基于投影和交叉熵的 Picture 模糊多属性群决策方法

李亚娟[1]，范建平[2]，吴美琴[2]

（1. 山西电子科技学院经济与管理学院，山西 临汾 041000；2. 山西大学经济与管理学院，太原 030006）

摘要： 针对方案属性值为 Picture 模糊数(Picture fuzzy numbers，PFN)的多属性群决策(multiple attributes group decision making，MAGDM)问题，提出一种基于投影法和交叉熵的 Picture 模糊多属性群决策方法。将投影法引入 Picture 模糊多属性群决策中求出专家的权重，利用交叉熵求出各专家对应的各方案与理想方案的加权对称差异信息测度值，然后根据专家权重对其进行集结求出各方案与理想方案的加权对称差异信息测度值进而排序得出最优方案。最后通过企业资源计划(ERP)系统的选择表明该方法的可行性和有效性。

关键词： Picture 模糊集；多属性群决策；投影法；交叉熵

中图分类号： C934　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1671－1807(2025)10－0018－07

Zadeh[1] 于 1965 年提出模糊集(fuzzy set，FS)理论，用隶属度来表达决策信息的不确定性和模糊性。然而，仅用隶属度来表达模糊性是不全面的，因此 Atanassov[2] 将其扩展到直觉模糊集(intuitionistic fuzzy set，IFS)，提出同时用隶属度、非隶属度和犹豫度来表达模糊信息。尽管如此，在现实生活中，由于决策环境变得越来越复杂，仅用隶属度、非隶属度及犹豫度来表达决策信息是不够的，这样可能会造成一部分信息的丢失。比如，在一次投票选举中，选民既可以给候选者投出支持的一票，也可以放弃给候选者投票，还可以给候选者投出反对票，同时还可以拒绝给其投票。这时如果仅用直觉模糊集中的隶属度、非隶属度及犹豫度来表达这部分信息，就会造成一部分信息没有得到充分利用。因此，寻找一种更准确、更全面地表达认知信息的方式就显得尤为重要。Guong[3] 研究了 Picture 模糊集(Picture fuzzy sets，PFS)及其一些运算和属性。PFS 能够同时表达正隶属度、中性隶属度、负隶属度及拒绝隶属度信息，能更好地表达涉及支持、弃权、反对及拒绝四种类型的人类认知行为，在处理不确定性和模糊性方面更具灵活性和实用性。

针对方案属性值为 Picture 模糊数的多属性决策问题，Wei 等[4] 引进 Picture 模糊理想点的概念并提出一种投影模型，根据各方案与理想方案的相似度对方案排序从而选出最优方案，在后续又提出 Picture 模糊加权交叉熵对方案进行排序[5]。Liu 和 Zhang[6] 提出一种新的 Picture 模糊语言聚合算子并在群决策中得到很好的应用。龙慧丰和罗敏霞[7] 提出图片模糊 Frank 加权平均聚合算子和图片模糊 Frank 加权几何聚合算子用于解决多属性决策问题。韩二东[8] 提出一种基于 Picture 模糊熵和 Picture 模糊加权对称交叉熵的多属性决策方法。王磊和姚星娜[9] 针对现有 Picture 模糊距离的不足，构建一种带有反映决策者态度偏好参数的 Picture 模糊距离。Yuan 等[10] 在 Picture 模糊环境下，基于 Jensen-Shannon 散度提出一种新的距离测度，并基于新的距离测度和逼近理想解妥协排序法(CRADIS)提出一种新的图片模糊环境下的多属性决策(MADM)方法。吴孝宇等[11] 通过构建得分函数来对多属性群决策问题进行研究。

在群决策中，专家权重的确定一直是学者们研究的重点内容。李泽欣等[12] 同时考虑犹豫度和共识度，基于概率分布的模糊语言环境，提出一种专家权重的确定方法。张毅等[13] 通过数据势理论来确定专家的权重。王志平等[14] 提出基于累积前景理论和多准则妥协解排序(VIKOR)的多属性群决策方法，利用群体一致性原则来确定决策者的权

收稿日期： 2024-11-14

作者简介： 李亚娟(1995—)，女，山西临汾人，硕士，助教，研究方向为决策科学与技术；范建平(1975—)，男，山西武乡人，博士，教授，研究方向为决策科学与技术；吴美琴(1980—)，女，山西太原人，博士，副教授，研究方向为决策科学与技术。

重。投影法也可以用来确定专家的权重，其不仅考虑到两个元素间的距离还考虑到两个元素间的夹角，因此在模糊环境中得到广泛的应用。Yue 和 Jia[15] 提出一种基于新的标准化投影的群决策模型。Liang 等[16] 提出一种基于几何 Bonferroni 均值 Pythagorean 模糊多准则群决策投影模型。林原等[17] 提出一种基于加权双向投影的专家权重确定方法。吴波等[18] 将博弈论组合赋权与灰色关联投影法进行耦合并将其用于山岭隧道突涌水风险分析中。

