蒙特卡洛积分计算得到

$$m^i \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x_j)^i \quad (23)$$

式(23)中:  $N$  为数据总数;  $x_j$  为第  $j$  个数据点。

那么, 将式(20)转化为原点矩的形式, 可得

$$m^{n+k} + \sum_{i=0}^{n-1} a_n^i m^{i+k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (24)$$

求解正交多项式系数的线性方程组为

$$\begin{bmatrix} m^0 & m^1 & \dots & m^{n-2} & m^{n-1} \\ m^1 & m^2 & \dots & m^{n-1} & m^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ m^{n-2} & m^{n-1} & \dots & m^{2n-4} & m^{2n-3} \\ m^{n-1} & m^n & \dots & m^{2n-3} & m^{2n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n^0 \\ a_n^1 \\ \vdots \\ a_n^{n-2} \\ a_n^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^n \\ m^{1+n} \\ \vdots \\ m^{2n-2} \\ m^{2n-1} \end{bmatrix} \quad (25)$$

因此, 只要根据风机出力数据计算其各阶原点矩, 进而利用式(25)在不构建随机输入变量概率密度函数的情况下, 直接确定最优正交多项式。

由于随机输入变量的概率密度函数未知, 此时需要根据实际数据计算法矩阵的元素和高斯样本点的权重, 可利用蒙特卡洛积分计算, 即

$$\langle \Psi_l, \Psi_m \rangle = \iint \dots \int \Psi_l(\mathbf{X}) \Psi_m(\mathbf{X}) P(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \approx \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \Psi_l(\mathbf{X}^t) \Psi_m(\mathbf{X}^t) \quad (26)$$

权重的计算公式为

$$A_i = \iint \dots \int P(\mathbf{X}) \prod_{j=1}^d L_j^i d\mathbf{X} \approx \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[ \prod_{j=1}^d L_j^i(x_j^t) \right] \quad (27)$$

式(27)中:  $N$  为风机出力数据的总数;  $\mathbf{X}^t$  为第  $t$  个数据样本;  $x_j^t$  为第  $t$  个数据样本中第  $j$  个随机输入变量的取值。

根据实际数据确定了法矩阵、高斯样本点和权重之后, 基于高斯样本点进行确定性潮流, 进而根据式(14)和潮流计算结果得到常数向量, 接着求解式(13)对应的线性方程组, 即可得到 PCA 逼近系数。在得到 PCA 的逼近表达式后, 可根据随机输入变量计算随机输出变量的统计特征。

### 3.4 算法流程

本文提出的数据驱动型 PCA 概率潮流计算方法流程如下。

(1) 输入电力系统的基本参数以及风速、逼近阶数  $P$ 。

(2) 根据输入的风速数据和风机出力模型计算风机出力。

(3) 基于每个风机的出力数据, 根据式(25)计算其正交多项式。

(4) 计算随机输入变量的正交多项式的根作为高斯点, 并组合生成高斯样本, 从而进行确定性潮流。

(5) 基于风机出力数据, 根据式(26)和式(27)计算法矩阵和权重; 根据高斯样本对应的潮流结果和权重计算常数向量, 根据式(13)求解各随机输出变量的逼近系数。

(6) 根据随机输出变量的逼近系数和风机出力数据计算其均值、方差和概率分布等统计特征。

## 4 算例分析

### 4.1 算例设置

本文方法基于 MATLAB R2021a 实现, 硬件环境为: Intel i5, 频率 2.90 GHz, 内存 16 GB, 确定性潮流计算采用 MATPOWER 工具箱<sup>[22]</sup>。采用的 2 个算例分别为解析函数、IEEE118 节点系统。两个风机的风速数据来源开源数据平台<sup>[23]</sup>, 风机出力模型采用第一节介绍的模型, 风机采用恒定电压控制, 电压为 1 p. u., 光伏出力数据来源于文献<sup>[24]</sup>。风机的额定有功功率为  $P_N = 600$  MW, 风机切入风速  $\omega_k = 2$  m/s, 额定风速  $\omega_s = 16$  m/s, 切出风速为  $\omega_c = 25$  m/s。

将蒙特卡洛模拟法 (MCS) 的结果作为标准值, 将 DDPCA 方法和基于 Nataf 变换<sup>[25]</sup>的点估计法<sup>[26]</sup> (point estimation method, PEM) 进行比较。

### 4.2 算例 1

算例 1 采用一个解析函数对 DDPCA 方法和基于 Nataf 变换的点估计法进行了比较。解析函数的表达式为  $G(\mathbf{X}) = 18 - 3x_1 - 2x_2$ , 随机输入变量  $\mathbf{X} = [x_1, x_2]$  的联合概率密度函数为  $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 + x_1 x_2) e^{-(x_1 + x_2 + x_1 x_2)}$ , 其中  $x_1, x_2 > 0$ 。

首先利用以及 DDPCA 方法对该解析函数进行逼近。算例 1 采用一阶逼近 ( $P = 1$ ), 每维随机变量取两个高斯点。通过联合概率密度函数可以求得两个边缘概率密度函数  $f_1(x_1) = e^{-x_1}$ , 其中  $x_1 > 0$ ,  $f_2(x_2) = e^{-x_2}$ , 其中  $x_2 > 0$ 。通过计算随机变量的原点矩, 可以计算其正交多项式, 两个随机变量的前

