

数学的现代发展与数学教育

Contemporary Development and Education of Mathematics

孙小礼 杜 珣

(北京大学数学系,教授)

提 要 现代数学发展及其特征:走向更加高度的抽象和统一,各分支相互渗透和结合,数学的公理化和结构分析,数学被广泛应用且数学模型复杂化(从单变量到多变量,从低维到高维;从线性到非线性,从局部到整体;从连续到间断,从稳定到分歧;从精确到模糊),计算机正在改变数学的面貌。在21世纪末以前有可能实现怀特海的预言:在人类思想领域里具有压倒性的新的情况,将是数学地理解问题占统治地位。为此必须加强和普及现代数学教育。

纵观数学的历史发展,可以清楚地划分为初等数学、高等数学和现代数学三个阶段。从古代到17世纪初为初等数学阶段,从17世纪初到19世纪末为高等数学阶段。从19世纪末开始,数学进入了现代数学阶段。

按照传统的、经典的说法,数学是研究数量关系和空间形式的科学,或者简略地说,是研究数和形的科学。然而作为数学研究对象的数和形,在三个阶段里是很不相同的。在初等数学阶段,数是常量,形是孤立的、简单的几何形体。初等数学分别研究常量间的代数运算和几何形体内部以及相互间的对应关系,形成了代数和几何两大领域。高等数学阶段以笛卡儿建立解析几何(1637年)为起点,17世纪80年代微积分的建立是这一阶段最显赫的成就和标志。在高等数学阶段,数是变量,形是曲线和曲面,高等数学研究它们之间各种函数关系和变换关系。这时数和形开始紧密联系起来,但是大体上还是各成系统的,由于发韧于微积分的分析数学的兴起和发展,使数学形成为代数、几何、分析三大领域。现代数学阶段以康托尔建立集合论(1874年)为起点,20世纪以后,用公理化体系和结构观念来统观数学,成为这一阶段的明显标志。现代数学的研究对象是一般的集合、各种空间和流形。它们都能用集合和映射的概念统一起来,很难区分哪个属于数的范畴,哪个属于形的范

畴了。

以下我们从五个方面概述现代数学的发展及其特点。

1. 现代数学走向更加高度的抽象和统一

抽象性是数学这门科学的一个最基本,最显著的特点。在初等数学所研究的一般的数和一般的形中就已明显地体现出来。而现代数学则更加充分和更加积极主动地体现和发挥着这一特点。现代数学的研究对象、研究内容和研究方法都呈现出高度的抽象和统一。

所谓抽象和统一,就是把不同对象中共同的、本质的东西抽象出来,作为高一层次的对象加以研究,从而就把原来许多不同的对象统一起来,求得共同的本质的规律。人们都熟悉的一个简单例子是,各种各样的算术应用问题可以用代数统一起来,学会代数就成为掌握算术的最好办法。

抽象和统一是一个完整概念的两个方面。为了统一必须抽象,有了抽象就能统一,并能扩大对象范围。“集合”概念是对数学所研究的各种对象的一种抽象。而一般的集合又成为现代数学的研究对象。因此,现代数学就能把数学的各个不同领域都统一起来了,并且极大地扩展了数学的研究

范围。

在以前的数学发展中,抽象的进度是比较缓慢的。只是在对原来层次的研究已充分详尽地展开,客观上实有必要时才进入更高层次的研究。现代数学的发展状况则完全不是这样,抽象的速度大大加快了。正如数学家卢米斯(L. Loomis)在其《近代微积分教程》中所说的:“现代数学的特点之一,就是当一种新的数学对象刚刚定义和讨论不多时,就立即考查全体这样对象的集合”。向高一层次作抽象正是研究原来层次对象的一个重要方法。