熵是一种衡量不确定信息的有用工具[19]。自 Luca 和 Termini[20] 引入模糊熵衡量模糊集间的差异度。Bhandari 和 Pal[21] 定义了一种新的衡量模糊集间差异度的方法——交叉熵。此后，交叉熵在 Vague 集[22]、犹豫模糊集[23]、直觉模糊集[24]、区间直觉模糊集[25] 中得到广泛应用。但其在 PFS 中的应用较少，另外在当前的研究趋势下，对 Picture 聚合算子以及属性权重已知条件下的决策问题研究已经取得了显著进展，相比之下，对群体决策问题研究却显得相对匮乏。群体决策是一个复杂而多维的过程，其涉及多个决策者的意见、偏好和判断。在现实中，许多重要决策都需要通过群体讨论和协商来达成，因此，对群体决策问题的深入研究具有重要的理论和实践意义。鉴于此，本文提出一种基于投影法和交叉熵的 Picture 模糊多属性群决策方法，利用各专家的正隶属度矩阵、中性隶属度矩阵及负隶属度矩阵分别在群体的正隶属度矩阵、中性隶属度矩阵及负隶属度矩阵上的投影来确定专家的权重，充分考虑并利用专家和群体的正隶属度矩阵、中性隶属度矩阵及负隶属度矩阵信息，提高专家权重的科学性与可靠性。其次，利用交叉熵在求出各专家对应的各方案与理想方案的加权对称差异信息测度值基础上，根据投影法求得的专家权重对不同专家对应的同一方案与理想方案的加权对称差异信息测度值进行集结。最后，根据集结后的各方案与理想方案的加权对称差异信息测度值排序从而求出最优的方案。

1 相关概念

1.1 Picture 模糊集

定义 1[3]：设 X 是给定的论域，则 $A=\{\langle x,\mu_A(x),\eta_A(x),v_A(x)\rangle \mid x\in X\}$ 称为 PFS。其中，$\mu_A(x)\in[0,1]$，表示 X 中的元素 x 属于 X 的正隶属度；$\eta_A(x)\in[0,1]$，表示 X 中的元素 x 属于 X 的中性隶属度，$v_A(x)\in[0,1]$，表示 X 中的元素 x 属于 X 的负隶属度，并且满足 $0\leqslant\mu_A(x)+\eta_A(x)+v_A(x)\leqslant 1,\forall x\in X$。此外，$\pi_A(x)=1-[\mu_A(x)+\eta_A(x)+v_A(x)]$，表示 X 中的元素 x 属于 X 的拒绝隶属度。

为了简便，称 $\gamma=(\mu_\gamma,\eta_\gamma,v_\gamma)$ 为 Picture 模糊数[4]，其中，$\mu_\gamma\in[0,1]$，$\eta_\gamma\in[0,1]$，$v_\gamma\in[0,1]$，$0\leqslant\mu_\gamma+\eta_\gamma+v_\gamma\leqslant 1$。

1.2 投影法

定义 2[26]：设 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 和 $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 是 n 维向量，设定

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\alpha})=|\boldsymbol{\alpha}|\cos(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=|\boldsymbol{\alpha}|\frac{\boldsymbol{\alpha\beta}}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}=\frac{\boldsymbol{\alpha\beta}}{|\boldsymbol{\beta}|}\tag{1}$$

式中：$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\alpha})$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{\beta}$ 上的投影。其中，$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2}$，$|\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2}$，$\boldsymbol{\alpha\beta}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j$。一般来说，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\alpha})$ 越大，表示向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 越接近于向量 $\boldsymbol{\beta}$。

与向量间的投影类似，Yue[27] 给出了矩阵间的投影如下。

定义 3[27]：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是两个 $m\times n$ 的实矩阵，设定

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{A})=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^2}}\tag{2}$$

式中：$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{A})$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在矩阵 $\boldsymbol{B}$ 上的投影。类似的，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{A})$ 越大，表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 越接近于矩阵 $\boldsymbol{B}$。

1.3 Picture 模糊集之间的交叉熵

定义 4[28]：假设 $\alpha[\alpha(x_1),\alpha(x_2),\cdots,\alpha(x_n)]$ 和 $\beta[\beta(x_1),\beta(x_2),\cdots,\beta(x_n)]$ 是论域 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 上的模糊集，α 和 β 的模糊交叉熵定义为

$$h(\alpha,\beta)=\sum_{j=1}^{n}\left\{\alpha(x_j)\ln\frac{\alpha(x_j)}{\frac{1}{2}[\alpha(x_j)+\beta(x_j)]}+[1-\alpha(x_j)]\ln\frac{1-\alpha(x_j)}{1-\frac{1}{2}[\alpha(x_j)+\beta(x_j)]}\right\}\tag{3}$$

