2025 年 第 25 卷 第 7 期
2025, 25(7):02664-09
科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering
ISSN 1671—1815
CN 11—4688/T

DOI:10.12404/j.issn.1671-1815.2309852
引用格式:王涛, 古佳忻, 张莉敏. 食饵具有 Allee 效应的离散捕食-被捕食系统的分岔及控制[J]. 科学技术与工程, 2025, 25(7): 2664-2672.
Wang Tao, Gu Jiaxin, Zhang Limin. Bifurcations and controls of a discrete-time predator-prey system with Allee effect on prey [J]. Science Technology and Engineering, 2025, 25(7): 2664-2672.

数学

食饵具有 Allee 效应的离散捕食-被捕食系统的分岔及控制

王涛, 古佳忻, 张莉敏*
(重庆邮电大学理学院, 重庆 400065)

摘 要 为探讨 Allee 效应对种群动态行为的影响,利用中心流形定理与分岔理论,研究了一类食饵具有 Allee 效应的离散捕食-捕食者系统的分岔。结果表明:适当增大食饵种群的增长率,会导致系统通过跨临界分岔出现食饵的天敌——捕食者;在适当的 Allee 效应下,系统是稳定的,但 Allee 效应超过临界值,系统会发生二倍周期的翻转分岔,分岔参数图还表明随着 Allee 效应进一步增强,此二倍周期的翻转分岔会导致系统出现混沌。从生物学的观点来看,在一定的生态环境中,某一物种繁殖到一定程度,会通过"物竞天择"的方式出现其天敌;适当的 Allee 效应有利于捕食系统的稳定,但食饵 Allee 效应过强,将造成捕食效能锐减,失去天敌的有效制约,食饵将经历短暂地激增、然后超过环境容纳量而消亡。为减少分岔带给系统的不利影响,利用状态反馈法控制跨临界分岔、利用混合策略控制翻转分岔。数值模拟结果显示与理论分析完全一致。

关键词 跨临界分岔; 翻转分岔; 分岔控制; 数值模拟
中图法分类号 O29; **文献标志码** A

Bifurcations and Controls of a Discrete-time Predator-prey System with Allee Effect on Prey

WANG Tao, GU Jia-xin, ZHANG Li-min*
(School of Science, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

[**Abstract**] To investigate the influence of Allee effect on population dynamics, the center theorem and bifurcation theory were used to study the bifurcation of a discrete predator-prey system with Allee effect on prey. The results indicate that an appropriate increase in the growth rate of the prey population will lead to the emergence of predators, the natural enemies of the prey by the transcritical bifurcation; Under the appropriate Allee effect, the system is stable, but if the Allee effect exceeds the critical value the system will undergo a double period flip bifurcation. The bifurcation parameter diagram also shows that as the Allee effect further strengthens, this flip bifurcation will lead to chaos in the system. From a biological perspective, in a certain ecological environment, a species that reproduces to a certain extent will encounter its natural enemies through "natural selection". An appropriate Allee effect is beneficial for the stability of the predator-prey system, but if the Allee effect of the prey is too strong, it will cause a sharp decrease in predators and an effective restriction of no natural enemies. The prey will undergo a brief surge, exceed the environmental capacity, and then die out. To reduce the adverse effects of the bifurcations on the system, the state feedback is used to control the transcritical bifurcation and facilitate hybrid control to control the flip bifurcation. The numerical simulation results show complete consistency with the theoretical analyses.

[**Keywords**] transcritical bifurcation; flip bifurcation; bifurcation control; numerical simulation

在自然界中,种群自身密度的变化会影响种群的增长率。生态学家 Allee 发现一种现象,群聚有利于种群的增长,但过分稀疏或过分拥挤又会阻碍增长,对种群繁殖产生负作用,这种生物现象被称为 Allee 效应。近年来,Allee 效应在传染病动力学、种群生态学及种群生物学等方面有着广泛应用。

收稿日期: 2023-12-13 **修订日期**: 2024-07-26
基金项目: 国家自然科学基金(11901073);教育部产学合作协同育人项目(230904084192851);重庆市高等教育学会 2023—2024 年度高等教育科学研究课题(cqgj23047C)
第一作者: 王涛(1998—),男,汉族,重庆丰都人,硕士研究生。研究方向:动力系统。E-mail:598446796@qq.com。
* **通信作者**: 张莉敏(1982—),女,汉族,河南商丘人,博士,副教授。研究方向:微分方程与动力系统。E-mail:zhanglm@cqupt.edu.cn。

Akhtar 等[1]、Arim 等[2]分析了具有 Allee 效应的传染病模型的动力学性质。焦乐等[3]对滨海湿地植物种群 Allee 效应的驱动机制进行了探讨。徐晓雯等[4]研究了晶格河流模型中 Allee 效应对河流速度的影响。Dong 等[5]讨论了具有 Allee 效应的浮游动植物模型的动力学性质。Qurban 等[6]研究了食植者具有 Allee 效应的植物—食植者模型的稳定性和分岔。Song 等[7]、Chen 等[8]分析了具有 Allee 效应的反映扩散捕食模型的稳定性和斑图。Bi 等[9]讨论了具有 Allee 效应的分数阶捕食系统的空间动力学。Zhang 等[10-11]、Chen 等[12]则研究了具有 Allee 效应的离散捕食系统的稳定性与分岔。分岔是一类重要的非线性现象。在机械振动[13]、生物系统[10-12]以及电力系统[14]等领域都存在此类现象。研究系统的分岔有助于掌握系统的动态,理解系统行为的内在机理。在生物学中,由于分岔和不稳定波动会对生物种群的繁殖产生不利影响,因而生物系统的分岔控制也是生物动力学研究的一个热点。

Kangalgil[15]提出了一类食饵具有 Allee 效应的离散捕食系统的分岔及控制。该文阐述了该捕食系统的构建意义,讨论了系统在不动点附近的稳定性并给出 Neimark-Sacker 分岔存在的临界条件。现在前人的基础上,首先深入讨论系统所有潜在的余维一分岔。利用中心流形定理和分岔理论,不仅给出了分岔发生的临界条件,而且利用简明的系统参数给出分岔发生的非退化条件和横截条件,进而判断出分岔发生的方向和稳定性。其次,根据生物学背景,解释说明分岔所代表的生物学现象和意义,分析 Allee 效应对系统的影响。随后,为避免分岔对系统产出不稳定影响,利用状态反馈方法和混合策略方法来控制理论分析得到的分岔。最后,利用数值模拟来支持理论分析。

1　系统简介

Kangalgil[15]中提出的食饵具有 Allee 效应的离散捕食-被捕食系统表达式为

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n(1-x_n) - \dfrac{x_n}{m+x_n}x_ny_n \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{b}x_ny_n \end{cases} \tag{1}$$