我们说现代数学呈现着高度的抽象和统一,“高度”的含意是指它不断地和积极主动地向更高层次作抽象,数学家们自觉地,运用自如地发挥着抽象性的特点和威力。

以代数学学科的发展为例。算术发展了好几千年才出现小代数,以解一次和二次方程为主。经过近千年的时间才有16世纪的大代数,以解高次方程和线性方程组为主。再经过300年,出现了19世纪的高等代数,研究矩阵、置换群、数域等具体代数结构。又发展了100年,到了抽象代数,又称近世代数,用公理体系的统一观点研究群、环、域、线性空间等各种代数系统。时过几十年,在20世纪40年代以后就出现了泛代数,以一般的代数系统为研究对象。每出现一种新代数都表现出层次更高、更加抽象和统一,而且抽象化的进度越来越快。其它数学领域的发展也都有类似的进程。

2. 数学各分支的相互渗透和结合

1900年,希尔伯特在其著名演讲中指出:“数学科学是一个不可分割的有机整体,它的生命力正是在于各个部分之间的联系”。现代数学最显著的特征之一是不同数学分支间的互相渗透和结合,发展出许多新的数学分支。象“代数几何”、“代数拓扑”、“微分拓扑”、“积分几何”等的产生,顾名思义,就可看出它们是哪些不同学科相结合的产物。

数学中不同分支和不同领域间的相互结合和渗透,使得现代数学完全改变了经典数学中代数、几何、分析三足鼎立的局面。本来三者各自形成独立的体系,各有其独特的研究方法。代数方法注重公理体系结构,几何方法富有几何直观性,分析方法则以精细的分析见长。现代数学则把三者结合起来,综合运用代数、几何和分析的研究方法。“泛函分析”,作为现代数学的基础之一和主要研究领域之一,就最充分地显示了这三种方法综合运用的卓越成效。其它一些领域也是如此。

一些看来相距甚远,甚至方向相反的不同数学领域,现在已有密切联系。研究有限量的离散数学如数论、代数等,与研究无限的连续性数学如微

积分、拓扑等是两个对立的方向,而“解析数论”、“代数拓扑”等学科的建立则把两者结合起来了。数学的发展证明,离散数学和连续数学是互相关联、互相促进的,它们之间的界限也变得不那么分明了。今天连续性问题的解决离不开离散性的计算机,而许多离散现象的重要结果也需要运用分析的方法给出证明。

研究确定性现象的数学如微分方程、微分动力系统和研究随机性现象的数学如概率论、数理统计也是方向相反而又互相关联的,并且随着各自的发展,越来越表现出互相结合的趋势。研究随机现象和过程的数学离不开确定数学作为工具,而且这种倚赖的广度和深度日益增加,从而导致了一系列确定数学分支的随机化,如随机微分方程、随机泛函分析、随机线性算子等等相继出现。另一方面,随机数学也为确定数学提供工具和技巧,例如40年代提出的蒙特卡罗法,随着计算机的发展其应用愈来愈广泛。

3. 数学的公理化和结构分析

所谓公理化方法就是以尽可能少的原始概念和不加证明的公理为基础,运用逻辑推理来建立演绎的科学理论。这是古希腊数学家欧几里得在《几何原本》中首创的,但其公理化体系是不够完善的。1899年希尔伯特的《几何基础》出版,他为几何学建立了严密的公理化体系,由此创导了现代公理化方法。

希尔伯特的现代公理化方法对欧几里得的公理化方法有两个最重大的改进,一个是明确提出公理体系中的原始概念是不加定义的,他说:“可以用桌子、椅子、啤酒来代替点、线、面”,这样就使公理化体系达到了更高度的抽象,应用范围更加广泛。另一个是明确提出公理系统为三大基本要求,即相容性、独立性和完备性。20世纪以来,数学家们以希尔伯特的几何公理化系统为楷模,努力为各个数学分支建立公理化体系。

公理化方法,不仅能系统地总结数学知识,清楚地揭示数学的理论基础,有利于比较各种数学分支的本质异同,并能促进新数学理论的建立和发展。最突出的例子就是欧氏几何与非欧几何的天壤之别,根源仅在于一条平行公理的不同。也就是说,在欧氏几何中,改换一条平行公理,就能导致非欧几何的建立。