式中：$h(\alpha,\beta)$ 为 α 和 β 的差异度。

然而，由于 $h(\alpha,\beta)$ 不具有对称性。所以 Shang 和 Jiang[28] 提出一种对称差异信息测度为

$$I(\alpha,\beta)=h(\alpha,\beta)+h(\beta,\alpha)\tag{4}$$

式中：$I(\alpha,\beta)\geqslant 0$，当且仅当 $\alpha=\beta$ 时 $I(\alpha,\beta)=0$。

于是，模糊集上的交叉熵以及对称差异信息测度扩展到 PFS。假设 $\alpha=(\mu_{\alpha_j},\eta_{\alpha_j},v_{\alpha_j})$ 和 $\beta=(\mu_{\beta_j},\eta_{\beta_j},v_{\beta_j})(j=1,2,\cdots,n)$ 为两个 PFS，Wei[5] 定义了 PFS 之间的交叉熵为

$$C(\alpha,\beta)=\sum_{j=1}^{n}\left[\mu_{\alpha_j}\ln\frac{\mu_{\alpha_j}}{\frac{1}{2}(\mu_{\alpha_j}+\mu_{\beta_j})}+(1-\mu_{\alpha_j})\ln\frac{1-\mu_{\alpha_j}}{1-\frac{1}{2}(\mu_{\alpha_j}+\mu_{\beta_j})}\right]+\sum_{j=1}^{n}\left[\eta_{\alpha_j}\ln\frac{\eta_{\alpha_j}}{\frac{1}{2}(\eta_{\alpha_j}+\eta_{\beta_j})}+(1-\eta_{\alpha_j})\ln\frac{1-\eta_{\alpha_j}}{1-\frac{1}{2}(\eta_{\alpha_j}+\eta_{\beta_j})}\right]+\sum_{j=1}^{n}\left[v_{\alpha_j}\ln\frac{v_{\alpha_j}}{\frac{1}{2}(v_{\alpha_j}+v_{\beta_j})}+(1-v_{\alpha_j})\ln\frac{1-v_{\alpha_j}}{1-\frac{1}{2}(v_{\alpha_j}+v_{\beta_j})}\right]\quad(5)$$

式中：$C(\alpha,\beta)$ 为 α 和 β 的差异度；$i=1,2,\cdots,m$。由于 $C(\alpha,\beta)$ 不具有对称性，所以 Wei[5]将其修改为如下的 PFS 对称差异信息测度。

$$D(\alpha,\beta)=C(\alpha,\beta)+C(\beta,\alpha)\quad(6)$$

式中：α 和 β 的差异越大，$D(\alpha,\beta)$ 就越大。

如果考虑到 α 和 β 的权重，Wei[5]定义的 α 和 β 的 Picture 模糊加权交叉熵测度如式(7)所示。

$$C_{\omega}(\alpha,\beta)=\sum_{j=1}^{n}\omega_j\left[\mu_{\alpha_j}\ln\frac{\mu_{\alpha_j}}{\frac{1}{2}(\mu_{\alpha_j}+\mu_{\beta_j})}+(1-\mu_{\alpha_j})\ln\frac{1-\mu_{\alpha_j}}{1-\frac{1}{2}(\mu_{\alpha_j}+\mu_{\beta_j})}\right]+\sum_{j=1}^{n}\omega_j\left[\eta_{\alpha_j}\ln\frac{\eta_{\alpha_j}}{\frac{1}{2}(\eta_{\alpha_j}+\eta_{\beta_j})}+(1-\eta_{\alpha_j})\ln\frac{1-\eta_{\alpha_j}}{1-\frac{1}{2}(\eta_{\alpha_j}+\eta_{\beta_j})}\right]+\sum_{j=1}^{n}\omega_j\left[v_{\alpha_j}\ln\frac{v_{\alpha_j}}{\frac{1}{2}(v_{\alpha_j}+v_{\beta_j})}+(1-v_{\alpha_j})\ln\frac{1-v_{\alpha_j}}{1-\frac{1}{2}(v_{\alpha_j}+v_{\beta_j})}\right]\quad(7)$$

式中：$i=1,2,\cdots,m$；$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$ 是 α、β 的权重向量，满足 $\omega_j\in[0,1]$，$j=1,2,\cdots,n$，$\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$；$C_{\boldsymbol{\omega}}(\alpha,\beta)$ 为 α 和 β 的差异度，由于其不具有对称性，所以 Wei[5]将修改为如下的 Picture 模糊加权对称差异信息测度。

$$D_{\boldsymbol{\omega}}(\alpha,\beta)=C_{\boldsymbol{\omega}}(\alpha,\beta)+C_{\boldsymbol{\omega}}(\beta,\alpha)\quad(8)$$

式中：α 和 β 的差异越大，$D_{\boldsymbol{\omega}}(\alpha,\beta)$ 就越大。

2 基于投影和交叉熵的 Picture 模糊多属性群决策

假设有 m 个可行的方案 $A_1,A_2,\cdots,A_m$，n 个评价属性 $G_1,G_2,\cdots,G_n$，$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 是属性 $G_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的权重。其中，$\omega_j\in[0,1]$，$j=1,2,\cdots,n$，$\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$，t 个决策专家 $E_1,E_2,\cdots,E_t$。决策专家 $E_k(k=1,2,\cdots,t)$ 对方案 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 在评价属性 $G_j(j=1,2,\cdots,n)$ 下的决策值为 $\mathrm{PFN}(\mu_{ij}^k,\eta_{ij}^k,v_{ij}^k)$。则专家 $E_k(k=1,2,\cdots,t)$ 的 Picture 模糊决策矩阵为

