

数学在高等教育中的作用

The Role of Mathematics in Higher Education

丁石孙

(全国人大副委员长,前北京大学校长 北京 100805)

关于数学在高等教育中的作用,是一个理论性很强的题目。北大没有工科,但有很多非数学专业,笔者在很多专业教过数学,在这里主要根据自己在北大 40 多年教数学的经验,谈点个人的体会。

一、数学不仅仅是知识和工具, 数学对人才的培养成长也有重要作用

数学的作用不局限于它是一门知识,更不仅仅是工具,在整个教育过程中,数学对人才的培养具有很重要的作用。从院系调整以来,我们在高等学校工作的人都知道,数学课程在许多专业的教学计划里增加了,而且本来不需要数学的专业,教学计划里也加了数学。这个现象很值得我们深思。数学的内容在增加、范围在扩大,这说明,越来越多的人认识到数学的用途。

既然数学是有用的,我们就要培养具有创新精神的、能够发现数学如何用于一些学科上的人才。这是高等学校数学教育的一个重要任务。虽然我们培养很多人都达到这个目标、这个标准,但我们应该将其作为一个标准。几十年来,我们常常发现,哪个学科一旦与数学的某个问题挂上了钩,往往就能够得到飞跃的发展。这方面的例子很多。比如,1998 年诺贝尔化学奖获得者大学时念的就是数学。笔者了解了一下,这个人解决的问题是量子化学中的计算问题,这个问题对于研究化学的人很重要。80 年代有个人叫 Hauptment 得了诺贝尔化学奖,他解决的是如何用 X 光确定晶体结构的问题。获诺

贝尔奖以后,他跟人讲,我的化学水平就是大学念了半年普通化学,其它我不懂。实际上,他解决这个问题主要靠的是数学。这就很值得我们深思。数学往往能够对不同的学科起作用,但是,对什么学科起作用、以什么样的方式起作用,并不是我们事先能够预料的。所以我们在安排教学计划时,只把它理解为一种工具是不够的,要从人才、智力的全面成长方面着眼。

二、数学与众多学科的发展、 与种种实践难题的解决有着相辅相成, 互为促进的关系

从科学发展来看,数学和许多学科都发生过密切的关系,数学的发展和许多学科的发展都存在着相辅相成的作用,或者数学的发展促进了其他学科的发展;或者其他学科向数学提出了许多具体问题,结果也推动了数学的发展。关于数学的地位,有的人提出这样一种说法:数学是科学的王后。这个说法很多数学家都不赞成。数学并不是孤立于其他学科高高在上的,而是和其他学科相辅相成、共同促进、共同发展的。把数学与其他学科的关系说成是一种伙伴关系,也许更恰当一些。如果这样来理解数学的地位,我们在安排教学计划时,如何设置数学课程就能把握得准一些。记得北大在讨论教学计划时,对数学应占多少学时的问题、如何设置的问题,经常要发生争论。很多专业觉得,数学挤占他们的学时太多了,或者是觉得他们的专业本身在发

减缓三峡工程和南水北调工程组合运行对长江口生态环境的组合影响,最根本也是最为有效的措施是控制 10~12 月径流的减少幅度。从工程的运行特性分析,将三峡工程的蓄水期提前,进而控制三峡工程 10 月下泄水量的减幅,以及充分利用南水北调工程输水沿线调蓄水体的作用,11~12 月不调水或少调水,都是行之有效的措施。

此外,从长江口地区资源综合利用的需要考

虑,应在长江边或江中建造避咸蓄淡水库,减缓盐水入侵影响;加大受影响农田及拟开发农田的基础设施建设力度,完善排灌系统,保证土壤的脱盐过程;适当提高护岸保滩的设计标准,加快促游围垦的步伐,防止岸滩侵蚀;建立渔业环境和资源的长期监测系统,也是减缓三峡工程和南水北调工程组合运行对长江口地区生态环境影响的有效途径。

(责任编辑 王宏章)