三项正交多项式分别为:  $\Phi_0^1(x_1) = 1, \Phi_1^1(x_1) = x_1 - 1, \Phi_2^1(x_1) = x_1^2 - 4x_1 + 2$ ;  $\Phi_0^2(x_2) = 1, \Phi_1^2(x_2) = x_2 - 1, \Phi_2^2(x_2) = x_2^2 - 4x_2 + 2$ 。逼近基底为  $\Psi_0(\mathbf{X}) = 1, \Psi_1(\mathbf{X}) = x_1 - 1, \Psi_2(\mathbf{X}) = x_2 - 1$ 。利用2阶正交多项式的根得到两个高斯点,利用高斯点可以生成4个高斯样本(3.414 2,3.414 2)、(3.414 2,0.585 8)、(0.585 8,3.414 2)、(0.585 8,0.585 8),对应的权重为-0.029、0.175 5、0.175 5、0.678 1。根据多项式基底算法矩阵,利用高斯样本计算常数向量,最后可以求得逼近系数为  $\alpha_0 = 13, \alpha_1 = -3, \alpha_2 = -2$ ,应当注意的是这是对目标函数的无差逼近。接着,采用基于 Nataf 变换的三点估计法(3PEM)对上述解析函数的矩进行估计。表1给出了两种方法计算出的该解析函数的前4阶矩。

从表1中可知DDPCA方法利用4个高斯样本就能完全精确地估计目标函数的前4阶矩,而基于Nataf变换的三点估计法利用5个样本只能较好地估计目标函数的均值。在算例1中,DDPCA方法的精度和计算效率都优于3PEM方法。从理论上而言,基于Nataf变换的3PEM方法精度较低,一方面是因为Nataf变换会导致随机变量之间非线性相关性的丢失,另一方面是因为点估计法在估计随机输出变量的高阶矩时对目标函数的近似误差较大。对于该算例中的解析函数,假设随机输入变量为相关系数为0.5的二维正态分布,则两种方法计算出的该解析函数的前4阶矩如表2所示。从表2中可以看出DDPCA方法的精度和计算效率仍然优于3PEM方法。同时,由于二维正态分布之间只有线性相关关系,因此Nataf变换不会引入误差,基于Nataf变换的3PEM方法能够很好地估计目标函数的前3阶矩。

表1 两种方法的精度对比(非正态分布)

Table 1 The accuracy comparison of the two methods( abnormal distribution)

算法	均值	方差	3阶中心矩	4阶中心矩
真实值	13	8.156 2	-35.314 9	497.945
DDPCA	13	8.156 2	-35.314 9	497.945
3PEM	12.995	7.152 8	-16.266 3	111.671 4

表2 两种方法的精度对比(正态分布)

Table 2 The accuracy comparison of the two methods( normal distribution)

算法	均值	方差	3阶中心矩	4阶中心矩
真实值	18	19	0	1 083
DDPCA	18	19	0	1 083
3PEM	18	19	$3.55 \times 10^{-14}$	795

### 4.3 算例2

在电力系统应用DDPCA方法与在算例1中应用DDPCA方法的流程完全一样,区别只是前者需要通过潮流计算确定高斯样本对应的随机输出变量的值。算例2采用IEEE118节点系统,将节点10和节点26上的两台常规机组用两台风电机组代替,节点2上有一个光伏电站,风机有功出力模型、控制方式、风速数据、光伏出力数据来源已在仿真环境设置中说明。由于光伏出力数据总共有43 201个离散点,因此采用43 201次MCS的结果作为基准,对DDPCA方法和基于Nataf变换的点估计法进行了比较。DDPCA方法逼近阶数为 $P = 2$ ,高斯样本数为 $n = 9$ (即每一维随机输入变量采用3个高斯点)。由于Nataf变换需要知道随机变量的逆累积分布函数(inverse cumulative distribution function, ICDF),本文研究中采用核密度估计法(Kernel density estimation, KDE)<sup>[27]</sup>计算输入随机变量的ICDF,具体过程可参考相关文献。

为了比较两种方法的精度,表3给出了所提DDPCA方法和基于Nataf变换的3PEM法各随机输出变量均值的平均相对误差( $\bar{\varepsilon}_\mu$ )和方差的平均相对误差( $\bar{\varepsilon}_\sigma$ )。其中 $V$ 包括所有PQ节点的电压幅值, $\theta$ 包括所有非平衡节点的电压相角, $P_{line}$ 包括所有线路的有功功率, $Q_{line}$ 则包括所有线路的无功功率。为了减小计算机舍入误差对结果分析的影响,在两种方法下均采用如下数据处理原则:对于绝对误差小于 $1 \times 10^{-16}$ 的输出变量,将其相对误差置为0。

从表3中可以看出,本文所提DDPCA方法相比与基于Nataf变换的3PEM法,所计算得到的随机输出变量的前二阶矩的精度要高得多。3PEM法精度低一方面是因为Nataf变换导致的随机输入变量之间非线性关系的丢失,另一方面是点估计法对未知函数的近似误差较大。为了进一步对比两种方法的精度,采用6阶Gram-charlier级数<sup>[28]</sup>获取随机输出变量的累积分布函数(cumulative distribution function, CDF)和概率密度函数(probability density function, PDF)。

表3 均值和方差的平均相对误差

Table 3 Mean relative error of mean and variance

变量	误差指标	DDPCA	3PEM
$V$	$\bar{\varepsilon}_\mu$	$1.65 \times 10^{-8}$	$6.08 \times 10^{-5}$
	$\bar{\varepsilon}_\sigma$	$1.30 \times 10^{-3}$	$9.96 \times 10^{-2}$
$\theta$	$\bar{\varepsilon}_\mu$	$2.83 \times 10^{-6}$	$8.54 \times 10^{-2}$
	$\bar{\varepsilon}_\sigma$	$1.00 \times 10^{-4}$	$3.46 \times 10^{-2}$
$P_{line}$	$\bar{\varepsilon}_\mu$	$1.76 \times 10^{-6}$	$1.20 \times 10^{-1}$
	$\bar{\varepsilon}_\sigma$	$5.65 \times 10^{-4}$	$4.25 \times 10^{-2}$
$Q_{line}$	$\bar{\varepsilon}_\mu$	$7.51 \times 10^{-6}$	$1.03 \times 10^{-1}$
	$\bar{\varepsilon}_\sigma$	$8.88 \times 10^{-4}$	$5.35 \times 10^{-2}$