式(1)中:x_n、y_n 分别为食饵与捕食者在时间等于 n 时的种群数量;非负常数 a、b 分别为食饵的增长率和捕食者的营养转化率;$\dfrac{x_n}{m+y_n}$ 为 Allee 效应项,$m>0$ 为 Allee 效应常数。Kangalgil[15]给出了系统[式(1)]非负不动点的存在性及稳定性,并选择食饵的增长率 a 为分岔参数,研究了系统在正不动点处发生 Neimark-Sacker 分岔的条件。下面的引理给出了系统[式(1)]所有非负不动点存在的条件。

引理 1[15]　假设 $a>0$、$b>0$ 时,则

(1)系统[式(1)]总有一个原点 $E_0(0,0)$。

(2)如果 $a>1$,系统[式(1)]有一个边界点 $E_1\left(\dfrac{a-1}{a},0\right)$。

(3)如果 $a>\dfrac{1}{1-b}$ 和 $b\in(0,1)$,系统[式(1)]有一个内部点 $E_2\left(b,\dfrac{(m+b)[(1-b)a-1]}{b}\right)$。

系统[式(1)]在任意点 (x_n,y_n) 处的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{J}(x_n,y_n) = \begin{pmatrix} v_1 & -\dfrac{x^2}{m+x} \\ \dfrac{y}{b} & \dfrac{x}{b} \end{pmatrix} \tag{2}$$

式(2)中:$v_1 = \dfrac{-2ax^3+[(-4m+1)a-y]x^2}{(m+x)^2} + \dfrac{-2m[(m-1)a+y]x+am^2}{(m+x)^2}$。

在本文中,对系统[式(1)]所有非负不动点的所有潜在的余维一分岔进行探讨,并选 Allee 效应为分岔参数,研究系统在正不动点处发生翻转分岔的条件。最后,利用状态反馈和混合策略来控制理论分析得到的分岔。

2　不动点 E_1 和 E_0 处的跨临界分岔

将 E_1 代入式(2),得到特征值为

$$\begin{cases} \lambda_1|_{E_1} = 2-a \\ \lambda_2|_{E_1} = \dfrac{a-1}{ab} \end{cases} \tag{3}$$

显然,当 $a=\dfrac{1}{1-b}$,$b\in(0,1)$ 时,特征值 $\lambda_2|_{E_1}=1$。

通过分析系统[式(1)]在不动点处雅可比矩阵的特征值,可以对该不动点处可能发生的分岔进行预判,这便于后续对分岔存在性进行研究。定理 1 表明,系统在不动点 E_1 处可以发生跨临界分岔。

定理 1　当 $a=\dfrac{1}{1-b}$、$b\in\left(0,\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(\dfrac{2}{3},1\right)$、$m>0$ 时,系统[式(1)]在不动点 E_1 处发生跨临界分岔。在 $\left(E_1,\dfrac{1}{1-b}\right)$ 的小邻域内,当 $a>\dfrac{1}{1-b}$ 时出现稳定不动点 E_2。当 $a>\dfrac{1}{1-b}$ $\left(或\ a<\dfrac{1}{1-b}\right)$ 时,不动点 E_1 不稳定(或稳定)。

证明 对系统[式(1)]做如下可逆变换：

$$\begin{cases} x_n = \tilde{x}_n + \dfrac{b(b-1)}{m+b}\tilde{y}_n + \dfrac{a-1}{a} \\ a = \delta_n + \dfrac{1}{1-b} \\ y_n = \tilde{y}_n \end{cases} \tag{4}$$

式(4)中：$\tilde{x}_n$、$\tilde{y}_n$ 代表系统[式(1)]两个新的状态变量；δ_n 充分小，代表对控制参数 a 的扰动。

则系统[式(1)]变换为

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \delta_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2b-1}{b-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \delta_n \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, \delta_n) \\ 0 \\ g_2(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, \delta_n) \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{cases} g_1(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, \delta_n) = \dfrac{1}{b-1}\tilde{x}_n^2 - \tilde{x}_n\delta_n + e_1\tilde{x}_n\tilde{y}_n + e_2\tilde{y}_n^2 + \\ \qquad e_3\delta_n\tilde{y}_n + O(|\tilde{x}_n| + |\tilde{y}_n| + |\delta_n|)^3 \\ g_2(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, \delta_n) = \dfrac{1}{b-1}\tilde{x}_n\tilde{y}_n + \dfrac{b-1}{m+b}\tilde{y}_n^2 + \\ \qquad \dfrac{(b-1)^2}{b}\tilde{y}_n\delta_n \end{cases} \tag{6}$$

式(6)中：

$$e_1 = \frac{m-(1-m)b}{(m+b)^2};$$

$$e_2 = \frac{[b^2+(2m-1)b-m](1-b)b}{(m+b)^3};$$

$$e_3 = \frac{[2b^3+(3m-2)b^2+(1-3m)b+m](1-b)}{(m+b)^2}。$$

根据中心流形定理[16]，系统[式(5)]有如下中心流形：$W_c(0) = \{(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, \delta_n) \in \mathbf{R}^3 \mid \tilde{x}_n = h(\tilde{y}_n, \delta_n), h(0,0) = 0, Dh(0,0) = 0\}$，其中，$\delta_n$ 足够小，且 D 为一阶微分算子。假设

$$h(\tilde{y}_n, \delta_n) = a_1\tilde{y}_n^2 + a_2\tilde{y}_n\delta_n + a_3\delta_n^2 + O[(|\tilde{y}_n| + |\delta_n|)^3] \tag{7}$$

此时，$h(\tilde{y}_n, \delta_n)$ 必须满足关系式

$$h\{\tilde{y}_n + g_2[h(\tilde{y}_n, \delta_n), \tilde{y}_n, \delta_n], \delta_n\} = \frac{2b-1}{b-1}h(\tilde{y}_n, \delta_n) + g_1[h(\tilde{y}_n, \delta_n), \tilde{y}_n, \delta_n] \tag{8}$$

式(8)中：$g_1(\tilde{x}, \tilde{y}_n, \delta_n)$、$g_2(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, \delta_n)$ 由式(6)求出。将式(5)和式(7)代入式(8)中，得

$$a_1 = \frac{[b^2+(2m-1)b-m](b-1)^2}{(m+b)^3}, a_3 = 0,$$

$$a_2 = \frac{[2b^3+3b^2m-2b^2+(1-3m)b+m](b-1)^2}{(m+b)^2 b}。$$

由此得到式(7)的中心流形，并将系统[式(5)]限制在中心流形上，写成映射的形式为

$$\tilde{y}_{n+1} \mapsto F(\tilde{y}_n, \delta_n) = \tilde{y}_n + \frac{b-1}{m+b}\tilde{y}_n^2 + \frac{(b-1)^2}{b}\tilde{y}_n\delta_n + O[(|\tilde{y}_n| + |\delta_n|)^3] \tag{9}$$

在 $b \in \left(0, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right)$、$m > 0$ 条件下，得到 $\hat{F}(0,0) = 0$，$\frac{\partial \hat{F}(0,0)}{\partial \tilde{y}_n} = 1$，$\frac{\partial^2 \hat{F}(0,0)}{\partial \tilde{y}_n^2} = \frac{2(b-1)}{m+b} < 0$，$\left(-\frac{\partial^2 \hat{F}(0,0)}{\partial \tilde{y}_n^2} \Big/ \frac{\partial^2 \hat{F}(0,0)}{\partial \tilde{y}_n \partial b_*}\right) = \frac{2b}{(1-b)(m+b)} > 0$。