展,要讲的东西太多,所以他们就经常会说:讲这么多数学,对他们的专业没用。很多教师在判断数学对他讲的专业课有用没用时,主要是看数学里讲的某个公式用到没有。这样来理解,就是没有正确地把握数学在整个高等教育中的作用。在此有必要举几个例子,从历史的发展看数学对于推动科学的发展起了什么作用。

第一个例子,是回顾计算机设计思想的产生。我们知道,世界上第一台计算机大概出现在1946年。今天计算机的应用已经深入到社会生活的各个方面。当前我们正在使用的这种计算机(而不是尚在探索的利用生物技术来设计的计算机)最早的设计思想是怎么提出来的?这可以追溯到20世纪初世界第二次数学家大会。1900年,一个大数学家Hilbert在这次数学家大会上作了一个报告,提出了23个问题——这件事数学界都知道。这23个问题一方面总结了19世纪数学的发展,同时更重要的是,指出了20世纪数学应该从哪些方面发展,因此对于20世纪的数学研究产生了很大影响。23个问题中有一个问题,是问有没有一种方法,能够判断一个整系数的多元多项式组有没有有理数解,或者有没有整数解。按照数学的语言来说,就是能不能有个算法。所谓算法就是用一个很死的办法加以判断;不管某个系数是多少、多元多到什么程度,总有个判断方法。这个问题引起了一部分数学家的注意,都想给这个问题一个明确的回答。但是经过了30几年的探索,逐渐发现这个算法大概是没有的。在数学里,你要证明“有”,在某种程度上说还比较容易。要证明“有”,你就得给出一个算法,用这个算法能明确判断就行。但是,你要说“没有”,你就要证明这样的东西是不存在的,这时你对算法仅作上述这样的理解就不行了,而是需要严格说明什么叫“算法”。直到1936年前后,才有数学家给算法下了定义。科学发展中常有这种奇怪的现象,一个问题经过很多年不能解决,但到了某一个时候,同时好几个人以不同的方式解决了这个问题。给算法下定义的情况也是如此。1936年前后,有几个人给出了算法的定义。其中有一种算法的定义,现在叫做Turing机器。当时,Turing机器是个理想的计算机,它已经比较接近现在计算机的设计思想。可以说,Turing机的定义,就是后来的计算机设计思想的重要来源。从这里可以看出来,一开始的时候提出来的是一个纯数学的问题,根本没想到设计计算机。但是你要解决这个问题就必须给算法下个定义。当然后来算法的定义很多了,才证明了所有的算法的定义都是一致的,这是后话。现在能发生这么大作用的计算机,其根源是一个数学问题,而且起初研究这个数学问题时根本没想到会产生这么大的影响。这个例子说明,从一个纯数学问题出发进行研

究,结果不仅解决了这个数学问题,而且对其他学科也产生了推动作用。

第二个例子是群论。现在搞数学的都知道群是什么,但群的定义的出现,是19世纪50年代的事。最早这个问题怎么提出来的呢?是从解方程引出来的。大家知道解一元二次多项式,它的解是