$$\boldsymbol{X}^k=(\mu_{ij}^k,\eta_{ij}^k,v_{ij}^k)_{m\times n}=\begin{bmatrix}(\mu_{11}^k,\eta_{11}^k,v_{11}^k) & (\mu_{12}^k,\eta_{12}^k,v_{12}^k) & \cdots & (\mu_{1n}^k,\eta_{1n}^k,v_{1n}^k)\\(\mu_{21}^k,\eta_{21}^k,v_{21}^k) & (\mu_{21}^k,\eta_{21}^k,v_{21}^k) & \cdots & (\mu_{2n}^k,\eta_{2n}^k,v_{2n}^k)\\\vdots & \vdots & & \vdots\\(\mu_{m1}^k,\eta_{m1}^k,v_{m1}^k) & (\mu_{m2}^k,\eta_{m2}^k,v_{m2}^k) & \cdots & (\mu_{mn}^k,\eta_{mn}^k,v_{mn}^k)\end{bmatrix}\quad(9)$$

接下来给出基于投影和交叉熵的 Picture 模糊多属性群决策过程。

步骤 1：基于投影的 Picture 模糊多属性群决策专家权重的确定。

(1)将专家 $E_k(k=1,2,\cdots,t)$ 的 Picture 模糊决策矩阵 $\boldsymbol{X}^k$ 分为正隶属度矩阵 $\boldsymbol{X}_{\mu}^k$、中性隶属度矩阵 $\boldsymbol{X}_{\eta}^k$ 和负隶属度矩阵 $\boldsymbol{X}_{v}^k$。

$$\boldsymbol{X}_{\mu}^k=\begin{bmatrix}\mu_{11}^k & \mu_{12}^k & \cdots & \mu_{1n}^k\\\mu_{21}^k & \mu_{21}^k & \cdots & \mu_{2n}^k\\\vdots & \vdots & & \vdots\\\mu_{m1}^k & \mu_{m2}^k & \cdots & \mu_{mn}^k\end{bmatrix}\quad(10)$$

$$\boldsymbol{X}_{\eta}^k=\begin{bmatrix}\eta_{11}^k & \eta_{12}^k & \cdots & \eta_{1n}^k\\\eta_{21}^k & \eta_{21}^k & \cdots & \eta_{2n}^k\\\vdots & \vdots & & \vdots\\\eta_{m1}^k & \eta_{m2}^k & \cdots & \eta_{mn}^k\end{bmatrix}\quad(11)$$

$$\boldsymbol{X}_{v}^k=\begin{bmatrix}v_{11}^k & v_{12}^k & \cdots & v_{1n}^k\\v_{21}^k & v_{21}^k & \cdots & v_{2n}^k\\\vdots & \vdots & & \vdots\\v_{m1}^k & v_{m2}^k & \cdots & v_{mn}^k\end{bmatrix}\quad(12)$$

（2）确定所有专家的群体决策矩阵 $\boldsymbol{X}^*$。

$$\boldsymbol{X}^* = (\mu_{ij}^*, \eta_{ij}^*, v_{ij}^*)_{m\times n} = \begin{bmatrix} (\mu_{11}^*, \eta_{11}^*, v_{11}^*) & (\mu_{12}^*, \eta_{12}^*, v_{12}^*) & \cdots & (\mu_{1n}^*, \eta_{1n}^*, v_{1n}^*) \\ (\mu_{21}^*, \eta_{21}^*, v_{21}^*) & (\mu_{21}^*, \eta_{21}^*, v_{21}^*) & \cdots & (\mu_{2n}^*, \eta_{2n}^*, v_{2n}^*) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\mu_{m1}^*, \eta_{m1}^*, v_{m1}^*) & (\mu_{m2}^*, \eta_{m2}^*, v_{m2}^*) & \cdots & (\mu_{mn}^*, \eta_{mn}^*, v_{mn}^*) \end{bmatrix} \tag{13}$$

式中：$\mu_{ij}^* = 1-\sum_{k=1}^{t}(1-\mu_{ij}^k)^{\frac{1}{t}}$；$\eta_{ij}^* = \sum_{k=1}^{t}(\eta_{ij}^k)^{\frac{1}{t}}$；$v_{ij}^* = \sum_{k=1}^{t}(v_{ij}^k)^{\frac{1}{t}}$；$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$。

（3）将群体决策矩阵 $\boldsymbol{X}^*$ 分为正隶属度矩阵 $\boldsymbol{X}_\mu^*$、中性隶属度矩阵 $\boldsymbol{X}_\eta^*$ 和负隶属度矩阵 $\boldsymbol{X}_v^*$。

$$\boldsymbol{X}_\mu^* = \begin{bmatrix} \mu_{11}^* & \mu_{12}^* & \cdots & \mu_{1n}^* \\ \mu_{21}^* & \mu_{21}^* & \cdots & \mu_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{m1}^* & \mu_{m2}^* & \cdots & \mu_{mn}^* \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{X}_\eta^* = \begin{bmatrix} \eta_{11}^* & \eta_{12}^* & \cdots & \eta_{1n}^* \\ \eta_{21}^* & \eta_{21}^* & \cdots & \eta_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta_{m1}^* & \eta_{m2}^* & \cdots & \eta_{mn}^* \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{X}_v^* = \begin{bmatrix} v_{11}^* & v_{12}^* & \cdots & v_{1n}^* \\ v_{21}^* & v_{21}^* & \cdots & v_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{m1}^* & v_{m2}^* & \cdots & v_{mn}^* \end{bmatrix} \tag{16}$$

