数学和物理如何走在一起

丘成桐(Shing-Tung Yau)

这里要讲的,是数学和物理如何互动互利,这种关系在卡拉比-丘(Calabi-Yau)空间和弦论的研究中尤为突出。这个题目非出偶然,它是我和史蒂夫·纳第斯(Steve Nadis)的新书《内空间的形状》的主旨。书中描述了这些空间背后的故事、个人的经历和几何的历史。

我写这本书是希望读者透过它,了解数学家是如何看这世界的。数学并非一门不食人间烟火的抽象学问,相反地,它是我们认识物理世界不可或缺的工具。现在,就让我们沿着时间,或更确切地沿着时空从头说起。

黎曼几何学

1969 年,我到了伯克利研究院。在那里我了解到,19 世纪几何学在高斯和黎曼的手上经历了一场翻天覆地的变化。黎曼的创见,颠覆了前人对空间的看法,给数学开辟了新途径。

几何的对象,从此不再局限于平坦而线性的欧几里德空间内的物体。黎曼引进了更抽象的、具有任何维数的空间。在这些空间里,距离和曲率都具有意义。此外,在它们上面还可以建立一套适用的微积分。

大约 50 年后, 爱因斯坦发觉包含弯曲空间的这种几何学,刚好用来统一牛顿的重力理论和狭义相对论,沿着新路迈进,他终于完成了著名的广义相对论。

在研究院的第一年,我念了黎曼几何学。它与我在香港时学的古典几何不一样,过去我们只会讨论在线性空间里的曲线和曲面。在伯克利,我修了斯巴涅尔(Spanier)的代数拓扑、劳森(Lawson)的黎曼几何、莫雷伊(Morrey)的偏微分方程。此外,我还旁听了包括广义相对论在内的几门课,我如饥似渴地尽力去吸收知识。

课余的时间都呆在图书馆,它简直成了我的办公室。我孜孜不倦地找寻有兴趣的材料来看。圣诞节到了,别人都回去和家人团聚。我却在读《微分几何学报》上约翰·米尔诺(John Milnor)的一篇论文,它阐述了空间里曲率与基本群的关系。我既惊且喜,因为它用到了我刚刚学过的知识。

米尔诺的文笔是如此流畅,我通读此文毫不费力。他文中提及普里斯曼(Preissman)的另一篇论文,我也极感兴趣。

从这些文章中可以见到,负曲率空间的基本群受到曲率强烈的约束,必须具备某些性质。基本群是拓扑上的概念。

虽然,拓扑也是一种研究空间的学问,但它不涉及距离。从这角度来看,拓扑所描绘的空间并没有几何所描绘的那样精细。几何要量度两点间的距离,对空间的属性要知道更多。这些属性可以由每一点的曲率表达出来,这便是几何了。

举例而言,甜甜圈和咖啡杯具有截然不同的几何,但它们的拓扑却无二样。同样,球面和椭球面几何迥异但拓扑相同。作为拓扑空间,球面的基本群是平凡的,在它上面的任何闭曲线,都可以透过连续的变动而缩成一点。但轮胎面则否,在它上面可以找到某些闭曲线,无论如何连续地变动都不会缩成一点。由此可见,球面和轮胎面具有不同的拓扑。

普里斯曼定理讨论了几何 (曲率) 如何影响拓扑 (基本群),我作了点推广。在影印这些札记时,一位数学物理的博士后阿瑟·费舍尔(Arthur Fisher)嚷着要知道我干了什么。他看了那些札记后, 说任何把曲率与拓扑扯上关系的结果,都会在物理学中用上。这句话在我心中留下烙印,至今不忘。

广义相对论

狭义相对论告诉我们,时间和空间浑为一体,形成时空,不可分割。爱因斯坦进一步探究重力的本质,他的友人马塞尔·格罗斯曼(Marcel Grossman)是数学家,爱氏透过他认识到黎曼和里奇(Ricci)的工作。黎曼引进了抽象空间的概念,并且讨论了它的距离和曲率。爱因斯坦利用这种空间,作为他研究重力的舞台。

爱因斯坦也引用了里奇的工作, 以他创造的曲率来描述物质在时空的分布。里奇曲率乃是曲率张量的迹,是曲率的某种平均值。它满足的比安奇恒等式,奇妙地可以看成一条守恒律。爱因斯坦利用了这条守恒律来把重力几何化,从此我们不再视重力为物体之间的吸引力。新的观点是,物体的存在使空间产生了曲率,重力应当看做是这种曲率的表现。