形成于20世纪30年代的法国数学团体布尔巴基学派,以康托尔的集合论为出发点,系统地运用希尔伯特的公理化思想方法,全面地比较了各个数学分支的公理体系结构。他们提出用“结构”的观点统观数学,按照结构的不同及其联系对数学加以分类和重建。他们认为“数学,至少纯粹数学,是研究抽象结构的理论”。这一观点对现代数

学的发展有至为深巨的影响。

所谓“数学结构”，是指由遵从一些公理的集合和映射所组成的系统。布尔巴基学派提出了数学中的三种基本结构，即序结构、代数结构和拓扑结构。后来数学家们认为测度结构也是一种基本结构。对这些基本结构作交错复合可派生出许许多多不同的数学结构。比如序结构中有偏序、全序等，代数结构中有群、域、线性空间等，拓扑结构中有距离空间、拓扑空间等。全序域、拓扑群、线性距离空间都是两种基本结构的复合，而“有序线性距离空间”则是三种基本结构的复合。

结构是“数学家的工具”。按照结构分析来划分和概括数学各分支的研究领域，不但使数学形成统一的整体，而且能清楚地看出各不同分支间的相互联系。结构的观点也有助于推导数学理论和解决数学问题。我们一旦认识到所研究的对象满足某种结构，就立即可以运用那种结构领域里的概念和定理来研究问题。布尔巴基学派在现代数学的众多领域都做出了重要贡献，这与他们掌握和运用结构这个现代数学的思想和工具是分不开的。

由上述四种基本结构和由它们派生的数学结构，并不能把现有的一切数学分支都概括无遗。这有待于未概括进去的那些数学分支的发展成熟和建立公理化体系，还有待于新的基本结构的提出。布尔巴基学派曾宣称：“无论在数量方面还是在本质方面，结构都不是始终不变的……数学的进一步发展将导致基本结构的数量的增长”。数学家麦克莱恩(S. MacLane)认为“数学的重点在发现那些有广泛应用以及反映了世界的深层内涵的结构”。

4. 数学的广泛应用与数学模型的复杂化

正因为现代数学的抽象化程度越来越高，其内容和方法日趋综合和统一，使数学的应用也越来越广泛了。数学已不再只有物理和工程这两大基本用户。在现代科学和技术的各个领域乃至社会科学的一些领域，都需要运用数学这一基本工具。如果说在19世纪，数学在生物学中的应用等于零，那么，现在数学在生物科学各分支中的成功应用已使数学生物学成为应用数学最振奋人心的前沿之一，正是数学帮助人们把生物学的研究推到了了解生命和智力这样的新前沿。

1984年美国一个由数学家和有关专家组成的专门委员会提出“进一步繁荣美国数学”的报告，其中指出“高科技的出现把我们的社会推进到数学工程技术的新时代”。这个专门委员会的主席、应用数学家戴维(E. David)指出“很少有人认识到被如此称颂的高技术本质上是一种数学技术”。这些提法令人瞩目，点出了高科技与数学的

内在联系。有一些科学家明确认为：现代科学技术的巨大发展主要地是由于数学的现代发展，是由于数学在自然科学和社会科学中的纵横渗透。

数学在社会科学中的运用，最突出的是经济学。甚至有人认为现今的经济学实际上是应用数学的一个分支。过去一向以为与数学无缘的考古学、语言学、心理学等也都成为数学大显身手的领域，出现了“史衡学”(Cliometrics)、数理语言学、数理心理学等等新学科。数学的广泛而又深刻的影响使人感到“人类的智力活动中未受数学科学的影响而人为改观的领域已寥寥无几了”。

现代科学正在向复杂性进军，人们的研究对象愈来愈复杂。在运用数学方法研究复杂问题时，关键在于能够建立既能反映问题本质，又是简化了的数学模型。简化是为了便于进行数学处理，然而过于简化，忽略的因素太多，则与实际偏离太远，难以刻划问题的本质。因此，适应现代科学研究的需要，数学模型从简单走向复杂已成为现代数学的一种不可逆转的发展趋势。