对于4类随机输出变量各选择一个输出变量分析两种方法下其CDF和PDF的情况,其他随机输出变量具有相似的规律。图1和图2分别给出了节点9电压幅值的PDF和CDF,图3和图4分别给出了节点2电压相角的PDF和CDF,图5和图6分别给出了线路1-2有功功率的PDF和CDF,图7和图8分别给出了线路1-2无功功率的PDF和CDF。其中节点2和节点9是标准算例系统中的节点编号,节点编号顺序和标准算例中编号顺序保持一致,线路1-2表示节点1和节点2之间的线路。

从图1~图8中可以看出所提DDPCA方法能够给出随机输出变量非常精确的PDF和CDF,而基于Nataf变换的3PEM法难以给出随机输出变量精确的PDF和CDF。从理论上而言,3PEM法的精度难以保证,一方面是因为Nataf变换导致的非线性相关关系的丢失,另一方面是PEM难以给出随机输出变量高阶矩的精确值。

本文所提DDPCA方法属于一种解析法,该方法能够给出随机输出变量与随机输入变量之间的一

个近似解析表达式,这是点估计法难以做到的。当节点2上的光伏出力为0时,图9给出了DDPCA方法下平衡节点有功出力随两台风机有功出力的变化

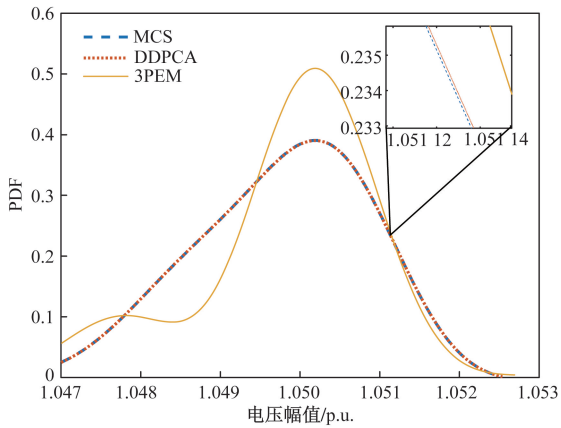


图1 节点9电压幅值的概率密度函数

Fig. 1 Probability density function of voltage amplitude at node 9

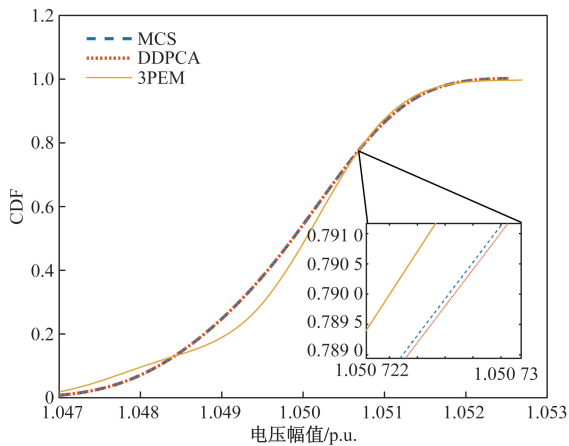


图2 节点9电压幅值的累积分布函数

Fig. 2 Cumulative distribution function of voltage amplitude at node 9

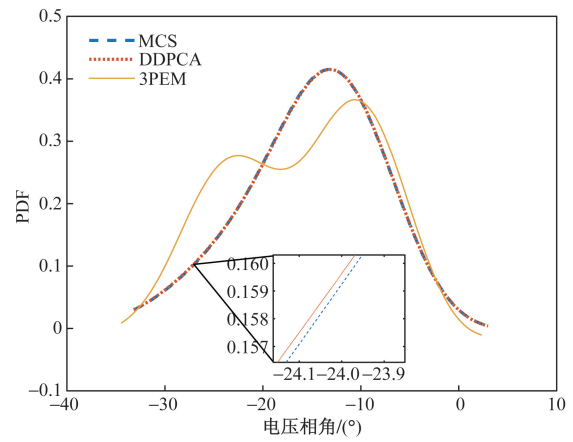


图3 节点2电压相角的概率密度函数

Fig. 3 Probability density function of voltage angle at node 2

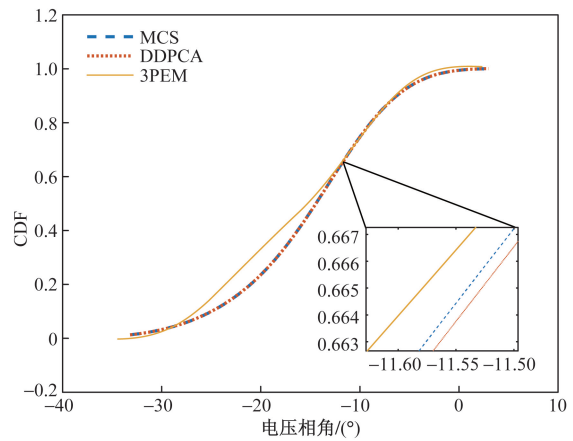


图4 节点2电压相角的累积分布函数

Fig. 4 Cumulative distribution function of voltage angle at node 2

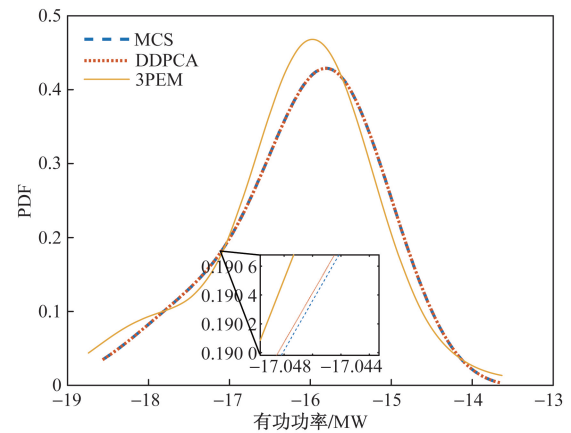


图5 线路1-2有功功率的概率密度函数