将 E_0 代入式(2)，得到特征值 $\lambda_1|_{E_0} = a$ 和 $\lambda_2|_{E_0} = 0$，当 $a = 1$ 时特征值 $\lambda_1|_{E_0} = 1$。采用类似定理1的证明方法，得到系统在 E_0 发生跨临界分岔的定理2。

定理2 当 $a = 1$ 时，系统[式(1)]在不动点 E_0 处发生跨临界分岔。在 $(E_0, 1)$ 的小领域内，当 $a > 1$ 时出现稳定不动点 E_1。当 $a > 1$（或 $a < 1$）时，不动点 E_0 不稳定（或稳定）。

3 不动点 E_2 和 E_1 处的翻转分岔

为方便后面讨论，定义如下函数曲线：

$$a_1(b) = \frac{1}{1-b}, \quad a_2(b) = \frac{3}{3b-1},$$

$$a_3(b) = \frac{5}{1+b}, \quad a_4(b) = \frac{5}{1-b}。$$

并定义如下平面区域：

$$\begin{cases} D_1: \begin{cases} \dfrac{1}{3} < b < \dfrac{4}{9} \\ a_4(b) < a < a_2(b) \end{cases} \\ D_2: \begin{cases} \dfrac{1}{3} < b < \dfrac{4}{9} \\ a_3(b) < a < a_4(b) \end{cases} \cup \begin{cases} \dfrac{4}{9} < b < \dfrac{2}{3} \\ a_3(b) < a < a_2(b) \end{cases} \end{cases} \tag{10}$$

同时定义：在 $(b, a) \in D_1 \cup D_2$ 范围内有

$$H = 17 + (b^3 - 9b^2 + 5b - 1)a^3 + (37b^2 - 14b + 3)a^2 + (13 - 55b)a \neq 0 \tag{11}$$

将 E_2 代入式(2)，得到特征多项式为

$$F(\lambda) = \lambda^2 + Q\lambda + S \tag{12}$$

式(12)中：

$$Q = \frac{\lambda[ab^2 - 2b + m(a-3)]}{m+b};$$

$$S = \frac{-2b^2a - a(m-1)b + m}{m+b}。$$

将多项式(12)看做以 λ 为变量的二次函数,则:在引理 1 (3) 的条件 $a > a_1(b)$ 和 $b \in (0,1)$ 下,可得 $F(1) = (1-b)a - 1 > 0$。

令

$$m = -\frac{b[(3b-1)a-3]}{a(b+1)-5} \triangleq m_k \tag{13}$$

则有 $F(-1) = 0$,当 $(b,a) \in D_1 \cup D_2 \cup a_4(b)$ 时,有 $m_k > 0$。进一步当 $a \neq a_4(b)$ 时,$S \neq 1$。从而可知,当 $(b,a) \in D_1 \cup D_2$,$m = m_k$ 时,在 E_2 处有 $\lambda_1 = -1$ 和 $\lambda_2 \neq -1 < 1$。下面的定理表明,在此条件下,系统[式(1)]在不动点 E_2 处发生翻转分岔。

定理 3　假设式(11)成立,当 $m = m_k$,$(b,a) \in D_1 \cup D_2$ 时,系统[式(1)]在不动点 E_2 处发生翻转分岔,其中 D_1、D_2 由式(10)给出,H、m_k 分别由式(11)和式(13)给出。

证明　对系统[式(1)]做如下变换:

$$\begin{cases} x_n = \tilde{\chi}_n + \dfrac{b[(b+1)a-5]}{4+(4b-4)a}\tilde{\gamma}_n + b \\ m = \tilde{m}_* + m_k \\ y_n = -\dfrac{[a(b-1)+1]^2}{b[a(b+1)-5]}\tilde{\chi}_n + \tilde{\gamma}_n + \\ \qquad \dfrac{(m+b)[a(1-b)-1]}{b} \end{cases} \tag{14}$$

从而可得

$$\begin{pmatrix} \tilde{\chi}_{n+1} \\ \tilde{m}_* \\ \tilde{\gamma}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(b-1)a+3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_n \\ \tilde{m}_* \\ \tilde{\gamma}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{k}_1(\tilde{\chi}_n,\tilde{\gamma}_n,\tilde{m}_*) \\ 0 \\ \tilde{k}_2(\tilde{\chi}_n,\tilde{\gamma}_n,\tilde{m}_*) \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$\begin{cases} \tilde{k}_1(\tilde{\chi}_n,\tilde{\gamma}_n,\tilde{m}_*) = d_1\tilde{\chi}_n^2 + d_2\tilde{\chi}_n\tilde{m}_* + d_3\tilde{\chi}_n\tilde{\gamma}_n + \\ \qquad d_4\tilde{\gamma}_n\tilde{m}_* + d_5\tilde{\gamma}_n^2 + O[(|\tilde{\chi}_n| + \tilde{\gamma}_n + |\tilde{m}_*|)^3] \\ \tilde{k}_2(\tilde{\chi}_n,\tilde{\gamma}_n,\tilde{m}_*) = d_6\tilde{\chi}_n^2 + d_7\tilde{\chi}_n\tilde{m}_* + d_8\tilde{\chi}_n\tilde{\gamma}_n + \\ \qquad d_9\tilde{\gamma}_n\tilde{m}_* + d_{10}\tilde{\gamma}_n^2 \end{cases} \tag{16}$$

式(16)中:

$$d_1 = \frac{[11+(b^2+4b-1)a^2+6(1-4b)a]}{[5+(b-1)a]b[1+(b-1)a]};$$

$$d_2 = \frac{[a(b+1)-5]^2}{[a(b-1)+1]b[a(b-1)+5]};$$

$$d_3 = \frac{[a(b+1)-5][6+(3b^2+b)a^2+(2-15b)a]}{2[a(b-1)+1]^2[a(b-1)+5]};$$

$$d_4 = \frac{ab(ab+a-5)^2}{2[a(b-1)+1]^2[a(b-1)+5]};$$

$$d_5 = \frac{[a(b+1)-5]^2b[1+(5b^2-2b+1)a^2-2(1+3b)a]}{16[a(b-1)+5][a(b-1)+1]^3};$$

$$d_6 = \frac{[6+2(3b-1)a^2+(2-5b)a][1+(b-1)a]}{[5+(b-1)a][(b+1)a-5]b^2};$$

$$d_7 = \frac{2(a-5)[1+(b-1)a]}{[5+(b-1)a]b^2};$$

$$d_8 = \frac{27+(5b^2+4b-1)a^2+(6-32b)a}{[20+4(b-1)a]b};$$

$$d_9 = \frac{(ab+a-5)^2}{4b[a(b-1)+5]};$$

$$d_{10} = \frac{[21+(5b^2-2b+1)a^2-2(b+3)a][a(b+1)-5]}{16[a(b-1)+1][a(b-1)+5]}。$$

