



张景中,河南汝南人,中国科学院院士。长期从事计算机科学、数学和数学教育研究。提出和实现了定理机器证明的数值并行方法;提出教育数学研究方向,并把其中所发展的几何新方法用于机器证明;创建了几何定理可读证明自动生成的原理和方法。从事科普创作和智能教育软件的研究。

卷首语

Foreword

科技导报 2013, 31(17)

教育数学:把数学变容易

数学教育很重要,这早有共识。但如何做好数学教育,长期以来莫衷一是。

可以把学数学比作吃核桃。数学教育研究的是如何砸核桃和吃核桃。教育数学则要研究改良核桃的品种,使核桃味道更美、营养丰富,更容易砸开吃净。

改造数学使之更适宜于教育,是教育数学为自己提出的任务。简言之,教育数学的目标是把数学变容易。

“教育数学”,首见于1989年笔者的《从数学教育到教育数学》一书;但教育数学的活动早已有之。欧几里得著《几何原本》,柯西写《分析教程》,都是教育数学成功的经典工作。拉格朗日为了使自己的学生能够更容易地学习微积分,写了《解析函数论》一书,提出“不用无穷小及正在消失的量或极限与流数等概念,而归结为有限的代数分析的艺术”,试图不用极限概念来建立微积分理论。这应看成教育数学的一次重要尝试。但这次尝试没有成功,因为其基本工具无穷级数仍然离不开极限的概念。

数学教育中有世界公认的若干难点,如初等数学里的几何三角、高等数学里的微积分入门等。经过数学教育学专家、数学家以及数学教师多年的研究和实践,仍然找不到克服这些难点的好办法,至今只能“删繁就简”,直白说,就是“难了就不学”。教育数学则认为,难点的存在,可能是由于现有的数学知识组织得不够好,不适于教学与学习;重构知识,优化数学,化难为易,则大有可为。

教育数学研究的基本思路,在于发掘认知规律、推陈出新,低起点、高观点,从看似平凡之处寻求创新的胚芽。建立新方法新体系、提出新定义新概念、发掘新问题新技巧、寻求新思路新趣味——凡此种种,无不是为教育而做数学。

初等几何的教学受到广泛的重视,数学大师希尔伯特曾亲自主持前苏联初中几何教科书的编写工作。教育数学早期也非常关注这个方向。通过教育数学的研究,建立了几何解题的通用面积方法。这种新方法不胫而走,已成为奥数培训的常见内容。作为副产品,它进一步发展为几何定理可读机器证明的消点法,被国外同行誉为计算机处理几何问题发展道路上的一个里程碑。

连续归纳法以至一般归纳原理的发现,改变了过去仅仅对良序集合才能使用数学归纳方法的框架。极限定义的非-语言的提出,提供了较简单而同样严谨的极限概念表述方法。教育数学的这些成果,已经被几种微积分教材采用,在教学中初见成效。

如果说上述几项工作是属于方法层次的改进,教育数学在三角方面的探索则基于新定义的提出和推理体系的改革。

初等几何的内容在各国的基础数学教材中已被淡化。三角函数部分尽管难学,但由于其在应用中和高等数学理论中的重要性,将长期在数学教育中保持稳定的地位。把三角部分变容易自然成为教育数学的重要课题。引进三角函数定义的传统方法至少有5种(微分方程方法、函数方程方法、无穷级数方法、直角坐标方法和直角三角形方法)。其中起点最低的是最后一种,但依然要用到相似的知识。教育数学的探索提供了更低起点的三角函数定义方法,使得在小学基础上能够引入三角知识。由此发现了一条把几何、三角、代数一线串通的新路。这引起数学教育工作者的浓厚兴趣。在初步试验成功的基础上,多个学校更进一步的教学实践正在开展。

教育数学在微积分方面的探索,则从基本认知层次走出了新路。

微积分入门教学的改革是国内外数学教育领域长盛不衰的话题,也是教育数学一直关注的方向。在国内,林群是这个方向的积极倡导者。他十多年来身体力行,提出了令人瞩目的创见并进行了大量的教学实践探索。前面提到,数学巨匠拉格朗日出于教学的需要,曾致力于不用极限建立微积分,可惜最终没有成功。教育数学在这方面的研究圆了拉格朗日之梦,证实了不用极限概念确实能够直观严谨地建立微积分。这方面的进展颠覆了200年来“微积分必须以极限或无穷小概念为基础”的成见,为微积分思想发展史增添了新的一页。微积分的几个最基本的常用定理的严谨证明,历来要依赖实数理论和极限概念。教育数学的研究表明并非如此。这些工作澄清了微积分的基本事实对实数理论和极限概念的依赖程度,简化了微积分的学习中逻辑演进的过程。

教育数学的主题是把数学变容易。至于如何判断数学内容及其表述方式的难易,目前只有借助于直观的印象和教学实践。由于教学实践的效果涉及学生基础条件以及应试要求等多方面的复杂因素,并且需要很长的周期,因此教育数学成果的实践检验是一个艰巨的、长时间的系统工程。如何对数学内容进行定量的“教学复杂度”的理论分析,从而预测其教学效果以及估计需要消耗的学时,是教育数学有待探索的领域。这方面的研究可能需要把数学与认知科学以及教育测量学等联系起来。

但是,数学教育改革的紧迫需求,不会坐等尚未启动的设想中的“教学复杂度”的理论探索。年轻的教育数学所获得的成果,已经引起了若干数学教育工作者的热情关注,并面临教学实践的检验。教育数学将在教学实践的反复检验过程中得到丰富和优化。它所追求的目标,是获取大面积提高学生数学素质的可以复制的经验。这正是半个世纪以来国际数学教育领域为之坚持努力而尚未实现的理想。

(华中师范大学,武汉 430079)