Fig. 5 Probability density function of the active power of line 1-2

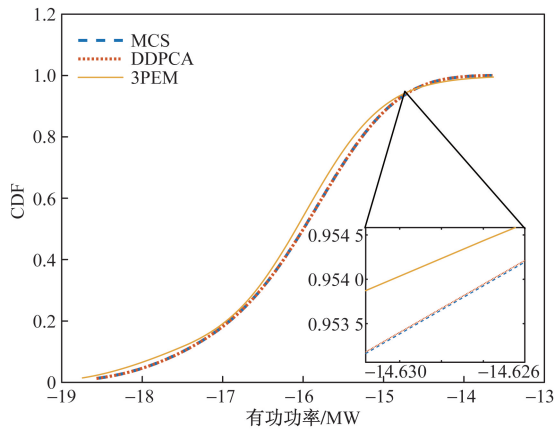


图6 线路1-2有功功率的累积分布函数  
Fig. 6 Cumulative distribution function of the active power of line 1-2

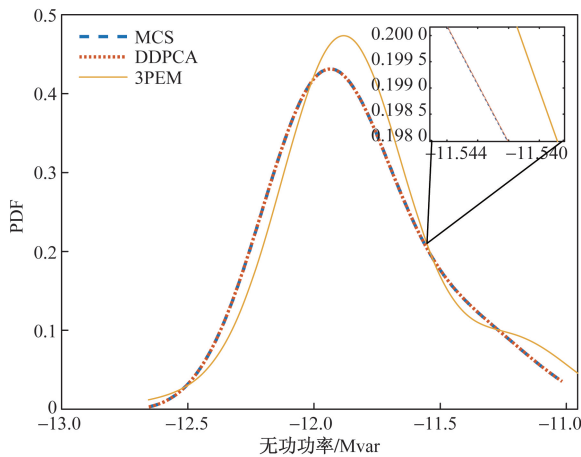


图7 线路1-2无功功率的概率密度函数  
Fig. 7 Probability density function of the reactive power of line 1-2

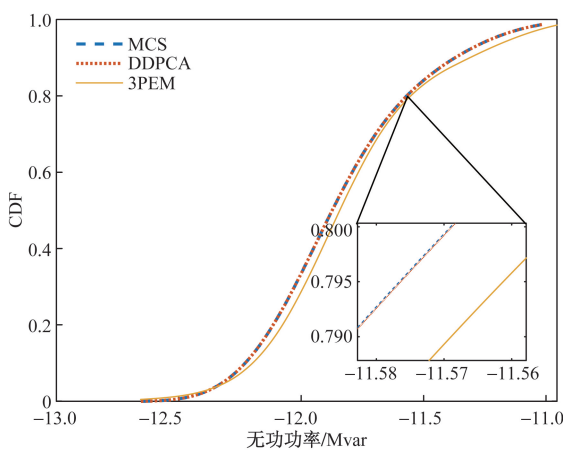


图8 线路1-2无功功率的累积分布函数  
Fig. 8 Cumulative distribution function of the reactive power of line 1-2

情况。从图9中可以看出,随着两台风机有功出力的增加,平衡节点有功出力逐渐减小。以逐点潮流

计算的结果作为标准值,图10给出了DDPCA方法给出的解析表达式的相对误差。从图10中可以看出DDPCA所给出的解析表达式在风机出力的很大一个范围内都具有很高的精度。

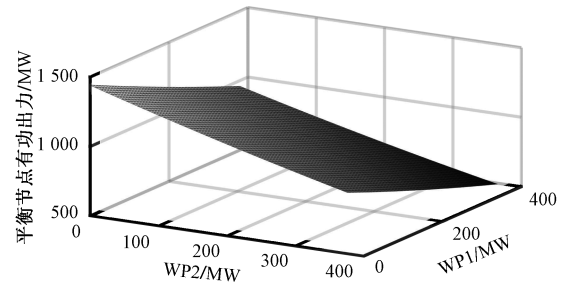


图9 平衡节点有功出力的变化情况  
Fig. 9 The change of the active power output of the slack node

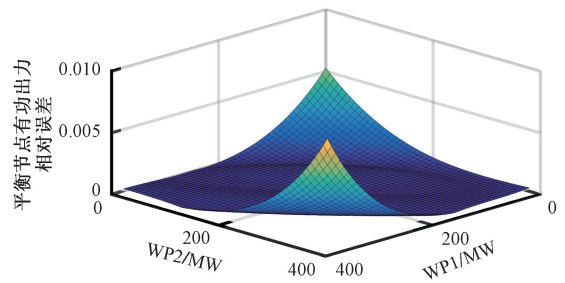


图10 DDPCA平衡节点有功出力的相对误差  
Fig. 10 Relative error of active power output of the slack node

综上分析,在精度方面,DDPCA具有高于基于Nataf变换的3PEM法的精度。在计算效率方面,DDPCA方法进行了27次确定性潮流计算,加上数据处理所需的时间,该方法总共耗时0.89s。基于Nataf变换的3PEM法进行了7次确定性潮流计算,加上Nataf变换所需的时间,该方法总共耗时0.61s。虽然DDPCA方法的计算时间比3PEM法要高些,但该方法的精度高于3PEM法。本文研究中采用了50000个数据拟合PDF,当用于拟合的数据量以及随机输入变量的个数增加,Nataf变换所需的时间还会增加。

