

文/张四保

数论中一些难题的研究情况

数论被誉为数学的皇冠,数论中一些悬而未决的疑难问题被誉为“皇冠上的明珠”。近2年来,数论中取得多项突破性研究进展,让数学界感到惊喜与鼓舞。

1 梅森素数

梅森素数是形如 2^p-1 (p 为素数)的素数,它是以17世纪法国数学家、法兰西科学院奠基人马林·梅森的名字命名的。

梅森素数是数论研究的一项重要内容,也是当今科学探索的热点和难点之一。它的追逐者既有声名显赫的学者,也有一些“草根英雄”,其中就有我国数学家、语言学家周海中,他提出了著名的“周氏猜测”。梅森素数的探究需要多学科的支持,有的科学家认为:梅森素数的研究成果,在一定程度上反映了一个国家的科技水平。如今世界上有180多个国家和地区近28万人参加了GIMPS(互联网梅森素数大搜索)项目,并使用超过79万台计算机联网来寻找新的梅森素数。

2300多年来,人类仅仅找到48个梅森素数。英国*New Scientist*杂志网站报道,美国中央密苏里大学数学家柯蒂斯·库珀领导的研究小组通过参加GIMPS项目,于2013年1月25日发现迄今为止最大的梅森素数—— $2^{7723291}-1$ 。该素数有17425170位,比前一个梅森素数多了4446981位数。美国数学会发言人迈克·布林认为这是素数探究的一项重大突破。值得一提的是,在所发现的48个梅森素数中,只确定了前42个数的位次。

2 弱孪生素数猜想

1849年,法国数学家阿尔方·波利亚尼亚克提出猜想:对于所有自然数 k ,存在无穷多素数对 $(p, p+2k)$ 。 $k=1$ 时是孪生素数猜想,而 k 等于其他自然数时就称为弱孪生素数猜想。

华人数学家张益唐于4年前从事孪生素数猜想研究,2012年7月在科罗拉多州的一个朋友家度假时大脑突然“开窍”,证明了“存在无穷多个之差小于7000万的素数对”。2013年4月中旬,张益唐将其研究成果写成论文“Bounded gaps between primes(素数之间的有界距离)”,投稿给世界顶级数学期刊*Annals of Mathematics*。美国数论专家、



本文作者 张四保,喀什师范学院数学系讲师。图片为本文作者。

栏目主持人 关增建,上海交通大学科学史与科学文化研究院,特聘教授,上海市科学技术史学会副理事长、中国科学技术史学会副理事长。电子信箱:guanzz@sjtu.edu.cn。

审稿人之一亨里克·艾温尼科评价说:“其证明是对的,是一流的数学工作。”他指出:张益唐掌握解析数论最复杂课题的知识,并将其运用自如,从而突破令许多专家都止步不前的屏障。英国数论专家理查·泰勒认为张益唐取得了“大跃进”。也有相关专家指出:这一弱孪生素数猜想得以证明,将给孪生素数猜想证明开一个真正的“头”。

尽管从2到7000万是一段很大的距离,英国*Nature*杂志在线报道还是称其为一个“重要的里程碑”。正如戈德斯通所说:“从7000万到2的距离相比于从无穷到7000万的距离来说是微不足道的”,他认为每缩小一段范围,都是在获得终极答案的道路上踏上一个脚印。

3 弱哥德巴赫猜想

所谓弱哥德巴赫猜想,是指每一个不小于7的奇数都可以表达成3个素数之和,它起源于1742年欧拉和哥德巴赫交流的书信中。

1923年,英国数学家哈代与李特尔伍德证明,假设广义黎曼猜想成立,弱哥德巴赫猜想对充分大的奇数是正确的。之后,数学家们一直在想办法去掉广义黎曼猜想成立的前提假设并将“充分大的奇数”降低。1937年,前苏联数学家伊万·维诺格拉多夫在无需广义黎曼猜想的情形下,直接证明了充分大的奇数可以表示为

3个素数的和。2001年,廖明哲与王天泽进一步把“充分大”的下限降低。

2012年5月14日,英国*Nature*杂志网站报道说,美国加利福尼亚大学华裔数学家陶哲轩在证明“弱哥德巴赫猜想”上取得了突破,他在一篇论文中证明,可以将奇数写成5个素数之和。陶哲轩认为有望将所需素数的数目降至3个,从而证明“弱哥德巴赫猜想”。

2013年5月,来自法国国家科学研究院(CNRS)和巴黎高等师范学院(ENS)的数论专家哈洛德·贺欧夫各特通过2篇预印本论文给出了弱哥德巴赫猜想的严格数学证明。其中一篇论文给出了指数和形式的一个新界;在另一篇论文中,他综合使用圆法、筛法和指数等传统方法,辅之以严格的计算,并在他人的帮助下对狄利克雷L函数零点检测,最终证明了弱哥德巴赫猜想。

4 abc猜想

abc猜想最先由法国数学家乔瑟夫·奥斯达利与英国数学家大卫·马瑟于1985年提出,但一直未被证明。abc猜想完全是一个素数之间关系的问题。斯坦福大学布拉恩·康拉德曾说:“在 a, b 和 $a+b$ 的素数因子之间存在着更深层的关联”。

许多数学家都花费了大量的精力试图证明这一猜想。2007年,法国数学家吕西安·施皮罗在1978年研究工作的基础上,首次宣布对abc猜想的证明,但很快就发现其证明中存在缺陷。2012年8月,日本京都大学数学家望月新一公布了长达500页的有关abc猜想的证明。虽尚未被证实其证明过程是正确无误的,但包括陶哲轩在内的一些著名数学家均对此给出了正面评价。该新闻被*Nature*杂志评为2012年最受欢迎的10大新闻之一。

美国哥伦比亚大学数学家多利安·戈德费尔德说:“如果abc猜想得到证实,将一举解决众多著名的丢番图问题,这其中就包括费马大定理”。他还说道:“如果望月新一的证明是正确的话,这将是21世纪最令人震惊的数学成就之一”。

(编辑 王丽娜)