

·科技纵横捭阖·

文/曹广福

打通学生数学学习的任督二脉

我们常常用“灵性”、“灵气”来形容一个人的聪明,学习也存在“灵性”问题。可惜的是,学生的学习“灵性”被我们的教育磨掉了。

什么叫学习上的“灵性”?直白地说就是“悟性”,在某个方面的“悟性”既可以培养,也可以扼杀。记得二十多年前看到过一篇记者的文章称:“记者用粉笔在黑板上画了个圆圈,分别问大、中、小学生:‘这是什么?’小学生的回答很丰富,有说像太阳的,也有说像月亮的,还有说像烧饼的,大学生的回答最理智:‘这是个圆。’”由此可见教育的强大威力。从另一个方面说,如果教师善于引导,也可以培育学生的“悟性”,换句话说,老师可以帮助还没“开窍”的学生“开窍”,不过这很难,既取决于教师的水平,也取决于学生的学习热情,如果学生根本没有学习的兴趣,老师再高的教学艺术也是枉然。或许有人认为学生的学习热情要靠老师激发,正常情况下是这样,问题在于我们现在的教育有点不正常。正常不正常不在本文的讨论范围内,这里假定学生是愿意学习的,在此基础上,老师能否帮助学生“开窍”就看教师的水平了。武学上有两个名词“任脉”、“督脉”,一个人如果不能打通“任督二脉”,那他的内功修为永远也不可能达到至高境界,我把这称为武学上的“开窍”,帮助学生开窍就是帮助学生打通“任督二脉”。

讲到可测集的构造问题,所谓可测集的构造是什么意思呢?通俗点说就是可测集长成什么样?如何来描述可测集的模样?当然是用我们比较熟悉或比较了解的集合来描述它们。这属于什么类型的问题?看到这个问题我们想到了什么?

数学的直觉是数学学习与研究必不可少的,如果你缺少基本的直觉,那你对什么都是懵懵懂懂,老师咋讲你咋接受,问题摆在你面前,你不知从何入手。直觉是什么呢?它从何而来?人的思维可以分为逻辑思维 and 直觉思维,逻辑思维与直觉思维两者是不可分割的,直觉需要靠逻辑支撑,逻辑需要靠直觉分析。逻辑思维的特征是演绎,直觉思维的特征是分析,两者同等重要。我



本文作者 曹广福,广州大学数学与信息科学学院教授。图片为本文作者。

栏目主持人 关增建,上海交通大学人文学院教授,中国科学技术史学会副理事长、上海市科技史学会副理事长。电子信箱:guanzz@sjtu.edu.cn。

们在以往的教学过程中过分地注重了逻辑演绎,忽视了直觉分析,结果学生只知道形式化的东西,不知道数学概念与理论的深刻内涵。我们应该看到,数学直觉的培养固然离不开数学逻辑的训练,但逻辑演绎能力的培养更离不开数学直觉。这是辩证统一的关系,“逻辑”与“直觉”正是数学的“任督二脉”,打通了“任督二脉”,学生才会有数学的“灵气”与“悟性”。

数学直觉来自哪里?来自生活、来自对已知的领悟、来自“联想”,所谓“灵气”其实也就是要让自己的思维具有“弹性”,能由此及彼地类比与归纳。

回到可测集的构造问题,这里涉及到几个问题:①什么是好的集合?②所谓好的集合描述可测集是什么意思?第一个问题不难回答,区间是“好”的集合,进而开集、闭集是“好”的集合。所谓好的集合描述可测集是什么意思呢?显然这是个逼近问题,它与我们曾经见过的什么问题相似?我放开思维神侃起了微积分中的Taylor级数、傅里叶级数、Weierstrass逼近定理等学生耳熟能详的问题(这些问题也是可测函数要面对的重要问题,而集合是可以与函数建立起对应关系的,只要找特征函数就行了,因此这里讲的集合的逼近可以转换成函数的某种逼近),算是做了一回数学科普。众所周知,如果函数 f

在闭区间上连续,则可以用多项式序列 p_k 一致逼近于该函数,但要注意,逼近的过程中,多项式 p_k 的系数是在变化的,即

$$p_k(x) = \sum_{n=1}^{N_k} a_n^{(k)} x^n$$

中 x^n 的系数 $a_n^{(k)}$ 是随着 k 变化的,这与Taylor级数是不同的,换句话说,不是每个连续函数都有Taylor展开(能不能举个反例?构造这样的例子比构造具有收敛傅里叶级数的连续函数要容易些),那么傅里叶级数如何?从定义看,闭区间上的每个连续函数都有傅里叶级数展开,问题是这个级数是否收敛到该函数?我们暂且不管按什么方式收敛,先直观感觉一下级数该不该收敛?这需要在演绎的基础上做分析。我们可以把傅里叶级数写成指数形式:

$$f(x) \sim \sum_n c_n e^{inx}$$

如果记:

$$S_k(x) = \sum_{|n| \leq k} c_n e^{inx}$$

S_k 是否收敛到 f ?如果我们善于联想,知道区间上的连续函数未必可以用Taylor级数来逼近,那就不难产生一种直觉, S_k 可能不收敛到 f 。为什么?因为如果记 $t = e^{ix}$,则 $e^{inx} = t^n$,因此 $S_k(x)$ 可以写成:

$$S_k(x) = \sum_{|n| \leq k} c_n t^n$$

这不是很像Taylor级数吗?只不过 t 在复平面的圆上变化而已。既然区间上的连续函数未必有Taylor级数,我们凭什么认为这个很像Taylor多项式的东西 $S_k(x)$ 一定收敛到 $f(x)$?当然这只是基于逻辑推演的猜测,要验证这个猜测还需要细致的构造,这说明猜测有时也需要依靠逻辑演绎。

这种联想不仅让我们重温了微积分中的经典,而且把几种形式不同但本质一致的东西联系了起来,待到后面讲解可测函数时学生会恍然大悟,原来集合的某种逼近与函数的某种逼近是一致的,正所谓殊途同归。

(责任编辑 王芷)