（4）计算专家 $E_k(k=1,2,\cdots,t)$ 的正隶属度矩阵 $\boldsymbol{X}_\mu^k$ 在群体正隶属度矩阵 $\boldsymbol{X}_\mu^*$ 上的投影、中性隶属度矩阵 $\boldsymbol{X}_\eta^k$ 在群体中性隶属度矩阵 $\boldsymbol{X}_\eta^*$ 上的投影以及负隶属度矩阵 $\boldsymbol{X}_v^k$ 在群体负隶属度矩阵 $\boldsymbol{X}_v^*$ 上的投影。

由式(2)可分别计算出：

①专家 $E_k(k=1,2,\cdots,t)$ 的正隶属度矩阵 $\boldsymbol{X}_\mu^k$ 在群体正隶属度矩阵 $\boldsymbol{X}_\mu^*$ 上的投影为

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{X}_\mu^*}(\boldsymbol{X}_\mu^k) = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}^k\mu_{ij}^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}^{*2}}} \tag{17}$$

②专家 $E_k(k=1,2,\cdots,t)$ 的中性隶属度矩阵 $\boldsymbol{X}_\eta^k$ 在群体中性隶属度矩阵 $\boldsymbol{X}_\eta^*$ 上的投影为

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{X}_\eta^*}(\boldsymbol{X}_\eta^k) = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\eta_{ij}^k\eta_{ij}^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\eta_{ij}^{*2}}} \tag{18}$$

③专家 $E_k(k=1,2,\cdots,t)$ 的负隶属度矩阵 $\boldsymbol{X}_v^k$ 在群体负隶属度矩阵 $\boldsymbol{X}_v^*$ 上的投影为

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{X}_v^*}(\boldsymbol{X}_v^k) = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}v_{ij}^k v_{ij}^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}v_{ij}^{*2}}} \tag{19}$$

（5）计算专家 $E_k(k=1,2,\cdots,t)$ 的决策矩阵 $\boldsymbol{X}^k$ 与群体决策矩阵 $\boldsymbol{X}^*$ 的相似度为

一个专家的决策矩阵越相似于群体决策矩阵，那么这个专家的评价信息是重要的，应被赋予一个较大的权重。反之，一个专家的决策矩阵与群体决策矩阵差异较大，那么这个专家的评价信息是不重要的，应被赋予一个较小的权重。设定

$$E_k(\theta,\lambda) = \theta\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{X}_\mu^*}(\boldsymbol{X}_\mu^k) + \lambda\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{X}_\eta^*}(\boldsymbol{X}_\eta^k) + (1-\theta-\lambda)\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{X}_v^*}(\boldsymbol{X}_v^k) \tag{20}$$

式中：$E_k(\theta,\lambda)$ 为专家 E_k 的决策矩阵 $\boldsymbol{X}^k$ 与群体决策矩阵 $\boldsymbol{X}^*$ 的相似度。其中，θ 和 λ 为偏好度，是一个给定的值，表示领导者对正隶属度矩阵信息以及中性隶属度矩阵信息的偏好度。

（6）计算专家 $E_k(k=1,2,\cdots,t)$ 的权重。

$$E(\theta,\lambda) = \sum_{k=1}^{t}E_k(\theta,\lambda) \tag{21}$$

那么专家 E_k 的权重为

$$\varepsilon_k = \frac{E_k(\theta,\lambda)}{E(\theta,\lambda)} \tag{22}$$

步骤 2：定义理想方案 A^+。

$$A^+ = [(\mu_1^+, \eta_1^+, v_1^+), (\mu_2^+, \eta_2^+, v_2^+), \cdots, (\mu_n^+, \eta_n^+, v_n^+)] \tag{23}$$

式中：$\mu_j^+ = \max_i\{\mu_{ij}^k\}$，$\eta_j^+ = \min_i\{\eta_{ij}^k\}$，$v_j^+ = \min_i\{v_{ij}^k\}$，$j=1,2,\cdots,n$；$k=1,2,\cdots,t$。

步骤 3：求出每个专家 $E_k(k=1,2,\cdots,t)$ 对应的每个方案 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 与理想方案 A^+ 的 Picture 模糊加权对称差异信息测度值 $D_{\boldsymbol{\omega}}^k(A_i, A^+)$。

$$D_{\boldsymbol{\omega}}^k(A_i, A^+) = C_{\boldsymbol{\omega}}^k(A_i, A^+) + C_{\boldsymbol{\omega}}^k(A^+, A_i) \tag{24}$$