根据中心流形定理[16],系统[式(15)]存在中心流形:$W_c(0) = \{(\tilde{\chi}_n,\tilde{\gamma}_n,\tilde{m}_*) \in \mathbf{R}^3 \mid \tilde{\gamma}_n = h(\tilde{\chi}_n,\tilde{m}_*), h(0,0) = 0, Dh(0,0) = 0\}$。

假设

$$h(\tilde{\chi}_n,\tilde{m}_*) = a_1\tilde{\chi}_n^2 + a_2\tilde{\chi}_n\tilde{m}_* + a_3\tilde{m}_*^2 + O[(|\tilde{\chi}_n| + |\tilde{m}_*|)^3] \tag{17}$$

则中心流形 $h(\tilde{\chi}_n,\tilde{m}_*)$ 必须满足:

$$h\{-\tilde{\chi}_n + \tilde{k}_1[\tilde{\chi}_n, h(\tilde{\chi}_n,\tilde{m}_*), \tilde{m}_*], \tilde{m}_*\} = \frac{(b-1)a+3}{2}h(\tilde{\chi}_n,\tilde{m}_*) + \tilde{k}_2[\tilde{\chi}_n, h(\tilde{\chi}_n,\tilde{m}_*], \tilde{m}_*) \tag{18}$$

式(18)中:$\tilde{k}_1(\tilde{\chi}_n,\tilde{\gamma}_n,\tilde{m}_*)$、$\tilde{k}_2(\tilde{\chi}_n,\tilde{\gamma}_n,\tilde{m}_*)$ 由式(16)给出,比较两端系数可得

$$a_1 = \frac{(4-12b)a^2+(60b-24)a-12}{(a^2b^2-a^2+10a-25)b^2},$$

$$a_2 = \frac{4[1+(-1+b)a](5-a)}{[5+(b-1)a]^2b^2}, a_3 = 0。$$

将系统(15)限制在中心流形上可得

$$\tilde{\chi}_{n+1} \mapsto F(\tilde{\chi}_n,\tilde{m}_*) = -\tilde{\chi}_n + d_2\tilde{\chi}_n\tilde{m}_* + d_1\tilde{\chi}_n^2 + c_1\tilde{\chi}_n^3 - c_2\tilde{\chi}_n^2\tilde{m}_* - c_3\tilde{\chi}_n\tilde{m}_*^2 + O[|(\tilde{\chi}_n,\tilde{m}_*)|^4] \tag{19}$$

式(19)中:d_1、d_2 由式(16)给出,同时

$$c_1 = -\frac{2m_1m_2}{[5+(b-1)a]^2b^2[1+(b-1)a]^2},$$

$$c_2 = \frac{4m_3[(b+1)a-5]}{[5+(b-1)a]^3b^2[1+(b-1)a]^2},$$

$$c_3 = \frac{2(a-5)[a(b+1)-5]^2a}{[5+(b-1)a]^3b[1+(b-1)a]};$$

$$m_1 = (3b^2+b)a^2+(2-15b)a+6,$$

$$m_2 = (3b-1)a^2+3(2-5b)a+3,$$

$$m_3 = 3(b-1)b^2a^4-(15b^3-17b^2-6b+1)a^3-3(2b^2+12b-1)a^2+(30b+13)a-15。$$

当 $(b,a)\in D_1\cup D_2$ 且 $H\neq 0$ 时,可得

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\tilde{\chi}_n\partial\tilde{m}_*}+\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\tilde{m}_*}\frac{\partial^2 F}{\partial\tilde{\chi}_n^2}\right)\Bigg|_{(0,0)}=\frac{[a(b+1)-5]^2}{b[a(b-1)+5][a(b-1)+1]}\neq 0,$$

$$\left(\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 F}{\partial\tilde{\chi}_n^3}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial\tilde{\chi}_n^2}\right)\Bigg|_{(0,0)}=\frac{H}{[5+(b-1)a][1+(b-1)a]^2b^2}\neq 0。$$

式中:D_1、D_2 和 H 分别由式(10)和式(11)式给出,根据文献[17]定理9.5.4,可以得到当 $(b,a)\in D_1\cup D_2$,$m=m_k$ 时,系统[式(1)]在 E_2 处发生翻转分岔。

同理,将 E_1 代入式(2)中可得

$$F(1)|_{E_1}=\frac{(a-1)[1+(b-1)a]}{ab}。$$

由已知 $a>1$ 可知,当 $b\geqslant 1$ 时,$F(1)|_{E_1}>0$。当 $a<a_1(b)$ 和 $0<b<1$ 时,也有 $F(1)|_{E_1}>0$。当 $a=3$ 时,有 $F(-1)|_{E_1}=0$。进一步当 $b\neq-\frac{2}{3}$ 时,有 $S|_{E_1}\neq 1$。这意味着 E_1 处的 $\lambda_1|_{E_1}=-1$ 和 $\lambda_2|_{E_1}\neq-1<1$。采取类似定理3的证明方法,得到如下定理:

定理4 当 $a=3$,$m>0$ 和 $b\geqslant 1$ 时,系统[式(1)]在不动点 E_1 处发生翻转分岔。

4 不动点 E_2 和 E_1 处的分岔控制

在本节采用混合控制策略来控制在 E_2 和 E_1 处产生的翻转分岔,采用状态反馈控制来延迟 E_1 处产生的跨临界分岔。对系统[式(1)]使用混合控制策略,得到控制系统为

$$\begin{cases}x_{n+1}=\alpha\left[ax_n(1-x_n)-\dfrac{x_n}{m+x_n}x_ny_n\right]+(1-\alpha)x_n\\ y_{n+1}=\alpha\left(\dfrac{1}{b}x_ny_n\right)+(1-\alpha)y_n\end{cases}\tag{20}$$

式(20)中:$0<\alpha<1$。控制系统[式(20)]与原始系统[式(1)]有相同的不动点。系统[式(1)]将在 $\alpha=1$ 时与控制系统[式(20)]重合。通过计算,得到 E_2 处的雅可比矩阵为

$$\tilde{\boldsymbol{J}}=\begin{pmatrix}\dfrac{[1+(1-a)\alpha]m-ab^2\alpha+b}{m+b} & -\dfrac{\alpha b^2}{m+b}\\ -\dfrac{[1+(b-1)a](m+b)\alpha}{b^2} & 1\end{pmatrix}。$$