#### 4.4 算例3

算例3采用湖北随州10节点小电网,电网拓扑结构如图11所示,支路数据如表4所示,负荷数据如表5所示。节点4和节点8各接有一台风电机组,风机有功出力模型、控制方式和风速数据来源与算例2相同。节点2上的负荷有功功率服从均值为40MW、标准差为5MW的正态分布,负荷采用恒定功率因数控制,功率因数为0.9。采用50000次MCS的结果作为基准,对DDPCA方法和基于Nataf变换的点估计法进行了比较。DDPCA方法逼近阶数为 $P=2$ ,高斯样本数为 $n=9$ 。

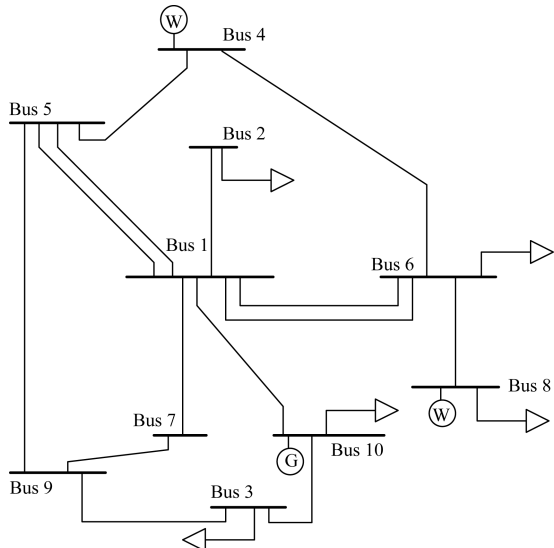


图 11 湖北随州电网

Fig. 11 Power grid of Hubei Suizhou

表 4 支路数据

Table 4 Branch data

支路	电阻/p. u.	电抗/p. u.	电纳/p. u.
1-2	0.001 512 670	0.010 627 67	0.039 22
1-5	0.002 136 05	0.017 798 4	0.059 4
1-5	0.002 313 43	0.016 954 5	0.061 75
1-7	0.001 460 09	0.011 601 3	0.039 22
1-10	0.002 715 06	0.024 333 8	0.081 19
3-9	0.013 240 7	0.058 463 3	0.127 59
3-10	0.000 577 209	0.002 685 51	0.006 1
4-5	0.003 206 85	0.022 530 5	0.083 15
4-6	0.003 274 92	0.023 008 8	0.084 91
5-9	0.002 845 94	0.023 151 1	0.077 48
6-8	0.000 069 75	0.000 572 401	0.001 96
7-9	0.084 521 5	0.312 144	0.001 41
1-6	0.001 702 73	0.013 529	0.040 2
1-6	0.001 835 65	0.015 063 3	0.051 58

表 5 负荷数据

Table 5 Load data

母线	有功功率/MW	无功功率/Mvar
2	40	200
3	500	300
6	400	0
8	83	0
10	135	0

图 12 和图 13 分别给出了节点 1 电压幅值的 PDF 和 CDF,图 14 和图 15 分别给出了节点 1 电压相角的 PDF 和 CDF,图 16 和图 17 分别给出了线路 1-2 有功功率的 PDF 和 CDF,图 18 和图 19 分别给出了线路 1-2 无功功率的 PDF 和 CDF。从这些图中同样可以看出 DDPKA 方法可以得到随机输出变量精确的 PDF 和 CDF,而点估计给出的 CDF 和 PDF 具有很大的误差。

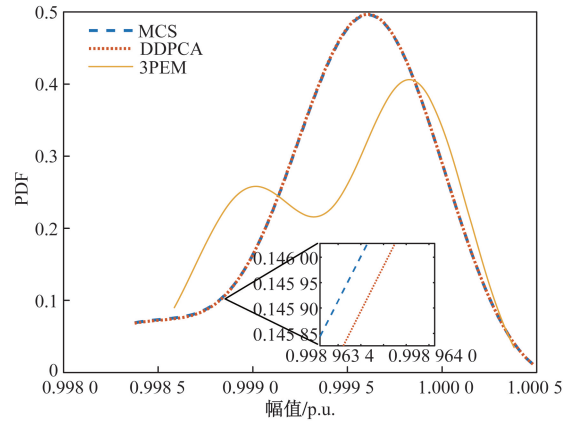


图 12 节点 1 电压幅值的概率密度函数

Fig. 12 Probability density function of voltage amplitude at node 1

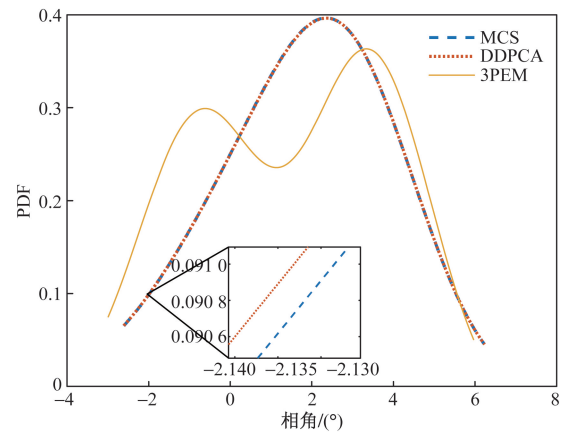


图 13 节点 1 电压幅值的累积分布函数

Fig. 13 Cumulative distribution function of voltage amplitude at node 1

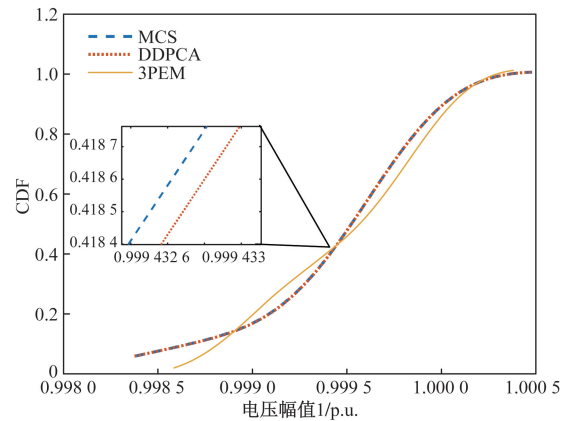


图 14 节点 1 电压相角的概率密度函数

Fig. 14 Probability density function of voltage angle at node 1

表 6 给出了两种方法各类随机输出变量的均值的平均相对误差和方差的平均相对误差。表 6 中的数据表明 DDPKA 方法仍然比基于 Nataf 变换的点估计法具有更高的精度。当节点 2 上的负荷有功功率为 40 MW 时,图 20 给出了 DDPKA 方法下平衡节点