对历史有兴趣的读者,爱因斯坦的自家说辞更具说服力。他说:“这套理论指出重力场由物质的分布决定,并随之而演化,正如黎曼所猜测的那样,空间并不是绝对的,它的结构与物理不能分割。我们宇宙的几何绝不像欧氏几何那样孤立自足。”

讲到自己的成就时,爱因斯坦写道:“就学问本身而言,这些理论的推导是如此行云流水,一气呵成,聪明的人花点力气就能掌握它。然而,多年来的探索,苦心孤诣,时而得意,时而气馁,到事竟成,其中甘苦,实在不足为外人道。”

爱因斯坦研究重力的经历,固然令人神往,他的创获更是惊天动地。但是黎曼几何学在其中发挥的根本作用,也是昭昭然不可抹杀的。

半个多世纪后,我研习爱因斯坦方程组,发现物质只能决定时空的部分曲率,为此心生困惑,自问能否找到一个真空,即没有物质的时空,但其曲率不平凡,即其重力为零。当然,

本文转载自《光明日报》2012 年 4 月 30 日第 5 版,为作者在第二届国际数学论坛上的演讲。

著名爱因斯坦方程史瓦兹契德(Schwarzschild)解具有这些性质。它描述的乃是非旋转的黑洞,这是个真空,但奇怪地,异常的重力产生了质量。然而这个解具有一个奇点,在那里所有物理的定律都不适用。

我要找的时空不似史瓦兹契德解所描绘的那样是开放无垠的,反之,它是光滑不带奇点,并且是紧而封闭的。即是说,有没有一个紧而不含物质的空间——即封闭的真空宇宙——其上的重力却不平凡?这问题在我心中挥之不去,我认为这种空间并不存在。如果能从数学上加以论证,这会是几何学上的一条美妙的定理。

卡拉比猜想

从20世纪70年代开始,我便在考虑这个问题。当时,我并不知道几何学家欧亨尼奥·卡拉比(Eugenio Calabi)早已提出差不多同样的问题。他的提问透过颇为复杂的数学语言来表述,其中涉及到克勒(Kaehler)流形、里奇曲率、陈类等等,看起来跟物理沾不上边。事实上,卡拉比抽象的猜想也可以翻过来,变为广义相对论里的一个问题。

新的内容乃是要求要找的时空具有某种内在的对称性,这种对称物理学家称之为超对称。于是上述的问题便变成这样:能否找到一个紧而不带物质的超对称空间,其中的曲率非零,即具有重力?

我与其他人一起试图证明卡拉比猜想所描述的空间并不存在,花了差不多3年。这猜想不仅指出封闭而具重力的真空的存在性,而且还给出系统地大量构造这类空间的途径,大家都认为世间哪有这样便宜的东西可捡。可是,纵然不乏怀疑卡拉比猜想的理由,但没人能够反证它。

1973年我出席了在斯坦福举行的国际几何会议。这会议是由奥斯曼(Osserman)和陈省身老师组织的。或是由于我与两人的关系,我有幸做出两次演讲。在会议期间,我告诉了一些相识的朋友,说已经找到了卡拉比猜想的反例。消息一下子传开了,徇众要求,当天晚上另做报告。那晚30多位几何工作者聚集在数学大楼的三楼,其中包括卡拉比、陈师和其他知名学者。我把如何构造反例说了一遍,大家似乎都非常满意。

卡拉比还为我的构造给出一个解释。大会闭幕时,陈师说我这个反例或可视为整个大会最好的成果,我听后既感意外,又兴奋不已。

可是,真理总是现实的。两个月后我收到卡拉比的信,希望我厘清反例中一些他搞不清楚的细节。看见他的信,我马上就知道我犯了错。接着的两个礼拜,我不眠不休,希望重新构造反例,身心差不多要垮掉。每次以为找到一个反例,瞬即有微妙的理由把它打掉。经过多次失败后,我转而相信这猜想是对的。于是我便改变了方向,把全部精力放在猜想的证明上。花了几年工夫,终于在1976年把猜想证明了。

在斯坦福那个会上,物理学家罗伯特·杰勒西(Robert Geroch)在报告中谈到广义相对论中的一个重要课题——正质量猜想。这猜想指出,在任何封闭的物理系统中,总质量/能量必须是正数。我和舒恩(Schoen)埋头苦干,利用了极小曲面,终于把这猜想证明了。

这段日子的工作把我引到广义相对论,我们证明了几条有关黑洞的定理。与相对论学者交流的愉快经验,使我更能开放怀抱与物理学家合作。至于参与弦论的发展,则是几年之后的事了。

