

3 半离散 Fourier 谱格式解的存在性

定理 2 存在一个正常数 C , 使得半离散 Fourier 谱格式 (5)–(7) 的解 E_N, N_N 满足:

$$\|E_N\|^2 + |E_N|_1^2 + |u|_1^2 + \|N_N\|^2 \leq C$$

进而有,

$$\|E_N\|_\infty \leq C$$

证明 考虑式 (9) 左端最后一项, 有

$$\left| \int_0^L N_N |E_N|^2 dx \right| \leq \int_0^L \left(\varepsilon N_N^2 + \frac{1}{4\varepsilon} |E_N|^4 \right) dx \leq \frac{1}{4} \|N_N\|^2 + \|E_N\|_{L_4}^4 \quad (15)$$

由引理 1 和式 (8), 有

$$\begin{aligned} \|E_N\|_{L_4}^4 &= \int_0^L |E_N|^2 |E_N|^2 dx \leq \|E_N\|_2^2 \int_0^L |E_N|^2 dx \\ &= \|E_N\|_2^2 \|E_N\|^2 \leq \frac{1}{2} |E_N|_1^2 + \frac{1}{2} (2C)^2 \|E_N\|^2 \\ &= \frac{1}{2} |E_N|_1^2 + C \end{aligned}$$

由式 (9) 和式 (15) 可得

$$\begin{aligned} |E_N|_1^2 + \frac{1}{2} |u|_1^2 + \frac{1}{2} \|N_N\|^2 &\leq C + \left| \int_0^L N_N |E_N|^2 dx \right| \leq \\ &\frac{1}{2} |E_N|_1^2 + \frac{1}{4} \|N_N\|^2 + C \end{aligned}$$

从而有

$$\frac{1}{4} |E_N|_1^2 + \frac{1}{4} \|N_N\|^2 + \frac{1}{4} |u|_1^2 \leq C$$

因此,

$$|E_N|_1^2 + \|N_N\|^2 + |u|_1^2 \leq C$$

再由式 (9), 即得

$$\|E_N\|^2 + |E_N|_1^2 + \|N_N\|^2 + |u|_1^2 \leq C$$

证毕。

因此, $\|E_N\|^2 \leq C, |E_N|_1^2 \leq C$. 进而, 由引理 1 可得 $\|E_N\|_\infty \leq$

C . 再由一致有界性可知整体解存在。

4 结论

本文考虑到动力系统中的 Zakharov 方程组, 由于其解析解的表达形式无法求出, 需要利用数值方法来求给定方程组的数值解, 因此本文建立了半离散 Fourier 谱格式, 而方程组近似解的适定性研究就成为重点。本文利用方程组解的守恒性质, 对其进行先验估计, 并验证其半离散 Fourier 谱格式解的存在性。这种方法可以推广到动力系统的其他偏微分方程组中。本文研究是在有限时间内进行讨论的, 有关无限时间内的讨论还有待于进一步研究。

参考文献 (References)

- [1] Temam R. Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics [M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1997: 1–255.
- [2] Sulem C, Sulem P L. Regularity properties for the Zakharov equations [M]. Lecture Note in Phys, Berlin: Springer-Verlag, 1979: 123–149.
- [3] Glassey R T. Convergence of an energy-preserving scheme for the Zakharov equations in one space dimension [J]. *Mathematics of Computation*, 1992, 58(197): 83–102.
- [4] Chang Q S, Guo B L, Jiang H. Finite difference method for generalized Zakharov equations [J]. *Mathematics of Computation*, 1995, 64(210): 537–553.
- [5] Zhang F Y, Xiang X M. The global error estimate of the pseudospectral method for a class of generalized Zakharov equations 1 [J]. *Journal of Heilongjiang University: Natural Science*, 1996, 13(2): 1–6.
- [6] Zhang F Y, Xiang X M. The global error estimate of the pseudospectral method for a class of generalized Zakharov equations 2 [J]. *Journal of Heilongjiang University: Natural Science*, 1997, 14(3): 2–7.
- [7] 向新民. 谱方法的数值分析 [M]. 北京: 科学出版社, 2000. Xiang Xinmin. Numerical analysis of spectral methods [M]. Beijing: Science Press, 2000.
- [8] Ma S Q, Chang Q S. Strange attractors on pseudospectral solutions for dissipative Zakharov equations [J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2004, 24B (3): 321–336.

(责任编辑 马宇红, 代丽)

· 科学共同体介绍 ·

中国自然资源学会

中国自然资源学会 (China Society of Natural Resources) 原名中国自然资源研究会, 1980 年 9 月经中国科协批准成立, 1993 年 2 月更名为中国自然资源学会。历届理事长分别为侯学煜、孙鸿烈、石玉林、刘纪远。

中国自然资源学会是由从事自然资源及相关学科的科学研究、工程技术、教育以及管理工作, 自愿组成并依法登记成立的

全国性、学术性的法人团体, 是中国科协所属的全国一级学会, 是发展我国自然资源科技事业的重要社会力量。

中国自然资源学会现有会员 4000 余人, 其中院士会员 13 人; 团体会员单位 34 个; 下设 14 个专业委员会, 2 个工作委员会。学会还协助湖南省、湖北省、福建省、山东省、宁夏回族自治区等 5 个省(区)建立了

省级自然资源学会。

中国自然资源学会主办《自然资源学报》、《应用基础与工程科学学报》、《资源科学》等学术期刊。

中国自然资源学会于 2009 年 10 月 9 日在上海召开第 6 次全国会员代表大会, 选举刘纪远任理事长, 沈镛任秘书长。

(责任编辑 徐子政(实习生), 秦政)