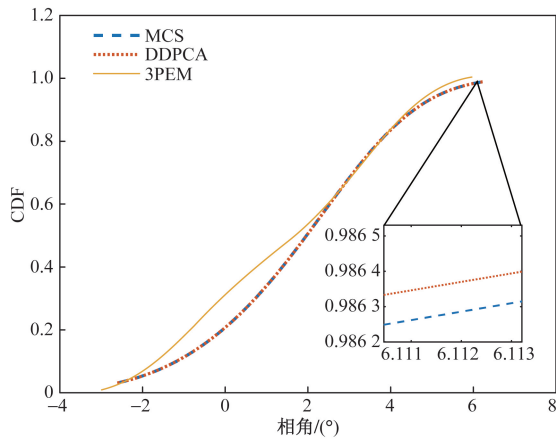


图 15 节点 1 电压相角的累积分布函数

Fig. 15 Cumulative distribution function of voltage angle at node 1

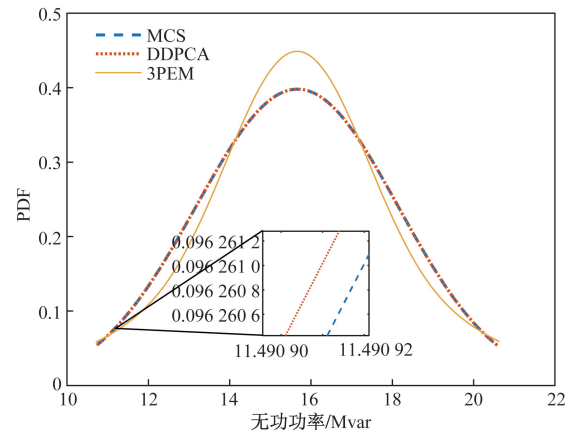


图 18 线路 1-2 无功功率的概率密度函数

Fig. 18 Probability density function of the reactive power of line 1-2

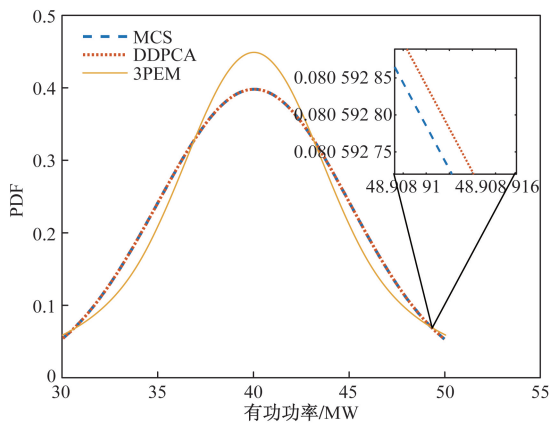


图 16 线路 1-2 有功功率的概率密度函数

Fig. 16 Probability density function of the active power of line 1-2

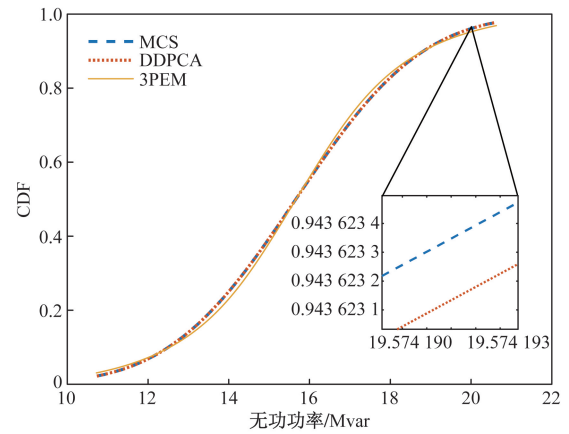


图 19 线路 1-2 无功功率的累积分布函数

Fig. 19 Cumulative distribution function of the reactive power of line 1-2

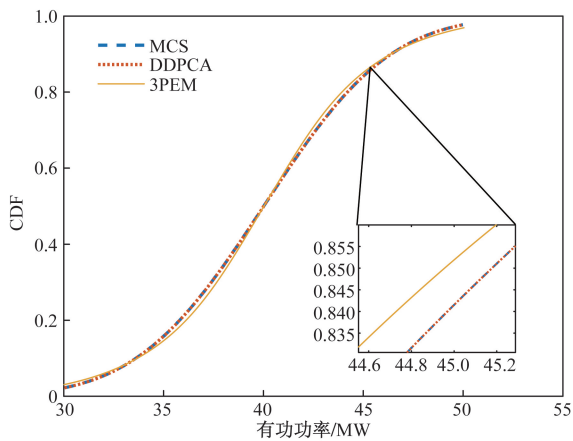


图 17 线路 1-2 有功功率的累积分布函数

Fig. 17 Cumulative distribution function of the active power of line 1-2

有功出力随两台风机有功出力的变化情况,图 21 则给出了 DDPCA 给出的各平衡节点有功出力的相对误差。

表 6 均值和方差的平均相对误差

Table 6 Mean relative error of mean and variance

参数	误差指标	DDPCA	3PEM
$V$	$\bar{\varepsilon}_\mu$	$5.67 \times 10^{-10}$	$3.35 \times 10^{-5}$
	$\bar{\varepsilon}_v$	$2.20 \times 10^{-3}$	$3.05 \times 10^{-1}$
$\theta$	$\bar{\varepsilon}_\mu$	$2.38 \times 10^{-8}$	$1.53 \times 10^{-1}$
	$\bar{\varepsilon}_v$	$2.55 \times 10^{-6}$	$2.94 \times 10^{-2}$
$P_{\text{line}}$	$\bar{\varepsilon}_\mu$	$4.25 \times 10^{-9}$	$1.25 \times 10^{-1}$
	$\bar{\varepsilon}_v$	$7.10 \times 10^{-7}$	$3.86 \times 10^{-2}$
$Q_{\text{line}}$	$\bar{\varepsilon}_\mu$	$1.02 \times 10^{-6}$	$3.87 \times 10^{-1}$
	$\bar{\varepsilon}_v$	$1.65 \times 10^{-4}$	$3.76 \times 10^{-2}$

在该算例中,DDPCA 方法的精度明显高于基于 Nataf 变换的 3PEM 法。在计算效率方面,DDPCA 方法进行了 27 次确定性潮流计算,加上数据处理所需的时间,该方法总共耗时 0.46 s。基于 Nataf 变换的 3PEM 法进行了 7 次确定性潮流计算,加上 Nataf 变换所需的时间,该方法总共耗时 0.39 s。虽然 DDPCA 方法的计算时间比 3PEM 法要高些,但该方法的精度则高于 3PEM 法。

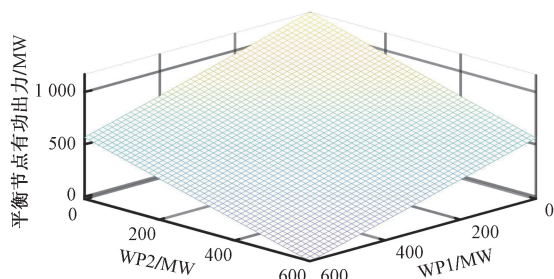


图 20 平衡节点有功出力的变化情况

Fig. 20 The change of the active power output of the slack node

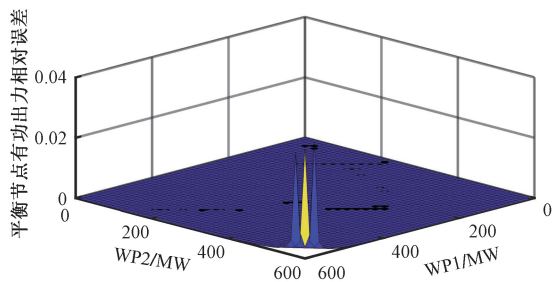


图 21 DDPCA 平衡节点有功出力的相对误差