数学模型的复杂化有以下种种表现：

(1) 从单变量到多变量，从低维到高维。由于参数、变量、维数从一到多、从低到高，不但计算的量急剧增大，而且往往产生一些质的差别，与此相应发展起来数学中的新学科如多线性代数、多复变函数、多元统计分析等等。多元和高维的情形正是当前数学家的一个重点工作领域。目前又出现了饶有兴趣的分维几何。

(2) 从线性到非线性，从局部到整体。事物的运动和变化一般是非线性的，但在局部范围和平缓变化的情况下，为了简化问题可以看成是线性的。线性化的数学模型一直得到广泛的研究和应用。然而要研究大范围、大变形、大扰动、高速度、高精度、高能、强力等情形的问题，则无一不涉及非线性现象。非线性问题的研究比线性问题困难得多，已成为当前数学研究的一个主要内容，从局部性态和结构的研究转向整体性态和结构的研究，也是现代数学发展的一个趋势。

(3) 从连续到间断，从稳定到分歧。事物在经过一段时间的连续变化以后发生突变，从一种状态跳跃到另一种状态，如物态的相变、固体的断裂、气体的激波，等等。1969年法国数学家汤姆(R. Thom)提出了描述突变现象的数学模型，诞生了“突变理论”这一新数学学科。

在含有参数的动力体系中，随着参数的变化，平衡状态的个数由一个分裂为两个或多个的现象称为“分歧”。逐次分歧又会导致向混沌的过渡，混沌并不借助于随机的外因，而是由非线性系统本身自发产生的内在随机性。突变、分歧、混沌都是普遍存在的现象，已成为当今数学、力学和物理学

的热门研究课题。

(4) 从精确到模糊。现代数学建立在集合论的基础上,一个元素属于或不属于一个集合是完全确定的,不能用它来描述普遍存在的模糊现象。1965年美国数学家扎德赫(L. Zadeh)建立起“模糊集合”,标志着模糊数学的诞生。它发展很快,现已渗透到许多数学分支。模糊数学的研究有利于对自然界和社会中的模糊现象定量化,是很有实际意义的。

(5) 其它诸如从静态到动态、从平衡到非平衡、从光滑分析到非光滑分析、从适定问题到不定问题,从固定边条件到活动与自由边条件,等等,都是从实际问题中提出来的,都使数学模型复杂化。

5. 计算机正在改变数学的面貌

电子计算机的出现是20世纪人类科学最重大成就之一。它从两个方面冲击、影响和促进着现代数学的发展,从而改变着数学科学本身的特点和面貌。

一方面,计算机强大的计算能力使数学如虎添翼,比以前任何时候都更具有威力和渗透力。一些比较复杂的数学模型由于求解困难或计算量过大而不易处理和运用,现在可依靠计算机直接给出其数值解答。这样,不但极大地扩展了数学的应用范围,也改变了人们对数学问题求解的观念。过去认为获得解的分析表达式才是满意的解。现在则认为应对数学问题寻求一种算法,输入计算机后将给出所需要的数值解。于是,各种算法、各种程序和软件的研究便迅速发展起来,并可直接投入科技生产中去。

计算机也改变了数学应用的实践方式。比如天文学中超新星的爆发过程,地质学中的地壳运动,都难以在实验室里进行实验,却可以用计算机通过数学模型来模拟,从而对各种理论解释进行检验。又如工程技术中一些新设计,也可用计算机模拟来预测其新性能,从而得知怎样改进和优化。因此,人们认为,科学研究除了传统的理论工作和实验工作外,还出现了“计算机实验”或“数学实验”。数学实验与实际实验相比,在多、快、好、省方面都有很大的优越性,因此一些实际实验正被数学实验所取代。

另一方面,计算机给数学理论研究提出了一系列新课题,如符号计算、程序化、机器证明、计算实验、数值软件和人工智能,等等。这些新课题的研究,将日益开发和扩大计算机的功能,从而进一步解放人的大脑。计算机还给数学理论研究提供了新方法。计算机不仅用于计算,还能进行定理的证明。特别是在数学研究的探索和归纳阶段,计算机成为非常有效的助手,它帮助数学家从大量的