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

这个差不多2000年前就知道了,这是我们学初等数学时都学过的。要把根通过系数表达出来,二次方程就解决了,由此很容易就会想到三次怎么样,就是一元三次方程有没有个类似的公式。差不多到15世纪,三次方程解出来了,那个公式就非常复杂。不久解四次方程的公式也出来了。数学家有个癖好,就是老想推广,既然二次的公式有了,三次的公式有了,四次的公式也有了,那么五次怎么样?大家就想五次也应该有,可是没想到在五次这个问题上遇到了很大的困惑,差不多经过了几百年,一直到19世纪开始都没能解决这个问题。19世纪30年代法国有个年轻的数学家,叫Galois,他提出了一个Galois理论,由此他给出了一个方法,能够判定多少次方程的根能够用系数表达出来。所谓表达出来,就是用加减乘除和开方(不一定开平方)表达出来。这样一来,就提出了“群”的概念,这个问题最终是用“群”的方法解决了。Galois这个人在数学史上是一个传奇式的人物,他死的时候才21岁。他在死的前一天知道自己第二天必死无疑,就把研究结果写给一个朋友,因为第二天他要跟一个军官决斗。Galois的这个结果直到20年之后才得到承认。开始这个结果被送到法国科学院,科学院里一些大科学家认为是理论不清,所以就一直没理。一直到19世纪50年代才正式发表出来,这样“群”的概念就提出来了。群的概念纯粹是从一个数学问题提出来的,但提出之后,首先用来解决的是化合物中晶体究竟有几种的问题。我们知道,大概在19世纪末、20世纪初,一个俄国的化学家就利用群的概念解决了晶体结构有多少种这个问题。他没有涉及晶体的化学性质,所用的只是几何学的理论。现在这个决定晶体究竟有多少种的问题,已经成了数学教科书里很短的一个习题。群的概念一被提出来,人们就发现它非常重要。群的概念实际上是对对称性的一个很好的度量,可以解决对称性用什么来度量,也就是它的变换群是什么结构,有多少。用处非常多,它还被应用到原子物理等许多方面。这又是一个纯粹从数学里提出的问题,但用处远远超出了数学的例子。数学中这样的例子还可以举出很多,包括非欧几何也是这样的。非欧几何也首先是从数学里提出来的,一旦提出来,它对相对论的产生就起了很大的作用。等到发展相对论时,就发现已经有现成的几何学了,可以用了。

下面再举个例子,说明实际的需要怎样促进数学的发展。最早提出博弈论的是 Von Neumann,他写了两本书,统称博弈论。“二战”时德国的空军很强,飞机数量多、质量也好。为了解决如何以自己的劣势空军打败德国空军的问题,美国就找了一批数学家,Von Neumann 是其中之一,他是个大数学家,结果是他从这个问题里发展出了博弈论。打仗可以看成博弈,好像是两方下棋。近几十年来经济学家发现博弈论很重要的一个用途是用来研究经济数学,它已发展成为经济数学的很重要的基础。这是客观需要可以推动数学发展的又一个例子。

再比如现在大家都熟悉的组合数学。记得笔者当学生学习排列组合时,把它当成游戏,觉得很好玩,常把排列组合当成茶余饭后的谈资。姜伯驹教授写过一本书,叫《一笔画》,其中有最早提出来的七桥问题,就是能不能一笔画出七个桥来。而如今,近 50 年来组合数学已经变成数学的一个非常庞大的分支,从事这方面研究的人非常多,达到的程度也非常高了。南开大学陈永川他们成立了一个组合数学研究所,陈教授已搞得很有成果,这同时也说明组合数学受到重视的程度。组合数学所以能够发展,能够从游戏发展为大家认真深入探索的学科,就是因为它有很大的用处。举个最简单的例子,比如电话线的铺设,使所有的城市能通电话,怎么铺设最节省?贝尔电话公司就有一个庞大的实验室,实验室里有一批数学家。有一次贝尔实验室的一个数学家到中国做报告,说过这样的情况:贝尔公司花钱把他们这些数学家雇来,养着他们;某一天总经理跑来说,有这么一个问题你们能不能帮助解决,即要在多个城市铺设电话线,怎么铺设距离最短?他说完就走了,留下问题由这些数学家来考虑。也可能三五年都解决不了,但是一旦解决了,上亿的利润就来了。这反映了社会的需要对数学的推动,这是由数学的特点所决定的,即你很难给出个确定的题目,也很难给出个解决的确定日期。美国五角大楼也养着一批数学家,这些数学家干什么别人不知道,据说里面环境非常宽松,你爱干什么就干什么,在这里你写的数学论文与军事没有关系也无所谓,可照常发表。但是一旦有个实战性问题提出来,数学家就会有各种想法,有时就会把这个问题解决了。这些例子都说明,数学在众多学科当中、在科学里头有它特殊的地位;数学和许多学科都发生关系,而且如何发生关系事先都很难预计。