$\tilde{\boldsymbol{J}}$ 的特征多项式为

$$\tilde{F}(\lambda)=\lambda^2+\tilde{Q}\lambda+\tilde{S}\tag{21}$$

式(21)中:

$$\tilde{Q}=\frac{[(a-1)\alpha-2]m+ab^2\alpha-2b}{m+b};$$

$$\tilde{S}=-\{(m+b)[a(b-1)+1]\alpha^2+[ab^2+(a-1)m]\alpha-b-m\}/(m+b)。$$

当 $(b,a)\in D_1\cup D_2$ 和 $0<\alpha<1$ 时,为简化后续表示,记

$$\begin{cases}k=1+(b-1)a<0\\ p=k\alpha^2+2(a-1)\alpha-4\\ \alpha_1=\dfrac{1-a+\sqrt{a^2+4ab-6a+5}}{k}\in(0,1)\\ \alpha_2=\dfrac{4}{-k}\begin{cases}<1, & (b,a)\in D_1\\ >1, & (b,a)\in D_2\end{cases}\\ \alpha_0=\sqrt{\alpha_2}=\dfrac{2}{\sqrt{-k}}\begin{cases}<1, & (b,a)\in D_1\\ >1, & (b,a)\in D_2\end{cases}\\ G=16+k^2\alpha^4+2k(a-1)\alpha^3+\\ \quad 4[(1-2b)a+a^2b-1]\alpha^2-16a\alpha b\end{cases}\tag{22}$$

当 $(b,a)\in D_1\cup D_2$,显然 $a>a_3(b)$,从而可得

$$\alpha_1-\alpha_2=\frac{5-a+\sqrt{a^2+4ab-6a+5}}{k}<0。$$

令

$$\begin{aligned}\tilde{H}=&\ 32+k^3\alpha^6+2(a-1)k^2\alpha^5+\\ &2(a^2-2ab-1)k\alpha^4-4(a-1)\times\\ &[(2b^2-b)a^2+(2b-1)a+1]\alpha^3+\\ &[(4b^2-b)a^2+ab]8\alpha^2+\\ &16[(1-4b)a-1]\alpha\neq 0\end{aligned}\tag{23}$$

由于 $\tilde{F}(1)=-\alpha^2[1+(b-1)a]$,在引理1(3)的条件 $a>a_1(b)$ 和 $b\in(0,1)$ 下,有 $\tilde{F}(1)>0$。当 $(b,a)\in D_1\cup D_2$,$\alpha\in(0,\alpha_1)\cup(\alpha_1,1)$ 时,令

$$m=-\frac{(p+2k\alpha)b}{p}\triangleq m_t\tag{24}$$

在此条件下,易知 $\tilde{F}(-1)=0$,并有 $m_t-m_k=\frac{2bk(\alpha-1)}{ab+a-5}\frac{4+k\alpha}{p}$,其中 m_k 由式(13)求出。

由式(22)及 α_1 与 α_2 的大小关系可得

$$m_t\begin{cases}<m_k, & \alpha\in(0,\alpha_1),(b,a)\in D_1\cup D_2\text{ 或}\\ & \alpha\in(\alpha_2,\alpha_0)\cup(\alpha_0,1),(b,a)\in D_1\\ >m_k, & \alpha\in(\alpha_1,\alpha_2),(b,a)\in D_1\text{ 或}\\ & \alpha\in(\alpha_1,1),(b,a)\in D_2\end{cases}\tag{25}$$

在式(25)条件下,可得 $\tilde{S}-1=-2-\frac{1}{2}k\alpha^2\neq 0$。这意味着 E_2 处的 $\lambda_1|_{E_2}=-1$ 和 $\lambda_2|_{E_2}\neq-1<1$,此时式(19)在 E_2 处可能发生翻转分岔。

定理 5　假设式(23)成立,则当 $\alpha \in (0,\alpha_1) \cup (\alpha_1,1)$, $(b,a) \in D_1 \cup D_2$, $m = m_t$ 时, 控制系统[式(20)]在不动点 E_2 处发生翻转分岔, 其中 D_1、D_2 由式(10)给出。当 $\alpha \in (0,\alpha_1)$, $(b,a) \in D_1 \cup D_2$, 或者 $\alpha \in (\alpha_2,\alpha_0) \cup (\alpha_0,1)$, $(b,a) \in D_1$ 时, 有 $m_t < m_k$, 此时控制系统使 E_2 处的翻转分岔提前发生;当 $\alpha \in (\alpha_1,\alpha_2)$,$(b,a) \in D_1$ 或者 $\alpha \in (\alpha_1,1)$,$(b,a) \in D_2$ 时,有 $m_t > m_k$,此时控制系统使 E_2 处的翻转分岔延迟发生,其中 α_0 、α_1 、α_2 由式(22)给出, m_k 和 m_t 分别由式(13)和式(24)给出。

证明 对系统 (20) 做如下变换

$$\begin{cases} x_n = \zeta_n + \dfrac{bp}{4k}\eta_n + b \\ m = \theta_n + m_t, \\ y_n = -\dfrac{\alpha^2 k^2}{bp}\zeta_n + \eta_n - \dfrac{(m+b)k}{b} \end{cases} \tag{26}$$

式(26)中: ζ_n、η_n 为系统[式(20)]两个新的状态变量; θ_n 充分小,表示对控制参数 m 的扰动;系统参数 k、p 由式(22)给出, 通过式(26), 式(20)被改写为

$$\begin{pmatrix} \zeta_{n+1} \\ \theta_{n+1} \\ \eta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2+k\alpha^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_n \\ \theta_n \\ \eta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1(\zeta_n,\theta_n,\eta_n) \\ 0 \\ w_2(\zeta_n,\theta_n,\eta_n) \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$\begin{cases} w_1(\zeta_n,\theta_n,\eta_n) = d_{11}\zeta_n^2 + d_{12}\zeta_n\theta_n + d_{13}\zeta_n\eta_n + d_{14}\eta_n\theta_n + \\ \qquad d_{15}\eta_n^2 + O[(|\zeta_n| + |\eta_n| + |\theta_n|)^3] \\ w_2(\zeta_n,\theta_n,\eta_n) = d_{16}\zeta_n^2 + d_{17}\zeta_n\theta_n + d_{18}\zeta_n\eta_n + d_{19}\eta_n\theta_n + \\ \qquad d_{20}\eta_n^2 + O[(|\zeta_n| + |\eta_n| + |\theta_n|)^3] \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} d_{11} = \dfrac{G}{\alpha bk(4+k\alpha^2)} \\ d_{12} = \dfrac{p^2}{\alpha bk(4+k\alpha^2)} \\ d_{13} = \dfrac{p\{8 + k^2\alpha^4 + [(2b^2 - b - 1)a^2 + (b+2)a - 1]\alpha^3)}{2\alpha k^2(4+k\alpha^2)} + \\ \qquad \dfrac{p\{[4a^2b + (6-10b)a - 6]\alpha^2 + 4[1-(2b+1)a]\alpha\}}{2\alpha k^2(4+k\alpha^2)} \\ d_{14} = \dfrac{(k\alpha + a - 1)p^2}{2k^2(4+k\alpha^2)} \\ d_{15} = \dfrac{\{k^2\alpha^3 + 4abk\alpha^2 + [4a^2b - 8 + (8-12b)a]\alpha - 8a + 8\}bp^2}{16k^3(4+k\alpha^2)} \\ d_{16} = \dfrac{2\alpha\{8 + k(a-1)\alpha^3 + [2a^2b - 4 + (4-6b)a]\alpha^2 - 8a\alpha b\}k}{pb^2(4+k\alpha^2)} \\ d_{18} = \dfrac{32\alpha + k^2\alpha^5 + [(4b^2 - 2b - 2)a^2 + (2b+4)a - 2]\alpha^4}{4b(4+k\alpha^2)} \\ d_{17} = \dfrac{2\alpha k[(a-1)\alpha - 4]}{b^2(4+k\alpha^2)} \\ d_{19} = \dfrac{\alpha p^2}{4b(4+k\alpha^2)} \\ d_{20} = \dfrac{\{16 + k^2\alpha^4 + 4abk\alpha^3 + 4[a^2b - 1 + (1-2b)a]\alpha^2 + 8(1-a)\alpha\}\alpha p}{16k(4+k\alpha^2)} \end{cases} \tag{29}$$