Fig. 21 Relative error of active power output of the slack node

## 5 结论

针对已知随机输入变量为历史数据和 Nataf 变换难以准确刻画随机变量之间的非线性相关关系的情况,提出了一种数据驱动型 PCA 概率潮流方法。该方法具有以下特点。

(1)DDPCA 方法能够根据历史数据,直接确定最优的正交多项式。相比基于 Nataf 变换的点估计法,利用 DDPCA 方法得到的随机输出变量的均值和方差具有更高的精度。

(2)DDPCA 方法能够给出随机输出变量的近似解析表达式,能够给出随机输出变量随着输入变量的变化情况。

(3)相比基于 Nataf 变换的点估计法,DDPCA 方法能够给出随机输出变量的全面信息,能够用于分析线路潮流越限概率等安全分析中。

(4)在随机输入变量不是很多的情况下,相比基于 Nataf 变换的点估计法,DDPCA 方法具有更高的精度和计算效率。

本文所提的 DDPCA 方法也可以应用于已知光伏出力历史数据的场景,具有较为广泛的应用场景。接下来的研究将致力于对高斯样本进行削减,从而减少随机输入变量过多时导致的计算效率降低。

## 参 考 文 献

[1] 郭富强,汪鹏,赵凯明. 基于多指标优化的园区源网荷储系统

配置[J]. 科学技术与工程, 2023, 23(14): 6018-6026.

Guo Fuqiang, Wang Peng, Zhao Kaiming. Configuration of source-grid-load-storage system in an industrial park based on multi-indicator optimization[J]. Science Technology and Engineering, 2023, 23(14): 6018-6026.

[2] 冯萧飞,刘韬文,李彬,等. 基于滑动窗双边 CUSUM 算法的风电爬坡事件检测方法[J]. 科学技术与工程, 2024, 24(2): 595-603.

Feng Xiaofei, Liu Taowen, Li Bin, et al. Wind ramp event detection method based on sliding window with bilateral CUSUM[J]. Science Technology and Engineering, 2024, 24(2): 595-603.

[3] 方斯顿,程浩忠,徐国栋,等. 基于 Nataf 变换和准蒙特卡洛模拟的随机潮流方法[J]. 电力自动化设备, 2015, 35(8): 38-44.

Fang Sidun, Cheng Haozhong, Xu Guodong, et al. Probabilistic load flow method based on Nataf transformation and quasi Monte Carlo simulation[J]. Electric Power Automation Equipment, 2015, 35(8): 38-44.

[4] Cai D, Shi D, Chen J. Probabilistic loadflow computation with polynomial normal transformation and Latin hypercube sampling[J]. Generation Transmission & Distribution Iet, 2013, 7(5): 474-482.

[5] 邓苏娟,周步祥,张百甫. 计及相关性的改进均值一阶鞍点估计概率潮流计算[J]. 科学技术与工程, 2018, 18(5):64-69.

Deng Sujuan, Zhou Buxiang, Zhang Baifu. Probabilistic load flow calculation based on improved mean value first order saddle point approximation considering correlation[J]. Science Technology and Engineering, 2018, 18(5): 64-69.