原始数据资料中去筛选素材,检验猜想,用图象显示信息,指出进一步理解和前进的道路。总之,计算机结束了长期以来数学工作者的工具只是纸和笔,而进入了数学成果的机器生产的时代。

二

随着数学的迅速发展和广泛应用,社会的数学化程度正在日益提高。在各种社会系统中运用数学方法进行定量决策,正在成为当今社会决策和管理的主流。如果说,以前在人们的社会生活中,在商业交往中,会运用初等数学语言就够了,高等数学一般被认为是高深的科学语言。那么,在今天,只懂初等数学就会感到远远不够用了。事实上,高等数学的语言正在越来越多地渗透到现代社会生活的各个方面和各种信息系统中,而现代数学概念(如算子、泛函、空间、拓扑、张量、流形等)已开始大量地出现在科学技术文献中,日渐成为现代的科学语言。

英国数学家兼哲学家怀特海在1939年所作的一篇题为“数学与善”的演讲中曾经预言:“在人类思想领域里具有压倒性的新的情况,将是数学地理解问题占统治地位。”几十年来,科学技术以空前的速度大踏步前进,以计算机为标志的信息时代的到来更加促进数学的发展和应用,使人们从来没有象现在这样日益需要进行数学式的思维。所以,可以设想,怀特海的预言有可能在百年之内即21世纪末以前实现。

所谓数学地理解问题,就是指数学的思考方式,它包括诸如建立模型、抽象化、优化、逻辑分析、推理计算、从数据进行推断,以及符号化,等等。这些数学思考方式的经验和能力,是人类的智慧和创造。然而,这种能力并不是人们天生就具有的,需要通过数学教育加以培养、锻炼和提高。

数学教育的重要性已被越来越多的人所认识。现在,世界各国都比过去更加重视数学教育,并且着力进行数学教育的改革,以适应社会发展的需要。1984年在美国的一份报告里指出:“在现今这个技术发达的社会里,扫除数学盲的任务已经代替了昔日扫除文盲的任务,而成为当今教育的重要目标。”不久前,美国劳工部指出,美国高中毕业生还不具备一个现代工人所需要的“思考技能”。在美国国家研究委员会的一份报告里提出要从根本上改革大学生的数学教育,要把数学教育质量提高到国家数学研究水平”。

好些发达国家,自60年代起,已开始用现代数学的观点和精神对大学以至中小学的数学教学进行现代化改革,并纷纷对大学理工科学生开设泛

(下转第59页)

来的。然而这种经验性方法也有其局限性,其关键在于前兆机制不清楚。震前观测到的异常现象中,既包含了地震前兆信息,也包含了大量的噪音。异常不等于前兆。在某些个别地震出现的异常未必与地震有关,即使和某次特殊地震有联系,也未必是许多地震的共性。如何从异常中提取前兆,目前尚无办法。1976年唐山地震预测的失败,其原因也在于此。

结 语

天然地震是地球演化发展过程中的一种自然事件。然而,对于发生在人类栖息地的破坏性地震来说,它同时又构成了一个社会事件。现代地震学是一门以观测为基础的科学。在众多的地球科学中,地震学可以说是处于一个特殊位置。首先,它只同地球内部的力学性质和动力学过程有关。其次,地震波能够使我们最大限度地了解地球内部的情况。地震灾害的惨烈使人类不得不从事防震抗震以及地震预报的研究。有关地震预测成功的例子是稀少的,但是这并不能动摇地震工作者预测地震的使命感。19世纪尼采在其著作《查拉斯图如是说》中,曾把地震喻为诸神在大地的桌面上所掷的骰子,然而经过几个世纪的努力,人类已积累了大量的地震知识。虽然这些知识尚不足以完全揭开地震之谜,但曙色已显现在地平线上。我们能够预报一些地震,却不能预测大多数地震。虽然失败与成功并存的局面目前不会改观,但随着实践经验的积累,理论和实际工作的深入,取得成功的机会将会有所增加。