式(29)中: k、p、G 由式(22)给出。

根据中心流形定理[16], 系统[式(27)]存在中心流形 $W_c(0) = \{(\zeta_n,\theta_n,\eta_n) \in \mathbf{R}^3 \mid \eta_n = h(\zeta_n,\theta_n), h(0,0) = 0, Dh(0,0) = 0\}$。

假设 θ_n 足够小,有

$$h(\zeta_n,\theta_n) = a_1\zeta_n^2 + a_2\zeta_n\theta_n + a_3\theta_n^2 + O[(|\zeta_n| + |\theta_n|)^3] \tag{30}$$

此时中心流形 $h(\zeta_n,\theta_n)$ 必须满足关系式

$$h\{-\zeta_n + w_1[\tilde{\chi}_n, h(\zeta_n,\theta_n),\theta_n],\theta_n\} = \frac{2+k\alpha^2}{2} \times \{h(\zeta_n,\theta_n) + w_2[\zeta_n, h(\zeta_n,\theta_n),\theta_n],\theta_n\} \tag{31}$$

式(31)中: $w_1(\zeta_n,\theta_n,\eta_n)$、$w_2(\zeta_n,\theta_n,\eta_n)$ 由式(28)给出。将式(27)和式(30)代入式(31)中, 得到

$$a_1 = \{-4k(a-1)\alpha^3 + [16 - 8a^2b + (24b - 16)a]\alpha^2 + 32ab\alpha - 32\} / \{\alpha[k\alpha^2 + 2(a-1)\alpha - 4](4+k\alpha^2)b^2\};$$

$a_2 = \{4\alpha k[4 + (1 - a)\alpha]\}/[(4 + k\alpha^2)^2 b^2]$;

$a_3 = 0$。

由此得到式(30)的中心流形，并将系统[式(27)]限制在中心流形可得

$$\zeta_{n+1} \mapsto F(\zeta_n, \theta_n) = -\zeta_n + d_{11}\zeta_n^2 + d_{12}\zeta_n\theta_n - 2c_4\zeta_n^3 + 4c_5\zeta_n^2\theta_n - 2c_6\zeta_n\theta_n^2 + O[|(\zeta_n, \theta_n)|^4] \tag{32}$$

式(32)中：d_{11} 和 d_{12} 由式(29)给出，同时

$c_4 = \dfrac{m_4 m_5}{(k\alpha^2 + 4)^2\alpha^2 k^2 b^2}$;$c_5 = \dfrac{m_6[k\alpha^2 + (2a - 2)\alpha - 4]}{(4 + k\alpha^2)^3\alpha k^2 b^2}$;

$c_6 = \{\alpha[k\alpha^2 + (2a - 2)\alpha - 4]^2[\alpha(a - 1) - 4](k\alpha + a - 1)[(4 + k\alpha^2)^3 k b^2]^{-1}$;

$m_4 = 8 + (a - 1)k\alpha^3 + 2[a^2 b + (2 - 3b)a - 2]\alpha^2 - 8ab\alpha$;

$m_5 = 8 + k^2\alpha^4 + [(2b^2 - b - 1)a^2 + (b + 2) \times a - 1]\alpha^3 + 2[2a^2 b + (3 - 5b)a - 3]\alpha^2 + 4[(1 - 2b) \times a + 1]\alpha$;

$m_6 = (a - 1)k^3\alpha^6 + [(2b + 1)a^2 + 2(1 - 3b)a - 3]k^2\alpha^5 + k[3a^3 b + (5 - 8b^2 - 3b)a^2 - 10a + 5]\alpha^4 - 4k[3ba^2 + (2 - 5b)a - 2]\alpha^3 + 4[a^3 b - 2a^2 + (4 - b) \times a - 2]\alpha^2 - 16ab(a - 1)\alpha + 16(a - 1)$。

由条件 $(b, a) \in D_1 \cup D_2$ 和 $0 < \alpha < 1$ 和式(23)、式(25)可得

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\tilde{\chi}_n \partial\tilde{m}_*} + \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\tilde{m}_*}\frac{\partial^2 F}{\partial\tilde{\chi}_n^2}\right)\bigg|_{(0,0)} = \frac{p^2}{bk(4 + k\alpha^2)\alpha} \neq 0,$$

$$\left[\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 F}{\partial\tilde{\chi}_n^3} + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial\tilde{\chi}_n^2}\right)\right]\bigg|_{(0,0)} = \frac{\tilde{H}}{b^2 k^2(4 + k\alpha^2)\alpha^2} \neq 0。$$

式中：D_1、D_2 和 k、p 分别由式(10)和式(22)给出，$\tilde{H}$ 由式(23)给出。从而当 $m = m_t$ 时，控制系统[式(20)]在 E_2 处发生翻转分岔。又根据式(25)可得 m_t 与 m_k 的大小关系，从而定理得证。

同理，将 E_1 代入式(19)中，由已知 $a > 1$，在条件 $a < a_1(b)$ 下可得

$$F(1)|_{E_1} = \frac{(a - 1)[(b - 1)a + 1]\alpha^2}{ab} > 0。$$

当 $a = \dfrac{2 + \alpha}{\alpha}$ 时有 $\tilde{F}(-1)|_{E_1} = 0$。当 $b \neq \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 - 4}$ 可得到 $\tilde{S}|_{E_1} \neq 1$。这意味着 E_1 处的 $\lambda_1|_{E_1} = -1$ 和 $\lambda_2|_{E_1} \neq -1$，系统[式(20)]在 E_1 处可能发生翻转分岔。

由于类似定理5的证明方法，省略以下定理的证明过程。

定理6 当 $a = \dfrac{\alpha + 2}{\alpha}$，$m > 0$，且 $b \neq \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 - 4}$ 时，控制系统[式(20)]在不动点 E_1 处发生翻转分岔。由 $\dfrac{\alpha + 2}{\alpha} > 3$，可知控制系统使在 E_1 处的翻转分岔延迟发生。

下面通过状态反馈控制来控制 E_1 处的跨临界分岔。表达式为

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) - \dfrac{x_n}{m + x_n}x_n y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{b}x_n y_n + \beta\left(x - \dfrac{a - 1}{a}\right) \end{cases} \tag{33}$$