式中：

$$C_{\boldsymbol{\omega}}^k(A_i, A^+) = \sum_{j=1}^{n}\omega_j\left[\mu_{ij}^k\ln\frac{\mu_{ij}^k}{\frac{1}{2}(\mu_{ij}^k+\mu_j^+)} + (1-\mu_{ij}^+)\ln\frac{1-\mu_{ij}^k}{1-\frac{1}{2}(\mu_{ij}^k+\mu_j^+)}\right] + \sum_{j=1}^{n}\omega_j\left[\eta_{ij}^k\ln\frac{\eta_{ij}^k}{\frac{1}{2}(\eta_{ij}^k+\eta_j^+)} + \right.$$

$$(1-\eta_{ij}^k)\ln\frac{1-\eta_{ij}^k}{1-\frac{1}{2}(\eta_{ij}^k+\eta_j^+)}\Bigg]+$$

$$\sum_{j=1}^{n}\omega_j\left[v_{ij}^k\ln\frac{v_{ij}^k}{\frac{1}{2}(v_{ij}^k+v_j^+)}+\right.$$

$$\left.(1-v_{ij}^k)\ln\frac{1-v_{ij}^k}{1-\frac{1}{2}(v_{ij}^k+v_j^+)}\right] \tag{25}$$

式中：$i=1,2,\cdots,m$。

步骤4：根据专家权重 $\varepsilon_k(k=1,2,\cdots,t)$ 对每个专家对应的每个方案 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 与理想方案 A^+ 的 Picture 模糊加权对称差异信息测度值 $D_{\boldsymbol{\omega}}^k(A_i,A^+)$ 进行集结。

$$D_{\boldsymbol{\omega}}(A_i,A^+)=\sum_{k=1}^{t}\varepsilon_k D_{\boldsymbol{\omega}}^k(A_i,A^+),\ i=1,2,\cdots,m \tag{26}$$

步骤5：根据每个方案与理想方案的加权对称差异信息测度值 $D_{\boldsymbol{\omega}}(A_i,A^+)$ 进行排序。$D_{\boldsymbol{\omega}}(A_i,A^+)$ 越小，方案 A_i 越好。

3 应用

企业资源计划(ERP)系统在现代企业管理中扮演着至关重要的角色，选择合适的 ERP 系统对企业来说是一个重要的决策过程。现有一家公司计划实施 ERP 系统，有不同公司提供的 4 个系统 $\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ 作为备选方案，邀请 4 位专家 $\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$ 分别在 4 个属性 $\{G_1,G_2,G_3,G_4\}$ 上做出决策，G_1 为技术，G_2 为战略适应性，G_3 为供应商能力，G_4 为供应商声誉，其权重分别为 $(0.25,0.3,0.25,0.2)^{\mathrm{T}}$。专家 $E_k(k=1,2,3,4)$ 利用图片模糊数评估 ERP 系统 $A_i(i=1,2,3,4)$ 在属性 $G_j(j=1,2,3,4)$ 上的特征。专家 $E_k(k=1,2,3,4)$ 的评估结果如表1～表4所示的 Picture 模糊决策矩阵 $\boldsymbol{X}^k$。

步骤1：基于投影的 Picture 模糊多属性群决策专家权重的确定。

根据前边的步骤1可求出四位专家的权重分别为(这里取领导者对正隶属度矩阵信息以及中性隶属度矩阵信息的偏好度分别为 0.5、0.3)：$\varepsilon_1=0.239,\varepsilon_2=0.255,\varepsilon_3=0.260,\varepsilon_4=0.246$。

表1 专家 E_1 的 Picture 模糊决策矩阵 $\boldsymbol{X}^1$

系统	G_1	G_2	G_3	G_4
A_1	(0.53,0.33,0.09)	(0.89,0.08,0.03)	(0.42,0.35,0.18)	(0.08,0.89,0.02)
A_2	(0.73,0.12,0.08)	(0.13,0.64,0.21)	(0.03,0.82,0.13)	(0.73,0.15,0.08)
A_3	(0.91,0.03,0.02)	(0.07,0.79,0.05)	(0.04,0.85,0.10)	(0.68,0.26,0.06)
A_4	(0.85,0.09,0.05)	(0.74,0.16,0.10)	(0.02,0.89,0.05)	(0.08,0.84,0.06)

表2 专家 E_2 的 Picture 模糊决策矩阵 $\boldsymbol{X}^2$

系统	G_1	G_2	G_3	G_4
A_1	(0.53,0.33,0.09)	(0.73,0.12,0.08)	(0.91,0.03,0.02)	(0.85,0.09,0.05)
A_2	(0.89,0.08,0.03)	(0.13,0.64,0.21)	(0.77,0.09,0.05)	(0.74,0.16,0.10)
A_3	(0.42,0.35,0.18)	(0.03,0.82,0.13)	(0.04,0.85,0.10)	(0.02,0.89,0.05)
A_4	(0.33,0.51,0.12)	(0.53,0.31,0.16)	(0.68,0.26,0.06)	(0.08,0.84,0.06)