本世纪最后十年,是国际减轻自然灾害的十年,也是中国大陆地震活动呈起伏增长的十年。大陆地震多属于板块内部地震,其发生环境、孕育过程更为复杂,对人类的威胁也更大。这给从事地震研究的科学家既带来了机遇,更带来了挑战。地震研究已非单纯的科学问题,它同时兼有强烈的社会性。地震预报的高度探索性和对预报要求的迫切性这一点在中国尤为突出。可以预料,地震科学将会成为与其他学科交叉渗透最广泛、最深入的领域之一。
(责任编辑 宋义荣)

(上接第27页)

荫,形成世界性的大气候。

绿色市场的出现标志着人类正探讨、摸索一种同自己的生存环境和谐相处,同步前进的物质文明发展道路,它具有深远的意义。因此,它将会成长、壮大、完善、扩展。谁若是无视这一新生事物严肃的内涵和深远的意义,拒绝在企业决策管理思想上来一个相应的转变,并付诸实际行动,他就会犯下历史性的错误。有一天他会发现自己领导的企业竟是那么缺乏生存能力,他的产品难以挤

进成了气候的世界绿色市场,“外向型经济”将成为海市蜃楼;在国内,生态观也终有一天会走向社会化,广大消费者的生态觉醒也会引导他们抵制非绿色产品。到那一天,产品不符合生态学的要求也会成为企业破产、倒闭的根源之一。

绿色市场从端倪初露到形成气候,可能是个较长的过程;然而,工业发展与生态科学的结合融汇,企业决策管理思想的转变,生产技术的相应变革,并反映到合格绿色产品的普遍推出,这对一个起步已经滞后的国家或企业而言,则是一个相对更长的过程。如果不及早前瞻,及早起步,等到世界绿色市场形成了气候,自己的产品里外碰壁的时候才“急刹车”,“急转弯”,手忙脚乱,“狼抓”、“猛抓”,就为时太晚了。(责任编辑 蔡德诚)

(上接第49页)

函分析、拓扑学、张量与流形等课程,而这些课程过去只是数学专业的学生才学的。微积分则从大学移至中学学习。

我国目前的数学教育,小学和中学的数学课程内容大体上属于初等数学阶段;大学数学课程(如理工科的“高等数学”、“工程数学”、“数学物理方法”等)的内容大体上属于高等数学阶段。也就是说,接受了大学数学教育,大体上只是掌握了19世纪末以前的数学基本知识,对现代数学几乎没有接触。因此具有大学文化水平的许多科学技术人员对于阅读本专业的现代文献已感到困难。如果不掌握现代数学的基本概念和知识,则难以从事现代水平的科学研究。

如前所述,现代数学与经典数学相比,从研究对象、内容、方法到实际应用,都有许多新的特点。如果我们的数学教学还停留在经典数学阶段,既大大落后于现代数学和科技的发展,更不适应培养现代化人才的需要。80年代以来,在我国虽然已经开始注意和重视现代数学教育问题,然而实际进行的工作尚少。我们呼吁数学界的同行们,支持和扶植已经开始的一些有益的尝试和努力,群策群力,采用各种形式在大学生和科技人员中传播现代数学,并希望教育界、学术界和文化出版界等有关部门和领导都能来关心和研究如何在我国切实地逐步地加强和普及现代数学教育,以期在迎接21世纪到来的时候,把我国的数学教育提高到适应时代需要的现代化水平。

1988年夏在南开数学研究所举行的“21世纪中国数学展望学术讨论会”上由程民德教授作了主题报告。他在报告中详尽地分析了发挥我国数学潜力,使数学率先赶上世界先进水平的可能性和必要性;并从国民经济、高技术工业、决策科学以及人才培养等多方面的实际需要,说明“宏伟的现代化建设在呼唤高水平的现代数学”。

(责任编辑 蔡德诚)