式(33)中：x_n、y_n 分别代表食饵与捕食者在时间等于 n 时的种群数量，参数 $0 < \beta < 1$。

显然当 $\beta = 0$ 时式(33)和式(1)相同，且式(33)与式(1)有着相同不动点 $E_1\left(\dfrac{a - 1}{a}, 0\right)$。

利用相同的方法将 E_1 代入式(33)的雅可比矩阵，并得到特征多项式为

$$F = \lambda^2 + \frac{\lambda[a^2 b - (2b + 1)a + 1]}{ab} - \frac{(a - 1)[(m + 1)a^2 + (-b\beta - 2m - 3)a + b\beta + 2]}{ba[a(m + 1) - 1]}。$$

令 $a = -\dfrac{\sqrt{\Delta} + b\beta - b + m + 2}{2(m + 1)(b - 1)} \triangleq a_k$，其中：$\Delta = b^2\beta^2 + 2b[(2m + 1)b - m]\beta + (b + m)^2 > 0$，则有 $F(1) = 0$。

由 $\Delta - [(\beta - 1)b - m]^2 = 4b^2\beta(m + 1) > 0$，知 $a_k - \dfrac{1}{1 - b} = \dfrac{\sqrt{\Delta} + \beta b - b - m}{(2m + 2)(1 - b)} > 0$。

由于证明方法与定理1类似，省略以下定理的证明过程。

定理7 当 $a = a_k$ 时，控制系统[式(33)]在不动点 E_1 处发生跨临界分岔。由 $a_k > \dfrac{1}{1 - b}$ 可知控制系统使在 E_1 处的跨临界分岔延迟发生。

5 数值模拟

在本节中，通过数值模拟二维分岔图和时间序列图来说明与上述理论的一致性。

例5.1 取 $b = 0.5$，$m = 2$，$a = \dfrac{1}{1 - b} = 2$。根据定理1，系统[式(1)]在 E_1 处发生跨临界分岔。如图1所示，在 $a < 2$（或 $a > 2$）时 E_1 稳定(不稳定)。

例5.2 取 $a = 4$，$b = 0.5$，$m = m_k = 0.5$。根据定理3，系统[式(1)]在 E_2 处发生翻转分岔。如图2所示，在 $0.3 < m < 0.5$ 时 E_2 是稳定的，当 $m = 0.5$ 时，在 E_2 处发生翻转分岔。当 $m > 0.5$ 时 E_2 处发生稳定的周期-2分岔，并在之后发生周期-4分岔到最后产生混沌。图3为与之对应的最大李雅普诺夫指数图。

例 5.3　取 $b=2, m=3, a=3$。根据定理4,系统[式(1)]在不动点 E_1 处发生翻转分岔。如图 4 所示,在 $2.5<a<3$ 时 E_1 是稳定的,当 $a=3$ 时,在 E_1 处发生翻转分岔。当 $a>3$ 时 E_1 处发生稳定的周期-2 分岔,并在之后发生周期-4 分岔到最后产生混沌。

例 5.4　在 $a=4, b=0.5$ 的参数条件下,取 $\alpha=0.8$, $m=m_t=4.5$,则控制系统在 E_2 处满足定理 5 的条件 $\alpha\in(\alpha_1,1)$, $(b,a)\in D_2$。图 5 显示在此条件下,例 5.2 中图 2 发生的翻转分岔得到有效控制,系统在同样的参数区间内是稳定的。

例 5.5　取 $b=0.5, m=2, a=2, \beta=0.8$。根据定理 7,例 5.1 中发生的跨临界分岔将得到有效控制。图 6 显示对应于图 1 的跨临界分岔得到控制,在同样的参数范围内,跨临界分岔消失。

