

·科技纵横捭阖·

文/张四保,陈晓明

梅森素数与周氏猜测

众所周知,素数也叫质数,是只能被1和自身整除的正整数,如2、3、5、7、11等等。2300年前,古希腊数学家欧几里得就已证明素数有无穷多个,并提出一些素数可写成“ 2^p-1 ”(其中指数 p 也是素数)的形式。这种特殊形式的素数具有独特的性质和无穷的魅力,千百年来一直吸引着众多的数学家(包括数学大师费马、笛卡尔、哥德巴赫、欧拉、高斯、哈代、图灵等)和无数的业余数学爱好者对它进行探究^[1]。

17世纪法国数学家马林·梅森曾对“ 2^p-1 ”型素数作过较为系统而深入的探究,并作出著名的断言(现称“梅森猜想”)。由于他是当时欧洲科学界的中心人物和法兰西科学院的奠基人,数学界就把 2^p-1 型的数称为“梅森数”(Mersenne number),并以 M_p 记之。如果 M_p 为素数,则称之为“梅森素数”(Mersenne prime)。

迄今为止,人类仅发现47个梅森素数;另外人们已确定前41个梅森素数的位次,而后6个梅森素数的位次尚未确定。这种素数历来是数论研究的一项重要内容,也是当今科学探索的热点和难点之一。由于梅森素数珍奇而迷人,它被人们誉为“数论中的钻石”。

梅森素数貌似简单,但研究难度却很大。它不仅需要高深的理论和纯熟的技巧,而且还需要进行艰辛的计算。1876年法国数学家爱德华·卢卡斯提出了一个用来判别 M_p 素性的重要定理——卢卡斯定理。后来,这一定理被美国数学家德里克·雷默于1930年进行了简化,给出一个针对 M_p 的新的素性检测方法,即卢卡斯-雷默方法:对于所有大于1的奇数 p , M_p 是素数,当且仅当 M_p 整除 $S(p-1)$,其中 $S(n)$ 由 $S(n+1)=S(n)^2-2$, $S(1)=4$ 递归定义。这一检测法的优点是计算可以依次进行。

当 p 值很大时,用卢卡斯-雷默方法判别 M_p 的素性就需要巨大的计算量。因此,美国数学家、程序设计师乔治·沃特曼于1996年编制了一个梅森素数计算程序,并把它放在网页上供数学家和业余数学爱好者免费使用,这就是著名的“互联网梅森素数大搜索”(GIMPS)项目。该项目采取网格计算的方式,利用大量普通计算机的闲置处理能力来获得相当于超级



本文作者 张四保,喀什师范学院数学系讲师;陈晓明,苏黎世大学数理学院博士后。图片为第一作者。

栏目主持人 关增建,上海交通大学人文学院,教授,中国科学技术史学会副理事长、上海市科技史学会副理事长。电子信箱:guanwj@sju.edu.cn。

计算机的运算能力。1997年,美国数学家、程序设计师斯科特·库尔沃斯基建立了“素数网”(PrimeNet),使分配搜索区间和向GIMPS发送报告自动化。现在只要人们去GIMPS的主页下载那个免费程序,就可以立即参加GIMPS项目了。伴随数学理论的改善,为了寻找梅森素数而使用的计算机也越来越强大,包括了著名的IBM360型计算机和超级计算机Cray系列。目前,世界上有180多个国家和地区超过27万人参加了这一项目,并动用了68万多台计算机联网来寻找新的梅森素数。

2008年8月23日,美国加州大学洛杉矶分校的计算机专家埃德森·史密斯发现迄今已知的最大梅森素数 $2^{43112609}-1$,该数也是目前已知的最大素数。这个素数有12978189位;如果用普通字号将它连续打印下来,其长度可超过50公里!该校华裔数学家、菲尔茨奖得主陶哲轩对这一成就予以高度评价,称赞史密斯创造了大素数发现史上的奇迹;世界各大主流媒体纷纷予以报道并积极评价,认为这是一项了不起的成就。另外,这项成就被著名的《时代》杂志评为“2008年度50项最佳发明”之一。

人们在寻找梅森素数的同时,对其重要性质——分布规律的研究也一直在进行着。从已发现的梅森素数来看,它们在正整数中的分布时疏时密、极不规则,因

此研究梅森素数的分布规律似乎比寻找新的梅森素数更为困难。英国数学家香克斯、法国数学家托洛塔、德国数学家伯利哈特、印度数学家拉曼纽杨和美国数学家吉里斯等曾分别提出过猜测,但他们的猜测有一个共同点,就是都以渐近表达式提出,而且与实际情况的接近程度均难如人意。

中国数学家、语言学家周海中是这方面研究的领先者——他经过多年潜心研究,运用联系观察法和不完全归纳法于1992年首次给出了梅森素数分布的精确表达式:当 $2^2 < P < 2^{2^{n+1}}$ ($n=0,1,2,3,\dots$)时,梅森素数的个数为 $2^{n+1}-1$ 。他还据此作出了推论:当 $P < 2^{2^{n+1}}$ 时梅森素数的个数为 $2^{n+2}-n-2^{[2]}$ 。其研究成果为人们寻找这一素数提供了方便,被国际上命名为“周氏猜测”。美籍挪威数论大师、菲尔茨奖和沃尔夫奖得主阿特勒·塞尔伯格认为周氏猜测具有创新性,开创了富于启发性的新方法;其创新性还表现在揭示新的规律上。中国数学家、计算机科学家张景中也对这一成果给予好评,认为周氏猜测颇具数学美^[3]。

周氏猜测已成为著名的数学难题,至今尚未被证明或证否,目前人们需要做的就是破解这一难题。

梅森素数在当代具有重大的理论意义和丰富的实用价值,它是发现已知最大素数的最有效途径,其探究推动了“数学皇后”——数论的研究,促进了计算技术、密码技术、网格技术、程序设计技术的发展以及快速傅里叶变换的应用。同时由于梅森素数的探究需要多种学科和技术的支持,所以许多科学家认为:梅森素数的研究成果,在一定程度上反映了一个国家的科技水平。英国顶尖科学家马科斯·索托伊甚至认为梅森素数的研究进展标志着科学发展的里程碑。

参考文献

- [1] 张四保, 张家辉. 梅森素数与网格技术[J]. 科学, 2012, 64(3): 52-55.
- [2] 周海中. 梅森素数的分布规律[J]. 中山大学学报, 1992, 31(4): 121-122.
- [3] 张景中. “周氏猜测”揭示数学之美[C]. 30年科技成就100例. 武汉: 湖北长江出版集团, 2008, 8-9.

(责任编辑 王芷)