三、关于数学的研究对象 与数学的定义问题

如果要把上述的数学地位及与多种学科的关系问题搞清楚,就涉及到数学是研究什么的、数学

研究的对象究竟是什么。这个问题是很不容易说清楚的。我们过去说的数学的定义,是恩格斯在《自然辩证法》中提出来的,他说数学是研究客观世界的数量关系和空间形式的。恩格斯的这个定义是 19 世纪提出来的,随着 20 世纪数学的发展,有很多东西这个定义已概括不了了。说到数量关系,就是说数学是研究数的运算,但随着数学的发展,数学运算的对象远远超出了数。刚才谈到群论,它运算的对象是群元素;甚至还有其他的,往往是我们认为与运算毫无关系的,它们也会被数学家结合进来,再由数学家去研究这种“毫无关系”的关系。所以说数学是研究数量关系就已经不够了。关于空间形式,当时把它理解为客观世界的空间形式,就是我们说的三维空间;但是现在我们知道,在几何学研究里,已经远超出了三维,涉及到四维、五维、多维,甚至无限维。所以你再拿 19 世纪的定义来概括数学就显得很不够了。

笔者参加过很多次讨论,商榷如何给数学下定义,但是到现在为止,觉得没有一个定义是满意的。这也说明数学的定义很难下。比如有人提出来,数学是研究量的,要把“数”字去掉。他说若有这个“数”呢,就显得太死了,数就是数、分数。那么什么叫量呢?笔者对提出这个概念的人说过:你说的量是一个哲学概念。现在有人说数学研究的是秩序,也就是说数学的研究是为了给世界以秩序,这种说法虽不是数学语言,但细想想似也有点道理,但是也说不大清楚。不过从这里可以看出一条,数学的研究对象是抽象的,数学与其他的自然科学和社会科学不一样,它们都有非常具体的对象,而数学没有。数学所以既能用到自然科学,又能用到社会科学甚至人文科学,就是因为它是抽象的。数学研究对象的抽象性,这首先就有助于训练我们一种思想方法——抽象思维方法。谈到数学,即使从自然数开始,就已经是非常抽象的概念了,要经过很多层抽象才能够得出数的概念,所以历史上经过了很长的时间,多数和单数才被人们区分开来。你要研究数学发展史,就会发现数的概念的形成是很不容易的。学数学的确可以训练人的抽象思维能力。

抽象这种思想方法为什么这么重要呢?因为我们要把握住一个东西,就必须去掉很多你认为不重要的东西,要舍弃很多非本质的东西,这就必须通过抽象。抽象的思想方法对于研究科学,甚至处理日常生活中出现的问题都是重要的。如果你没有抽象的能力,你就不容易分清你究竟现在要解决的问题是个什么问题。这一点就是数学的一个最突出的特点,即它的抽象性。正是数学的抽象性,才使得数学能广泛地应用于很多方面,应用到完全不同的很多方面。

第二个特点,也由于数学的抽象性,所以对数

学里概念的定义必须讲得非常清楚,即概念定义的严格性。其他学科对定义的要求就不太一样,我们可以描述出大概是个什么东西,听的人就能够明白。可是数学因为它的对象的抽象,所以仅作描述是不行的,必须有严格的定义。数学里的定义非常重要,这一点大家都能体会到。笔者在教学中就发现:由其他系的老师到数学系来讲课,往往会遇到很大的困难,因为经过一段数学学习后,学生对什么都要问个定义,比如物理系的教师来讲课,他讲到“力”,学生就要求给“力”下定义,这就非常困难。老师很难用几句话把“力”刻划清楚。不像数学里讲“圆”,就是从一点出发等距离的轨迹,可以说得很清楚。化学里很多东西也只要描述一下,大家就懂了,并且很清楚,不需要下定义。数学为什么对定义有这么严格的要求?就因为它的对象是抽象的,你不通过定义把它界定清楚,就没法讨论。前面说的算法,如果你不给它一个定义,你就无法论定这个算法是不存在的。所以,数学里的概念要求非常清楚。笔者经常开玩笑说:学数学的人是非常笨的,他听的东西,只要那个定义没说清楚,他就听不懂。从这个意义上说,既有它的好处,也有它的坏处。坏处就是,你什么都要问定义,这也并不科学,因为并不是所有的东西都是可以下定义的。所以,数学的第二个特点就是它要求对概念作非常准确的刻划。