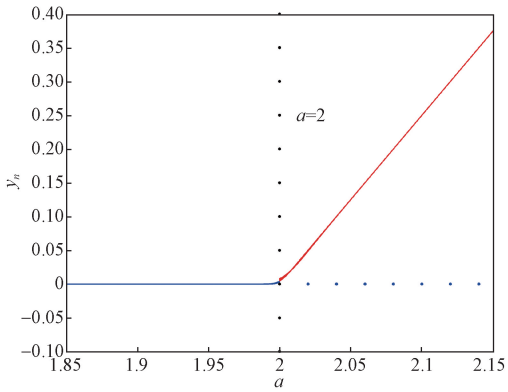

图 1　在 a-y_n 平面上的跨临界分岔图

Fig. 1　Transcritical bifurcation diagram in a-y_n plane

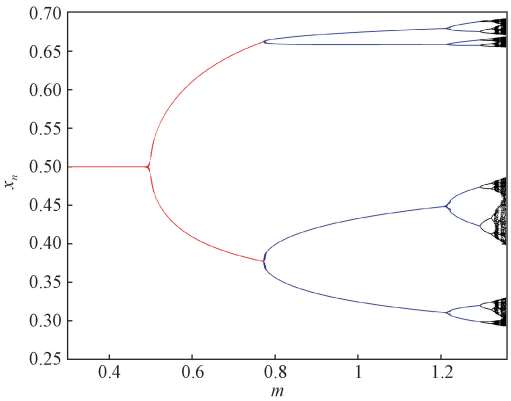

图 2　在 m-x_n 平面上的翻转分岔

Fig. 2　Flip bifurcation diagram in m-x_n plane

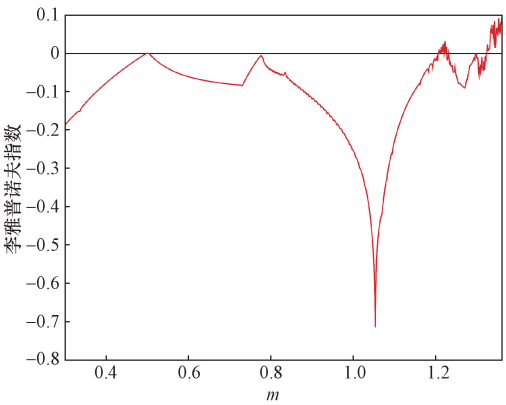

图 3　对应于图 2 的最大李雅普诺夫指数

Fig. 3　Maximum Lyapunov exponents corresponding to Fig. 2

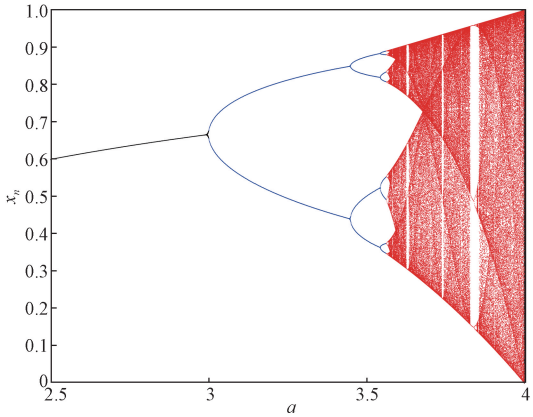

图 4　在 a-x_n 平面上的翻转分岔

Fig. 4　Flip bifurcation diagram in a-x_n plane

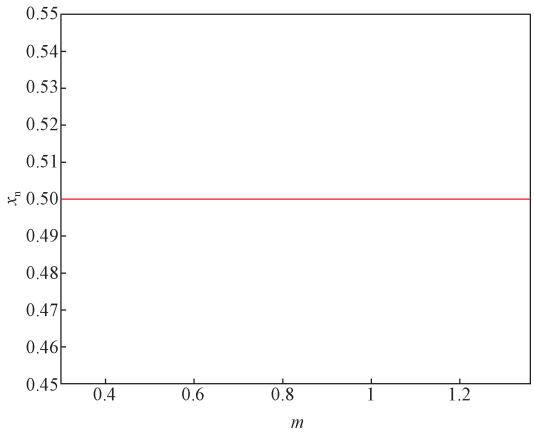

图 5　对应于图 2 的分岔控制图

Fig. 5　The control bifurcation diagram corresponding to Fig. 2

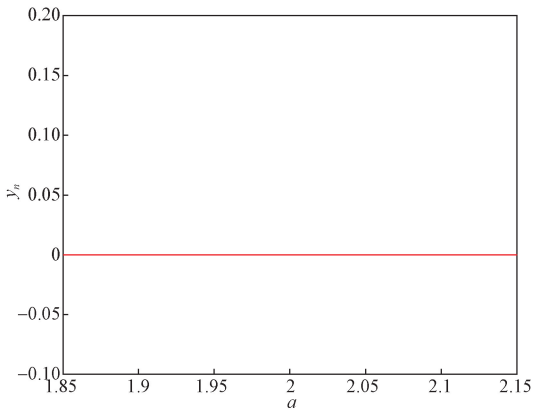

图 6　对应于图 1 的分岔控制图

Fig. 6　The control bifurcation diagram corresponding to Fig. 1

6 结论

结合分岔理论及控制理论的相关知识,研究了一类食饵具有 Allee 效应的离散捕食-被捕食系统的分岔及控制,得到如下主要结论。

(1) 研究了该系统在 E_1 和 E_0 处发生跨临界分岔的条件。根据定理 1, 当 $a = \frac{1}{1-b}$ 时, 系统[式(1)]在边界点 E_1 处发生跨临界。根据生物学意义, 在没有捕食者的情况下, 在增长率 $a < \frac{1}{1-b}$ 时食饵种群稳定;当增长率继续增加到 $a = \frac{1}{1-b}$ 时,食饵种群就会通过"物竞天择"的方式出现其天敌,使系统达到新的不动点 E_2 。

(2) 考虑到正不动点 E_2 更具有生物学意义,探讨了系统在 E_2 处发生的翻转分岔的条件、并给出证明。根据定理 3 可知, 在适当的 Allee 效应下,系统是稳定的,但 Allee 效应超过临界值 m_k ,系统会发生二倍周期的翻转分岔。例 5.2 中的图 2,图 3 表明,Allee 效应继续增加,则系统将通过倍周期的翻转分岔通往混沌。

(3)在种群生物学中,分岔可能会给种群的生存带来不利影响,妨害种群的稳定。因而利用状态反馈法控制跨临界分岔、利用混合策略控制翻转分岔。例5.4 的图5 与例5.5 的图6,进一步表明理论分析与数值模拟的一致性。

参 考 文 献

[1] Akhtar S, Gazi N H, Sarwardi S. Mathematical modelling and bifurcation analysis of an eco-epidemiological system with multiple functional responses subjected to Allee effect and competition[J]. Results in Control and Optimization, 2024, 15: 100421.

[2] Arim M, Herrera-Esposito D. Contact tracing-induced Allee effect in disease dynamics [J]. Journal of Theoretical Biology, 2022, 542: 111109.

[3] 焦乐, 孙涛, 杨薇, 等. 滨海湿地植物种群 Allee 效应驱动机制研究进展[J]. 生态学报, 2022, 42(2): 423-432.
Jiao Le, Sun Tao, Yang Wei, et al. New advances in driving mechanisms of Allee effect in plant population in coastal wetland [J]. Acta Ecologica Sinica, 2022, 42(2): 423-432.

[4] 徐晓雯, 潘超红. Allee 效应对晶格河流模型的速度选择的影响[J]. 南华大学学报, 2023, 37(6): 75-80.
Xu Xiaoxia, Pan Chaohong. Allee effect on speed selection for lattice river model [J]. Journal of University of South China, 2023, 37(6): 75-80.

[5] Dong Y Q, Chen S Y, Dai B X. Dynamical analysis of a toxic-phytoplankton-zooplankton model with chemotaxis and Allee effects [J]. Mathematical Theory and Applications, 2023, 43(4): 1-28.

[6] Qurban M, Khaliq A. Dynamics and control of a plant-herbivore model incorporating Allee's effect [J]. Heliyon, 2024, 10: e30754.

[7] Song D, Song Y, Li C. Stability and turing patterns in a predator-prey model with hunting cooperation and Allee effect in prey population[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2020, 30(9): 2050137.

[8] Chen L, Yang F, Song Y. Stability and turing patterns of a predator-prey model with Holling type II functional response and Allee effect in predator[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 2023, 39(3): 675-695.

[9] Bi Z, Liu S, Ouyang M. Spatial dynamics of a fractional predator-prey system with time delay and Allee effect[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2022, 162: 112434.

[10] Zhang L M, Xu Y K, Liao G Y. Codimension-two bifurcations and bifurcation controls in a discrete biological system with weak Allee effect[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2022, 32(3): 2250036.

[11] Zhang L M, Wang T. Qualitative properties, bifurcations and chaos of a discrete predator-prey system with weak Allee effect on the predator [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2023, 175: 113995.

[12] Chen J, Chen Y, Zhu Z, et al. Stability and bifurcation of a discrete predator-prey system with Allee effect and other food resource for the predators[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2023, 69(1): 529-548.

[13] 王靖岳, 刘宁, 王浩天. 干摩擦对行星齿轮传动系统分岔特性的影响分析[J]. 科学技术与工程, 2020 20(22): 8464-8969.
Wang Jingyue, Liu Ning, Wang Haotian. Analysis of the influence of friction on bifureat ion characteristics of planetary gear transmission system [J]. Science Technology and Engineering, 2020, 20(22): 8964-8969.

[14] 谢玲玲, 杨雨晴, 姚浚义, 等. 基于预估-校正算法的分数阶 Boost 变换器倍周期分岔研究[J]. 电源学报, 2024, 22(2): 10-18.
Xie Lingling, Yang Yuqing, Yao Junyi, et al. Research on period-doubling bifurcation of fractional-order Boost converter based on predictor-corrector algorithm [J]. Journal of Electric Power, 2024, 22(2): 10-18.

[15] Kangalgil F. Neimark-Sacker bifurcation and stability analysis of a discrete-time prey-predator model with Allee effect in prey[J]. Advances in Difference Equations, 2019, 2019: 92.

[16] Carr J. Applications of centre manifold theory [M]. Beilin: Spring-Verlag, 1991.

[17] Wiggins S, Golubitsky M. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos[M]. Beilin: Springer, 2003.