在证明卡拉比猜想时,我引进了一个方案,用以寻找满足卡拉比方程的空间,这些空间现在通称为卡拉比-丘空间。我深深地感到,我无心插柳,已经进入了一界数学高地。它必定与物理有关,并能揭开自然界深深埋藏的隐秘。然而,我并不知道这些想法在那里会大派用场,事实上,当时我懂得的物理也不多。

弦论

1984年,我接到物理学家加里·霍罗威茨(Gary Horowitz)和安迪·斯特罗明格(Andy Strominger)的电话。他们兴冲冲地谈到有关宇宙真空状态的一个模型,这模型是建基于一套叫弦论的崭新理论上的。

弦论的基本假设是,所有最基本的粒子都是由不断振动的弦线所组成的,时空必须容许某种超对称性。同时时空必须是十维的。

我在解决卡拉比猜想时证明存在的空间得到霍罗威茨和斯特罗明格的喜爱。他们相信这些空间会在弦论中担当重要的角色,原因是它们具有弦论所需的那种超对称性。他们希望知道这种看法对不对,我告诉他们,那是对的。他们听到后十分高兴。

不久,爱德华·威滕(Edward Witten)打电话给我,我们是上一年在普林斯顿相识的。他认为就像当年量子力学刚刚面世那样,理论物理学最激动人心的时刻来临了。他说每一位对早期量子力学有贡献的人,都在物理学史上留名。

早期弦学家如迈克尔·格林(Michael Green)和约翰·施瓦茨(John Schwarz)等人的重要发现,有可能终究把所有自然力统一起来。爱因斯坦在他的后半生花了30年致力于此,但至死也未竟全功。

当时威滕正与凯德勒斯(Candelas)、霍罗威茨和斯特罗明格一起,希望搞清楚弦论中那多出来的六维空间的几何形状。他们认为这六维卷缩成极小的空间,他们叫这空间为卡拉比-丘空间,因为它源于卡拉比的猜想,并由我证明其存在。

弦论认为时空的总数为10。我们熟悉的三维是空间,加上时间,那便是爱因斯坦理论中的四维时空。此外的六维属于卡拉比-丘空间,它独立地暗藏于四维时空的每一点里。我们看不见它,但弦论说它是存在的。

这个添了维数的空间够神奇了,但弦理论并不止于此,它进一步指出卡拉比-丘空间的几何决定了这个宇宙的性质和物理定律。哪种粒子能够存在,质量是多少,它们如何相互作用,甚至自然界的一些常数,都取决于卡拉比-丘空间或本书所谓“内空间”的形状。

理论物理学家利用狄克拉(Dirac)算子来研究粒子的属性。透过分析这个算子的谱,可以估计能看到粒子的种类。时空具有十个维数,是四维时空和六维卡拉比-丘空间的乘积。

因此,当我们运用分离变数法求解算子谱时,它肯定会受卡拉比-丘空间所左右。卡拉比-丘空间的直径非常小,则非零谱变得异常大。这类粒子应该不会观测到,因为它们只会在极度高能量的状态下才会出现。

另一方面,具有零谱的粒子是可能观测到的,它们取决于卡拉比-丘空间的拓扑。由此可见,这细小的六维空间,其拓扑在物理中是如何举足轻重。爱因斯坦过去指出,重力不过是时空几何的反映。弦学家更进一步,大胆地说这个宇宙的规律,都可以由卡拉比-丘空间的几何推演出来。这个六维空间究竟具有怎样的形状,显然就很重要了。弦学家正就此问题废寝忘食,竭尽心力地研究。

威滕很想多知道一点卡拉比-丘空间。他从普林斯顿飞来圣迭戈,与我讨论如何构造这些空间。他还希望知道究竟有多少个卡拉比-丘空间可供物理学家拣选。原先,他们认为只有几个——即少数拓扑类——可作考虑,是以决定宇宙“内空间”的任务不难完成。可是,我们不久便发现,卡拉比-丘空间比原来估计的多得多。1980年初,我想它只有数万个,然而,其后这数目不断增加,迄今未止。

于是,决定内空间的任务一下子变得无比困难,假如稍后发现有无数卡拉比-丘空间的话,就更遥不可及了。当然,后者是真是假还有待验证,我一直相信,任何维的卡拉比-丘空间都是有限的。

卡拉比-丘空间的热潮,始于1984年,当时的物理学家开始了解到这些复空间或会用于新兴的理论上。热情持续了几年,便开始减退了。可是到了20世纪80年代末期,布赖·恩格林(Brian Greene)、罗恩·布雷斯(Ronen Plesser)、菲利普·凯德拉(Philip Candelas)等人开始研究“镜像对称”时,卡拉比-丘空间又重新成为了人们的焦点。