数学的第三个特点是它的逻辑的严格性。因为它是抽象的,所以它的展开只能靠逻辑,这一点对我们说来也是非常重要的训练。对此我们可以从平面几何来理解。学平面几何究竟有什么作用?年轻的时候,也就是念了大学的数学以后,笔者就曾宣称平面几何没有用。50年代,笔者参加过中学数学的教学改革,经常说平面几何应该取消。因为平面几何的一些难题自己不会做,当学生的时候常靠抄才能过关,比如 Simpson 线、九点圆,到现在也不会做。但当过几年教员以后,就发现学生学过平面几何与没有学过平面几何往往有点不一样,比如要证明一个命题,学过平面几何的学生很容易接受,没有学过平面几何的学生接受起来就比较困难。对“文革”期间的学生,你要求他们证明三角形三个角之和等于 180° 这一命题时,他们中很多人就会提出来,这么简单的问题还要证啊!拿量角器量一下不就行了,搞得我们的教员啼笑皆非。这就说明,逻辑思维的能力是需要通过一些具体的东西来培养的,平面几何就是培养人们逻辑思维能力的很好的媒介。

四、数学是理性思维的典型, 是文化的一部分

数学有上面这么三个特点,通过学习数学,就能够获得很好的思想习惯、思想方法,日后会在很多地方无形中起作用。举例说,“文革”中经常要下工厂联系实际,我们中的许多人开始对工厂里的实际问题并不清楚,但是只要你能够把逻辑关系理清楚,就能知道它是个什么问题,已知的条件是什么,要解决的问题是什么。我觉得这正是我们从学习数学中逐渐学到的。数学与其他科学的关系不光是互相促进;重要的一点是,数学给人的不只是知识,而且还有思想方法。我同意一位学者说的,数学实际上是文化的一部分。数学是理性思维的典型,刚才我说的数学的几个特点都是关于理性思维的,因此数学显然是文化的一部分。在中国的传统文里,理性思维是不太受重视的。有人说,西方文艺复兴以后,很多哲学家都喜欢搞个哲学体系,这是他们的习惯。这个习惯好还是不好,另当别论。中国就很不相同,中国很重要的典籍《论语》是语录体,里边很多话是警句,把要点指出来,并没有论述,也不需要论述,你一听就有所体会。这就反映了中国的思想习惯。中国传统的数学书有个特点,就是里面都是例子。比如在中国数学书里很重要的理论孙子剩余定理,就是告诉你三三数之余几、五五数之余几、七七数之余几。它编了个口诀,根据这个口诀你这么一算,数目就出来了。它既没有证明,也没有形成一个体系,这是中国数学的一个特点,也是中国文化的-一个特点。记得在一次国际学术会议上,我就以这个例子来讲了中国文化和西方文艺复兴以后的文化的区别。

数学是文化的一部分,数学中体现的是一种思维的模式,数学学习也是训练人的逻辑思维能力的一种重要方式。过去我们在教学改革中曾经提出,可以通过上逻辑课来直接获得逻辑思维能力,在中学还专门开了形式逻辑课,但最后证明效果很差,关于逻辑思想的一些规律讲了半天学生也听不懂,更不会用,后来才承认人的逻辑思维能力是不能通过上逻辑课来培养的。平面几何最大的好处,是它的内容非常直观,通过平面几何这个载体可以有效地培养人的逻辑思维能力。数学理论逻辑非常严密,但你无法把逻辑从具体内容中抽出来单独讲,这样谁也听不懂,也学不会。通过数学的学习,逻辑思维能力慢慢就提高了。所以,笔者很同意数学是文化的一部分这个见解。通过数学的学习,可以培养人的能力,也可以提高人的素质。大学里权衡数学课的设置时,应该把这方面的因素考虑进去。

不同专业的教学计划,都涉及数学课安排多少的问题。数学课不是越多越好,因为大学里总的教学时间是有限的。应该从两方面来考虑数学课程,一是数学在这个专业有没有用、用多少,用得多的就要多教;二是还要顾及到数学是一个整体,学习

双轨制——WTO 后高等学校入学与学费政策及其对社会公平的促进

Two Criteria: University Entrance and Tuition Policy after China's Entry into WTO and Its Effect on Promotion of Social Equity

