

科技新闻

·深度报道·

一根针，一团气

王虹与邓煜的菲尔兹奖工作如何从微观结构抵达整体规律

文/黄文光

2026年国际数学家大会上，王虹、邓煜与另外两位青年数学家共同获得菲尔兹奖。王虹的贡献涉及调和分析和几何测度论，包括傅里叶限制问题、距离集、平面富尔斯滕伯格集以及三维挂谷问题；邓煜则在偏微分方程和数学物理领域取得一系列突破，包括从稀薄气体硬球动力学严格推导玻尔兹曼方程，以及从非线性色散系统推导波动理学方程。

中国科学院数学与系统科学研究院魏宇辰博士和黄飞敏研究员长期从事相关领域的研究，两人

分别受《科技导报》邀请，对王虹、邓煜的工作进行了系统的解读。

当然，无论是把王虹的获奖简单归结为“证明挂谷猜想”，还是把邓煜的获奖等同于“解决希尔伯特第六问题”，都不足以概括他们的完整贡献。不过，这2项最受关注的成果，恰好提供了2扇观察当代数学的窗口：一扇通向空间与维数，另一扇通向粒子、气体与流体。

它们看似相距遥远甚至毫不相关，但是反映了一个共通的深层问题：当大量微观对象以极其

复杂的方式聚集、碰撞或重叠时，人们能否从中提取稳定、严格而普遍的整体规律？

零体积不等于低维

魏宇辰用一根理想化的针引出了王虹所研究的挂谷问题。

1917年，日本数学家挂谷宗一最初的问题关注的是平面上一根单位线段完成180度旋转时所需覆盖区域的最小面积。

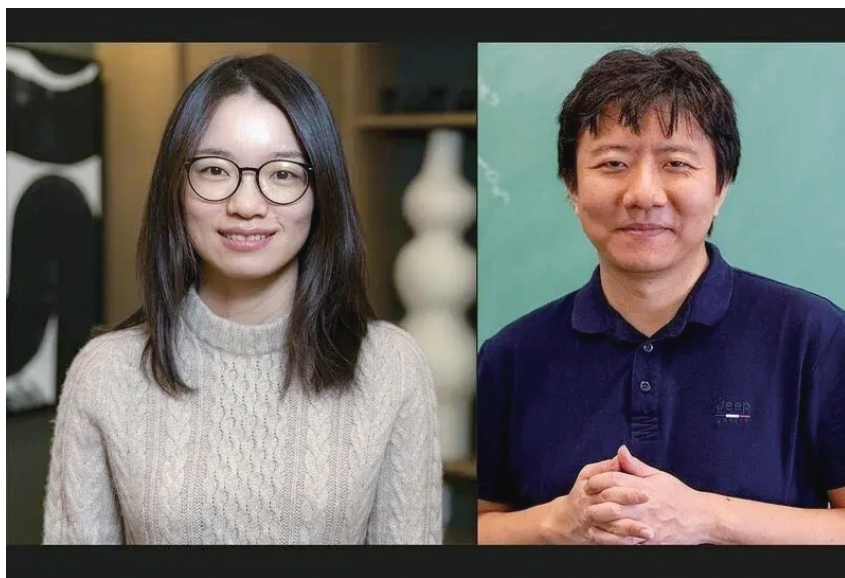
我们知道，固定针的中点旋转，会扫出一个圆。如果巧妙地平移和转动平面上的针，则可以进一步缩小覆盖平面全部方向所需面积。数学家阿布拉姆·贝西科维奇随后发现，如果只要求最终形成的集合包含所有方向的单位线段而放弃要求连续转动，那么这个平面集合面积最小可以为0。

魏宇辰指出，这个结果最反直觉之处在于：一个集合可以在面积意义上“什么都没有”，却仍然容纳所有可能的方向。

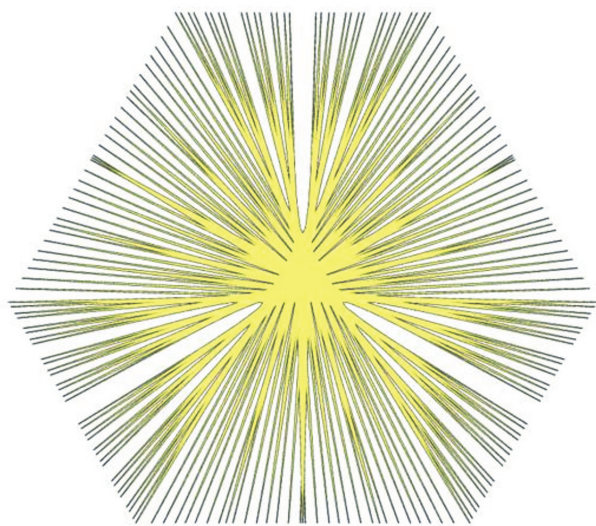
面积已经无法充分描述它的大小，数学家于是转向更加精细的“维数”。这里的维数不同于日常所说的直线是一维、平面是二维，而是指豪斯多夫维数和闵可夫斯基维数这样可以描述集合在不同尺度放大下占据空间的复杂程度的分形维数。平面挂谷集虽然可以具有零面积，但其豪斯多夫维数仍必须等于2。