表3 专家 E_3 的 Picture 模糊决策矩阵 $\boldsymbol{X}^3$

系统	G_1	G_2	G_3	G_4
A_1	(0.33,0.52,0.12)	(0.52,0.31,0.16)	(0.15,0.76,0.07)	(0.16,0.71,0.05)
A_2	(0.17,0.53,0.13)	(0.51,0.24,0.21)	(0.31,0.39,0.25)	(0.64,0.16,0.10)
A_3	(0.90,0.05,0.02)	(0.68,0.08,0.21)	(0.05,0.87,0.06)	(0.13,0.75,0.09)
A_4	(0.15,0.73,0.08)	(0.70,0.20,0.10)	(0.91,0.03,0.05)	(0.18,0.64,0.06)

表4 专家 E_4 的 Picture 模糊决策矩阵 $\boldsymbol{X}^4$

系统	G_1	G_2	G_3	G_4
A_1	(0.90,0.05,0.02)	(0.68,0.08,0.21)	(0.05,0.87,0.06)	(0.13,0.75,0.09)
A_2	(0.77,0.13,0.10)	(0.62,0.24,0.11)	(0.10,0.75,0.10)	(0.64,0.16,0.10)
A_3	(0.80,0.15,0.02)	(0.68,0.18,0.05)	(0.05,0.87,0.06)	(0.12,0.65,0.20)
A_4	(0.15,0.73,0.08)	(0.61,0.25,0.10)	(0.91,0.03,0.05)	(0.28,0.44,0.16)

步骤 2：定义理想方案 A^+。$A^+ = [(0.91, 0.03, 0.02), (0.89, 0.08, 0.03), (0.91, 0.03, 0.02), (0.85, 0.09, 0.02)]$。

步骤 3：求出每个专家 $E_k(k = 1,2,\cdots,t)$ 对应的每个方案 $A_i(i = 1,2,\cdots,m)$ 与理想方案 A^+ 的 Picture 模糊加权对称差异信息测度值 $D_{\omega}^k(A_i, A^+)$。$D_{\omega}^1(A_1, A^+) = 0.522$，$D_{\omega}^1(A_2, A^+) = 0.809$，$D_{\omega}^1(A_3, A^+) = 0.870$，$D_{\omega}^1(A_4, A^+) = 0.768$；$D_{\omega}^2(A_1, A^+) = 0.117$，$D_{\omega}^2(A_2, A^+) = 0.364$，$D_{\omega}^2(A_3, A^+) = 1.367$，$D_{\omega}^2(A_4, A^+) = 0.606$；$D_{\omega}^3(A_1, A^+) = 0.817$，$D_{\omega}^3(A_2, A^+) = 0.566$，$D_{\omega}^3(A_3, A^+) = 0.704$，$D_{\omega}^3(A_4, A^+) = 0.528$；$D_{\omega}^4(A_1, A^+) = 0.703$，$D_{\omega}^4(A_2, A^+) = 0.457$，$D_{\omega}^4(A_3, A^+) = 0.695$，$D_{\omega}^4(A_4, A^+) = 0.497$。

步骤 4：根据专家权重 $\varepsilon_k(k = 1,2,\cdots,t)$ 对每个专家对应的每个方案 $A_i(i = 1,2,\cdots,m)$ 与理想方案 A^+ 的 Picture 模糊加权对称差异信息测度值 $D_{\omega}^k(A_i, A^+)$ 进行集结。$D_{\omega}(A_1, A^+) = 0.540$，$D_{\omega}(A_2, A^+) = 0.546$，$D_{\omega}(A_1, A^+) = 0.911$，$D_{\omega}(A_1, A^+) = 0.598$。

步骤 5：根据每个方案与理性方案的加权对称差异信息测度值 $D_{\omega}(A_i, A^+)$ 进行排序。

根据各方案的加权对称差异信息测度值 $D_{\omega}(A_i, A^+)$，可得到各方案的排序为 $A_1 > A_2 > A_4 > A_3$

因此，最优方案为方案 1。

4 结论

对于 Picture 模糊环境下的多属性群决策问题，本文提出基于投影法和交叉熵的 Picture 模糊多属性群决策模型。将投影法引入 Picture 模糊多属性群决策问题中，通过投影法给出的专家权重，充分考虑各专家决策矩阵的正隶属度矩阵、中性隶属度矩阵及负隶属度矩阵分别在群体决策矩阵上的正隶属度矩阵、中性隶属度矩阵及负隶属度矩阵上的投影，使得所求得的权重更科学。在交叉熵的基础上，考虑交叉熵的非对称性，使用加权对称差异信息测度来求得各方案与理想方案间的差异度使得所求结果更全面。最后，通过 ERP 系统的选择证明该方法的有效性和可行性。

参考文献

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information & Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] ATANASSOV K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets & Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[3] CUONG B C. Picture fuzzy sets[J]. Journal of Computer Science and Cybernetics, 2014, 30(4): 409-420.

[4] WEI G W, ALSAADI F E, HAYAT T, et al. Projection models for multiple attribute decision making with picture fuzzy information[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2016, 9(4): 713-719.