卢晓东

(北京大学教务部 北京 100871)

我国加入 WTO 之前,国内外教育服务市场已经逐渐开始结合,教育主体间的竞争日趋激烈,在国内无法购买到满意教育服务的家庭,已经可以较方便地在国外购买,这一点可以从全国各地举办的海外留学展上,清楚地感觉到。目前在中国大力拓展高等教育服务市场的国家包括澳大利亚、新西兰、英国、德国、法国、加拿大、美国、俄罗斯、荷兰等。由于服务业在世界经济中所占地位日益重要,乌拉圭回合经多年谈判,达成“服务贸易总协定”(General Agreement on Trade in Services, GATS),它为 WTO 基础性协议之一。GATS 对服务贸易部门的分

类以《联合国中心产品分类系统》为基础,确定了 12 个服务部门,并进一步细分为 160 个分部门或独立的服务活动。教育服务(Educational Services)被列为 12 个部门之一,它包括初等教育服务、中等教育服务、高等教育服务、成人教育服务以及其他教育服务 5 个分部门。从贸易效果看,仅美国就有 35 万名来自发展中国家的本科生和研究生,他们每年的全部费用大约是 100 亿美元,超过了世界上半数国家的国民生产总值^[1]。我国虽未在教育服务领域作出任何承诺,但逐步增加的海外留学人数,极易导致我国在教育服务贸易领域出现逆差。据英国驻华大

数学可以培养思想方法。为了培养思想方法,你就不能用什么教什么。这种情况过去是有的,在“文革”中曾经搞过所谓数学结合专业讲。专业里用到什么就讲什么,把数学割裂开来,完全当成工具,这样是学不好数学的。所以数学课程的设置,既要考虑到用,又要考虑到数学是一个完整的体系,要使学生对数学的整个结构有比较清楚的了解。用得着的东西要讲,但也不是所有用得着的东西都要讲。数学知识可以分两种,一种是比较基础的,一定要学通;还有一种不那么基础,这些等到你用的时候再学还来得及。比如十几年前,大家都感到计算机的用途越来越广,于是就学习计算机语言。计算机语言要学一点,但是后来的经验是,语言学多了也没有用。语言有个特点,学了不用很快就会忘。还有一点就是,计算机技术发展很快,使得人与计算机的联系越来越多,人机界面也越来越“友好”,学起来也更容易了。80 年代研究中学教材时曾有一个方案,要在中学教材里讲二进制,因为计算机用的是二进制。当时笔者就不太同意,提出二进制等用到的时候再学也可以,因为学起来很快,如果学了不用又会忘掉。现在来看,使用计算机根本不用管它二进制的的问题。所以,不那么基础的东西,随时学还来得及。数学不是讲得越多越好,确实要考虑到

数学与本专业的联系;同时,还要考虑到数学自身的体系、功能,要讲得系统一些。讲得系统,也不是说要讲得非常多。比如最近北大有位教授就反对高等数学一开始就花很多时间讲“连续性”的性质和“实数”理论。对此笔者是同意的,因为很多东西尽管形成了一套理论,但后来证明这套理论对实用并不是太重要,并不能培养人的很多能力,这些东西就可以不讲。

概括起来说,数学不只是知识,它同时培养人的能力、提高人的素质。素质这个概念说起来就虚一点。有的数学同行经常说数学是美的享受,这话说是可以说的,但不能过分夸大。不管怎么说,数学是一门很特殊的科学,它能给人一种无形中的影响。这一点好像更有意义。

以上讲的主要是自己多年教书的体会,有些体会来自学生反馈的信息。他们毕业已经好多年了,并且完全改了行,见面后告诉笔者,在大学一年级时听过我的课,那些公式、定理他们早就不记得了,但是在我的课上学会了一些分析问题的方法,这些方法能够使他们长期受益。记得有位数学家讲过这样一句话,今天数学教育的质量,决定着明天科学人才的水平。笔者把这句话介绍给大家,也引为本文的结语。(责任编辑 蔡德诚)