问题随后被推广到三维乃至更高维空间：如果一个集合包含每个方向的一条单位线段，那么它是否必须具有所在空间的完整维数？

三维挂谷猜想断言，答案是



中国数学家王虹(左)和邓煜(右)获得菲尔兹奖
(图片来源:国际数学家大会官网)



挂谷集包含指向各个方向的单位线段。即使这样的集合可以没有通常意义上的体积，它的分形维数仍可能达到所在空间的完整维数

(图片来源:MathInstitutes.org)

肯定的:想象无数条极细的线段沿三维空间中的所有方向排列形成的集合,其可以没有通常意义上的体积,却依然具有十分丰富的结构,其豪斯多夫维数和闵可夫斯基维数都必须等于3。

王虹与合作者证明了三维挂谷猜想。为了证明这项结论,王虹与合作者并不是直接处理完全没有宽度的线段。数学家首先把线段稍微“加粗”,变成许多半径极小、指向不同方向的细管,其中关键是建立不同尺度下细管之间交互的精细控制,利用多尺度结构排除异常集中的排列方式。

在局部范围内,大量细管当然可以相互靠拢,甚至几乎重合。但当细管需要覆盖足够多的方向时,这种聚集便不能在所有空间尺度上持续。王虹和合作者发展了精细的多尺度分析方法,在不同尺度间反复分解细管的排列结构,排除那些可能导致体积异常缩小的极端情形。

它所揭示的并不是“一根针需要多大的房间”,而是一种更深刻的空间规律:体积很小,并不意味着几何结构简单;在通常测度中可以被忽略的集合,在某种意义上,仍可能保存一个空间的全部维数。

从原子运动到流体方程

邓煜的工作面对的,是另一种从局部走向整体的难题。

1900年,德国数学家大卫·希尔伯特在巴黎国际数学家大会上提出23个重要数学问题。第6问题要求对概率论和力学等物理理论进行公理化处理,其中一项核心任务,是严格说明宏观物理规律如何从微观力学产生。

对于气体而言,这一宏伟目标通常被分成2个步骤:首先,从描述大量粒子运动和碰撞的牛顿力学,推导出介观尺度上的玻尔兹曼方程;随后,再由玻尔兹曼方程推导描述流体运动的欧拉方

程、纳维-斯托克斯方程等。

玻尔兹曼方程并不逐个追踪气体分子,而是描述不同位置、不同速度的粒子在统计意义上的分布如何变化。它架起了一座桥梁:桥的一端是遵循牛顿定律运动的无数粒子,另一端是密度、温度、压力和速度等宏观物理量。

然而,要严格证明这座桥确实存在,困难远超直觉。

一个核心前提是“分子混沌”:在极限意义下,粒子在碰撞前可以近似看作相互独立。但粒子一旦碰撞,彼此之间就会产生相关性。两个粒子可能再次相遇,也可能通过共同的碰撞伙伴发生间接关联,在碰撞历史中形成“回碰”。随着粒子数量增多、时间延长,潜在的碰撞关系会急剧增加。

问题还隐藏着一个更深层的矛盾。硬球系统的牛顿动力学具有时间可逆性:把所有粒子的速度反向,系统理论上可以沿原路返回。玻尔兹曼方程却具有熵增性质,呈现出从有序走向无序的时间方向。如何从可逆的微观定律严格导出不可逆的统计规律?黄飞敏指出,证明不能停留在“相关性足够小”,还必须辨认相关性由何种碰撞产生、怎样传播以及具有何种方向结构。

20世纪70年代,奥斯卡·兰福德证明,在一个非常短的时间区间内,稀薄硬球系统确实能够收敛到玻尔兹曼方程。但它留下了一个根本限制:时间稍微延长,描述全部碰撞历史的级数便可能失去收敛性。