镜对称乃是两个具有不同拓扑的卡拉比-丘空间,看起来没有什么共通点,但却拥有相同的物理定律。具有这样关系的两个卡拉比-丘空间称为“镜像对”。

数学家把物理学家发现的镜像关系搬过来,成为数学上强而有力的工具。在某个卡拉比-丘空间上要解决的难题,可以放到它的镜像上去考虑,这种做法往往奏效。一个求解曲线数目的问题,悬空了差不多一个世纪,就是这样破解的。它使数数几何学(enumerative geometry)这一数学分支,重新焕发了青春。这些进展令数学家对物理学家及弦论刮目相看。

镜对称是对偶性的一个重要例子。它就像一面窗,让我们窥见卡拉比-丘空间的隐秘。利用它,我们确定了给定阶数的有理曲线在五次面——一个卡拉比-丘空间的总数,这是一个非常困难的问题。

这问题称为Schubert问题。它源于19世纪,德国数学家赫尔曼·舍伯特(Hermann Schubert)首先证明,在五次面上共有2875条一阶有理曲线。到了1986年,谢尔顿·卡茨(Sheldon Katz)证明了有609250条二阶曲线。1989年前后,两位挪威数学家盖尔·尔林斯瑞德(Geir Ellingsrud)和斯坦·斯达姆(Stein Stromme)利用代数几何的技巧,一下子找到了2638549425条三阶曲线。

可是另一方面,以凯德拉为首的一组物理学家,却利用弦论找到317206375条曲线。他们在寻找的过程中,用了一条并非由数学推导出来的适用于任意阶数曲线的公式。这公式的真确与否,还有待数学家验证。

1991年1月,在伊萨多·辛格(Isadore Singer)的敦促下,我组织了弦学家和数学家首次的重要会议。大会在伯克利的数理科学研究所举行。会议上拥埃林斯里德-斯达姆(Ellingsrud-Stromme)和拥凯德拉团队的人分成两派,壁垒分明,各不相让。这局面维持了几个月,直到数学家在他们的编码程序中发现错误,经修正后,结果竟与物理学家找到的数目完全吻合。经此一役,数学家对弦学家深刻的洞察力,不由得肃然起敬。

这一幕还说明了镜像对称自有其深厚的数学基础。人们花了好几年,到了1990年中后期,镜像对称的严格数学证明,包括凯德拉等人的公式,才由杰文托(Givental)和Lian-Liu-Yau各自独立地完成。

结语

话说回来,我们必须谨记,弦“论”毕竟是一套理论而已,它还未被实验所实证。事实上,有关的实验还没有设计出来。弦论是否真的与原来设想的那样描述自然,还是言之过早。

如果要给弦论打分的话,从好的方面来说,弦论启发了某些极之精妙而有力的数学理论,从中获得的数学式子已经有了严格的证明,弦论的对错与否,都不能改变其真确性。弦论纵使还没有为实验所证实,它始终是现存的唯一能够统一各种自然力的完整理论,而且它非常漂亮。试图统一各种自然力的尝试,竟然导致不同数学领域的融合,这是从来没有想过的。

现在要作总结还不是时候,过去两千年间,几何学屡经更替,最终形成今天的模样。而每次重要的转变,都基于人类对大自然的崭新了解,这应当归功于物理学的最新进展。我们将亲眼看到21世纪的重要发展,即量子几何的面世,这门几何把细小的量子物理和大范围的广义相对论结合起来。

抽象的数学为何能够揭露大自然如许讯息,实在不可思议,令人惊叹不已,《内空间的形状》一书的主旨乃在于此。不仅如此,我们还希望透过本书,使读者知道数学家是如何进行研究的。他们未必是奇奇怪怪的人,就像在电影《心灵捕手》(Good Will Hunting)中的清洁工般,一面在打扫地板,另一面却破解了悬空百年的数学难题。杰出的数学家也未必如一部电影和小说描述的那样,是个精神异常、行为古怪的人。

数学家和作实验的学者同样研究自然,但他们采用的观点不同,前者更为抽象。然而,无论数学家或物理学家,他们的工作都以大自然的真和美为依归。数学和物理互动时迸发的火花,重要的想法如何相互渗透,伟大的新学说如何诞生,如此种种,作者都会在书中娓娓道来。

就弦论而言,我们看到几何和物理如何走在一起,催生了美妙的数学、精深的物理。这些数学是如此的美妙,影响了不同的领域,使人们相信它在物理中必有用武之地。可以肯定的是,故事还会继续下去。本人能在其中担当一角色,与有荣焉。今后并将倾尽心血,继续努力。