[6] 毛晓明,叶嘉俊. 奇异值分解结合均匀设计采样的半不变量法概率潮流计算[J]. 电力自动化设备, 2019, 39(6): 159-165, 172.

Mao Xiaoming, Ye Jiajun. Probabilistic power flow calculation based on cumulant method combining singular value decomposition and uniform design sampling[J]. Electric Power Automation Equipment, 2019, 39(6): 159-165, 172.

[7] Wu H, Zhou Y, Dong S, et al. Probabilistic load flow based on generalized polynomial chaos[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2016, 32(1): 820-827.

[8] 王凌云,应利,阮胜冬,等. 考虑源荷不确定性及配电网接纳裕度的弹性调度策略[J]. 科学技术与工程, 2022, 22(8): 3125-3133.

Wang Lingyun, Ying Li, Ruan Shengdong, et al. Elastic scheduling strategy considering uncertainty of source load and acceptance margin of distribution network[J]. Science Technology and Engineering, 2022, 22(8): 3125-3133.

[9] 李怡宁,吴浩,辛焕海,等. 基于广义多项式混沌法的电力系统随机潮流[J]. 电力系统自动化, 2015, 39(7): 14-20.

Li Yining, Wu Hao, Xin Huanhai, et al. Stochastic power flow of power system based on generalized polynomial chaos method[J]. Automation of Electric Power Systems, 2015, 39(7): 14-20.

[10] 李怡宁. 基于广义多项式混沌法的电力系统随机潮流[D]. 杭州: 浙江大学, 2015.

Li Yining. Probabilistic power flow based on generalized polynomial chaos methods[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2015.

[11] 苏宏升,董晓阳. 基于改进随机响应面法的含风电电力系统概率潮流计算[J]. 太阳能学报, 2021, 42(6): 289-296.

- Su Hongsheng, Dong Xiaoyang. Probabilistic power flow calculation of power system with wind power based on improved stochastic response surface method[J]. *Acta Energetica Sinica*, 2021, 42(6): 289-296.
- [12] 孙英云, 毛瑞, 董雷, 等. 基于随机配置点法的概率潮流算法[J]. *电力系统自动化*, 2015, 39(23): 111-118.
- Sun Yingyun, Mao Rui, Dong Lei, et al. Probabilistic power flow algorithm based on random allocation point method[J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2015, 39(23): 111-118.
- [13] 李钰洋, 王增平. 基于高斯求积的智能配电网三相概率潮流点估计法[J]. *电网技术*, 2022, 46(2): 709-717.
- Li Yuyang, Wang Zengping. Three-phase probabilistic power flow point estimation method for intelligent distribution network based on Gaussian quadrature[J]. *Power System Technology*, 2022, 46(2): 709-717.
- [14] Chen Y, Wen J, Cheng S. Probabilistic load flow method based on Nataf transformation and Latin hypercube sampling[J]. *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, 2012, 4(2): 294-301.
- [15] 刘承锡, 蒋友津, 韩江北. 基于扩展 Nataf 变换的交直流混合系统概率潮流计算方法[J]. *科学技术与工程*, 2023, 23(24): 10362-10371.
- Liu Chengxi, Jiang Youjin, Han Jiangbei. Probabilistic power flow calculation method of AC / DC hybrid system based on extended Nataf transformation[J]. *Science Technology and Engineering*, 2023, 23(24): 10362-10371.
- [16] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 5 版. 北京: 清华大学出版社, 2008.
- Li Qingyang, Wang Nengchao, Yi Dayi. *Numerical analysis*[M]. 5th ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2008.
- [17] Leon S J, Björck Å, Gander W. Gram-Schmidt orthogonalization: 100 years and more[J]. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2013, 20(3): 492-532.
- [18] 方斯顿, 程浩忠, 徐国栋, 等. 基于 Nataf 变换含相关性的扩展准蒙特卡洛随机潮流方法[J]. *电工技术学报*, 2017, 32(2): 255-263.
- Fang Sidun, Cheng Haozhong, Xu Guodong, et al. Extended Quasi-Monte Carlo random power flow method with correlation based on Nataf transform[J]. *Transactions of China Electrotechnical Society*, 2017, 32(2): 255-263.
- [19] Burden R L, Faires J D, Burden A M. *Numerical analysis*[M]. New York: Engage Learning, 2015.
- [20] Sauer T, Xu Y. On multivariate lagrange interpolation[J]. *Mathematics of Computation*, 1995, 64(211): 1147-1170.
- [21] Golub G H, Welsch J H. Calculation of Gauss quadrature rules[J]. *Mathematics of Computation*, 1969, 23(106): 221-230.
- [22] Zimmerman R D, Murillo-Sánchez C E, Thomas R J. MATPOWER: steady-state operations, planning, and analysis tools for power systems research and education[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2010, 26(1): 12-19.
- [23] National Renewable Energy Laboratory (NREL). Wind maps [EB/OL]. [2024-11-05]. <https://maps.nrel.gov/wind-prospector>.
- [24] Electric Power Research Institute. Open distribution system simulator (OpenDSS) [EB/OL]. [2024-11-05]. <https://www.eprl.com/pages/sa/opensdss>.
- [25] Li H S, Lü Z Z, Yuan X K. Nataf transformation based point estimate method[J]. *Chinese Science Bulletin*, 2008, 53(17): 2586-2592.
- [26] Hong H P. An efficient point estimate method for probabilistic analysis[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 1998, 59(3): 261-267.
- [27] Silverman B W. *Density estimation for statistics and data analysis*[M]. London: Routledge, 2018.
- [28] Zhang P, Lee S T. Probabilistic load flow computation using the method of combined cumulants and Gram-Charlier expansion[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2004, 19(1): 676-682.