邓煜、扎赫尔·哈尼和马骁的

突破,是把推导从兰福德所能控制的短时间推进到任意长的时间区间——前提是对应的玻尔兹曼方程正则解在这一时间内存在。

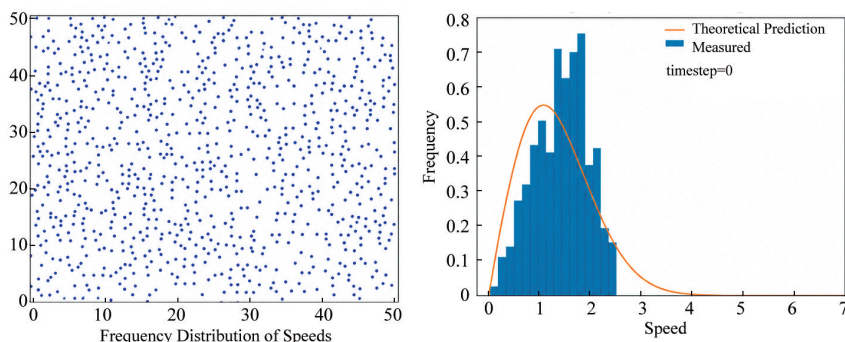
黄飞敏认为,这项工作的关键不是简单地延长原有估计,而是建立了一套可以不断迭代的相关性“记账机制”。

研究人员将长时间演化划分为许多短的“时间层”,使每一层中的展开仍然可控。在层与层之间,他们用累积量记录粒子因碰撞形成的高阶相关性,并采取“部分展开”策略:只继续向前追踪真正危险的高阶相关项,其他部分则保留为当前时刻的玻尔兹曼近似,而不是把全部碰撞历史一再展开到初始时刻。

这样做如同研究一棵不断分叉的巨大碰撞树,却不再逐枝重画整棵树,而是识别其中可能改变结论的关键分支。研究团队进一步设计复杂的组合切割算法,把碰撞图拆分为可控结构,并证明每一次额外回碰都会带来一个与粒子直径有关的小因子。正是这些小因子,最终压倒了碰撞图数量的组合增长。

在后续工作中,邓煜、哈尼和马骁又把这一结果与玻尔兹曼方程的流体动力学极限衔接起来,在相应条件下,从硬球粒子的牛顿动力学出发,进一步推导出可压缩欧拉方程和不可压缩纳维-斯托克斯-傅里叶方程。由此,他们在稀薄硬球气体模型中完成了“牛顿力学-玻尔兹曼方程-流体方程”的推导链条。

但这并不意味着广义的希尔伯特第6问题已经全部终结。



二维稀薄气体的硬球碰撞模拟。大量粒子按照牛顿力学运动并发生弹性碰撞,系统的速度分布逐渐趋向统计平衡。邓煜等从类似的微观硬球动力学模型出发,严格推导出描述气体统计演化的玻尔兹曼方程
(图片来源:Dswartz4/Wikimedia Commons)

现有结果针对稀薄硬球模型,要求初始数据具有足够的光滑性,并要求目标玻尔兹曼方程或流体方程的解在所考察时间内保持正则。它尚未覆盖激波、奇性、物体边界、一般粒子相互作用势、稠密气体以及量子多体系统等情形。

在不同尺度间寻找秩序

王虹与邓煜研究的对象并不相同,两项证明也不存在直接的技术联系。一个处理空间中线段和细管的方向排列,另一个处理时间中粒子的碰撞历史与统计相关性。

但从思想层面看,2项工作具有相似的数学气质。

王虹面对的是细管重叠带来的空间压缩。局部看,许多细管可以挤在一起;整体看,方向的多样性最终迫使它们占据完整维数。

邓煜面对的是碰撞带来的相关性增长。短时间内,粒子近似独立;长时间后,回碰和间接关联不断累积。要得到玻尔兹曼方程,必须证明这些相关性虽然真

实存在,却仍具有可以识别和控制的结

二者都不能仅靠粗略估算解决。细管并非只需证明“占据一定体积”,相关性也并非只需证明“数值足够小”。真正困难的是找出那些可能破坏整体结论的异常结构,把空间或时间切分为不同尺度,再逐层判断这些异常结构能否持续存在。

这种多尺度思想也贯穿于两位数学家的其他研究。国际数学联盟特别提到,王虹在局部光滑、傅里叶限制、距离集和富尔斯滕伯格集等问题中发展了多尺度与解耦技术;邓煜则把相关性分层追踪的方法用于波湍流和非线性薛定谔方程。黄飞敏指出,邓煜等研究硬球系统时所采用的长时间分层和高阶相关量控制,正延续了他们此前研究波动理学方程时形成的证明主线,只是研究重点从波的相位振荡、配对与抵消,转向了粒子的碰撞几何和组合结构。

(综合:《arXiv》《数学年刊》、

国际数学联盟官网)

(科技新闻栏目编辑 黄文光)