[5] WEI G W. Picture fuzzy cross-entropy for multiple attribute decision making problems[J]. Journal of Business Economics & Management, 2016, 17(4): 491-502.

[6] LIU P D, ZHANG X H. A novel picture fuzzy linguistic aggregation operator and its application to group decision-making[J]. Cognitive Computation, 2018, 10(2): 242-259.

[7] 龙慧丰，罗敏霞. 图片模糊聚合算子及其在多属性决策中的应用[J]. 中国计量大学学报，2020，31(4)：524-530.

[8] 韩二东. 属性权重未知 picture 模糊多属性决策方法及其应用[J]. 计算机应用研究，2021，38(12)：3657-3661.

[9] 王磊，姚星娜. 基于一类新的 Picture 模糊距离的 VIKOR 多属性决策方法[J]. 运筹与管理，2022，31(5)：49-54.

[10] YUAN J Q, CHEN Z C, WANG M F. A novel distance measure and cradis method in picture fuzzy environment [J]. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2023, 16(1): 1-16.

[11] 吴孝宇，郑婷婷，刘钧歌，等. Picture 模糊数的改进得分函数在多属性群决策中的应用[J]. 安徽大学学报(自然科学版)，2024，48(3)：15-24.

[12] 李泽欣，李梦潇，黄丽霞. 基于概率分布的犹豫模糊集多属性群决策法及应用[J]. 科技和产业，2022，22(6)：118-121.

[13] 张毅，张亚涛，李金辉. 基于相似度的三参数区间灰数决策方法[J]. 科学技术与工程，2024，24(1)：88-94.

[14] 王志平，张梦，傅敏，等. 概率犹豫模糊环境下基于累积前景理论和 VIKOR 的多属性群决策方法[J]. 科学技术与工程，2023，23(25)：10649-10657.

[15] YUE Z, JIA Y. A direct projection-based group decision-making methodology with crisp values and interval data[J]. Soft Computing, 2015, 21(9): 2395-2405.

[16] LIANG D, XU Z, DARKO A P. Projection model for fusing the information of pythagorean fuzzy multicriteria group decision making based on geometric bonferroni mean[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2017, 32(9): 966-987.

[17] 林原，战仁军，吴虎胜. 基于犹豫度和相似度的专家权重确定方法及其应用[J]. 控制与决策，2021，36(6)：1482-1488.

[18] 吴波，李雅婷，徐世祥，等. 基于博弈论组合赋权-灰关联投影法的山岭隧道突涌水风险评价[J]. 科学技术与工程，2024，24(25)：10946-10955.

[19] SHANNON C E. A mathematical theory of communication[J]. Bell Labs Technical Journal, 1948, 27(4): 379-423.

［20］ LUCA A D, TERMINI S. A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory[J]. Information& Control, 1972, 20(4): 301-312.

［21］ BHANDARI D, PAL N R. Some new information measures for fuzzy sets[J]. Information Sciences, 1993, 67(3): 209-228.

［22］ ZHANG Q S, JIANG S Y. A note on information entropy measures for vague sets and its applications[J]. Information Sciences, 2008, 178(21): 4184-4191.

［23］ 尹圆圆，江登英. 基于新交叉熵的灰关联双向投影多属性决策方法[J]. 统计与决策，2024，40(7)：57-62.

［24］ YE J. Multicriteria fuzzy decision-making method based on the intuitionistic fuzzy cross-entropy[C]//International Conference on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics. Hangzhou: IEEE, 2009: 38.

［25］ YE J. Fuzzy cross entropy of interval-valued intuitionistic fuzzy sets and its optimal decision-making method based on the weights of alternatives[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(5): 6179-6183.

［26］ 王应明. 多指标决策与评价的新方法——投影法[J]. 系统工程与电子技术，1999，15(3)：1-4.

［27］ YUE Z L. Approach to group decision making based on determining the weights of experts by using projection method[J]. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36(7): 2900-2910.

［28］ SHANG S G, JIANG W S. A note on fuzzy information measures[J]. Pattern Recognition Letters, 1997, 18(5): 425-432.

Projection and Cross Entropy for Picture Fuzzy Multiple Attributes Group Decision Making

LI Yajuan[1], FAN Jianping[2], WU Meiqin[2]

(1. School of Economics and Management, Shanxi Electronic Science and Technology Institute, Linfen 041000, Shanxi, China;
2. School of Economics and Management, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

Abstract: According to the problem of multiple attributes group decision making, in which the attribute values are given in terms of picture fuzzy numbers, a picture fuzzy multiple attributes group decision making model based on projection and cross entropy was established. The projection was introduced into the picture fuzzy multiple attributes group decision making to find the weights of the experts. The weighted symmetric discrimination information measure for PFSs of each alternative corresponding to each expert and the ideal alternative were obtained by using cross entropy, then according to the weight of the experts, the weighted symmetric discrimination information measure values of each alternative and the ideal alternative were assembled. The optimal alternative is obtained. Finally, an example is given to illustrate the practicality and effectiveness of the proposed method.

Keywords: picture fuzzy set; multiple attributes group decision making; projection; cross entropy