

生态学中的分形奇葩

The Art of Fractal in Ecology

王本楠

(中国科学院生态环境研究中心, 副研究员)

施寅

(北方工业大学计算机中心)

曼德布罗 (Mandelbrot) 经过几十年艰苦探索开创了分形几何 (Fractal Geometry) 的新领域。分形一大特征就是在放大过程中系统呈现出的自相似性结构, 或者说无特征长度的标度不变性。

从一个简单的复二次迭代公式:

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C$$

出发, 根据其是否收敛, 或收敛快慢赋予不同颜色所做的计算机造形, 即美丽的曼德布罗集 (M-集) 和尤利亚集 (J-集), 引起了全社会的关注。这些图案简直成了一种新形艺术, 在全世界大大小小刊物上介绍。为此曼德布罗本人还获得了法国 1988 年的“科学为艺术”大奖。

此后, 美丽的分形图案时有报道。例如, D.C. Arney 和 B.T. Robinson 发表的牛顿法求方程近似根所构造的图案, 以及日本的川部健和近腾芳朗的对数公式所给出的图案。

下面介绍一下笔者在分形领域的最新探索。即在生态学模型中所发现的多重分形结构。分形图展现出迄今未曾见到的奇特而美丽的图案。这种新的分形奇葩展现出比以往熟知的分形图更为丰富的内容。再者, 由于它不是从一个虚构的公式, 而是从一个真实的生态学模型出发, 其意义更加突出, 而在自然界可以找到较为具体的解释。

—

根据大约 18 年的观察资料, Milton 等人设计了一个北美鹌种群动态的非线性生态模型:

$$X_{s+1} = X_s \left(K_1 + \frac{K_2}{1 + X_s^n} \right) \quad (1)$$

该模型的非零平衡解为:

$$X^* = \sqrt[n]{\frac{K_1 + K_2 - 1}{1 - K_1}} \quad (2)$$

限制在实数范围中, 关于该模型的一系列性质, 例如分岔、混沌, Milton 等有较为全面的讨论。我们的研究是把模型扩充到复数领域之中, 从而得到了模型的多重分维结构。

不失一般性, 限制平衡点根号下的值为 1。即 $(K_1 + K_2 - 1) / (1 - K_1) = 1$ 或 $K_2 = Z(1 - K_1)$ 。这样一来, 平衡解为 1 的 n 次单位根。

对于确定的 n , 适当地选择参数 K_1 和 K_2 , 该方程在全平面上收敛。换言之, 对于任意复数 $z_0 = x_0 + y_0 i$, 方程 (1) 的迭代结果必收敛到平衡点 X^* 。但是, 不同的 z_0 将收敛到不同的根 (n 个单位根之一)。这就是说, n 个吸引子把平面分为 n 个吸引区。在探讨这 n 个吸引区在平面上划分的时候, 我们进入了奇境。

二

为了讨论吸引区的平面分布, 我们做了计算机的屏幕造形。

设计计算机屏幕为一个复数区域 R 。以不同颜色代表不同根 (例如, 在 $n=4$ 时, 由四种颜色分别区分四个单位根)。以任一复数 $z \in R$ 做为初值, 做方程 (1) 的迭代运算。在收敛情况下, 其极限值将为一个确定的单位根 (n 个根之一), 则赋予此点 z 以此根的颜色; 如果收敛到别的根, 则 z 即赋予别的根的颜色。于是, 在计算机屏幕上构图则显示出一张由 n 种颜色组成的图案。这个图案就是方程 (1) 的 n

个平衡点(Z)吸引区的分区图。

我们会看到,对于生态学模型(1),计算机图形描绘出一幅幅我们迄今未曾见过的奇特而美丽的分形图案,这是我们未曾料到的。这种生态学中的分形奇葩包含着无比丰富的内容,令人寻味无穷。

由于生态学中分形的发现,使得分形科学引发的分形艺术进入了真实的自然界之中。

这里提供的几张彩图(见彩页)是将Silicon Graphics工作站屏幕显示以普通照象机拍摄下来的。计算程序以C—语言编写,图型为 1024×1024 分辨率。

三

1. 令 $n=4$,此时有四个平衡解,即1的四个单位根 $\pm 1, \pm i$ 。收敛图示于图1,其中 $k_1 = 0.25, k_2 = 1.5$;区域 R 是 $-13 \leq x \leq 13, -13 \leq y \leq 13$ 。由于它的分形结构,不同的 R 可以显出相同的图形。例如,如果取 R 为 $-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2$ 或者任意一个越来越靠近原点的小区域,其结构完全相同。换言之,图形是无特征尺度的。

大体说来,由两条直线 $x=y, x=-y$ (更确切地说是四条射线——参见 $n=5$ 的情况)把平面分为四个部分(四种颜色)。各个部分就是1的相应单位根的吸引区间。换言之,四个区域收敛到各自相应的平衡根($\pm 1, \pm i$ 之一)。但是,在两条直线附近,图形表现出“混沌”行为。图形关于这两条直线严格对称。

大大小小结构相同的单元(圆圈)按一定规律在两条直线上排列,这构成该图形的基本结构(参见以后的图)。每一个单元,不论其大小,身上又附着了大大小小的子单元;它们同母单元有着相同的结构;这样子单元又由不同规模的子—子单元组成。形成一个无穷序列。这样的结构可以在轴线上任意位置,任意小的尺度上出现。换言之,我们任意把某一小段放大,都可以看出相同的结构。不单如此,这样的结构可以在圆圈的任一段弧上出现。换言之,单元或子单元等的弧线与轴线有着相同的结构。另一方面我们还看出,任意一个交点又把平面分为四部分,同原点的作用一样。这一切就构成本图的复杂多变的自相似结构。

2. 设 $n=5$,此时平衡点有五个,它们分别是1的五个单位根,它们在单位圆上均匀分布,等分圆周。

图2是 $k_1 = 0.25, k_2 = 1.5$ 时的收敛图。图3是其一个单元的放大。仔细地观察这两张图,前面提到分形结构就更为明显了。自原点由5条射线分

平面为五等分,分属五个不同吸引区。而任意单元,或子单元与单元之孤相交点也把平面分为五个部分。换言之,绕任意交点一周都经过五种不同颜色。

3. 设 $n=6$,平衡点由六个单位根构成。图4是 $k_1 = 0.25, k_2 = 1.5$ 时的收敛图。图5是一个单元的放大图。

由三条直线($x=0, x=\pm \frac{\sqrt{3}}{2}y$),或六条射线把平面分为六个部分,在这三条线上图形表现出混沌行为。

4. $n=8$ 时的收敛图示于图6。图7是 $n=12$ 的情况;图8是它的一个单元放大。可以看出,随着 n 的增加,图形越来越复杂,也越来越美。但是,其基本结构特性相似。

四

这些奇妙的美丽图案表现了生态学中的分形特征;表现出比以往分形图更为丰富的内容。这不是一个简单的分形问题。它具有多重维数的特性,是一个多重分形(Multi Fractal)的具体表现。在这里至少可以识别出四种不同的自相似性:

1. 在原点附近图形的自相似性。该图案在原点附近以任意小的尺度重复整个图形。换言之,取原点的一个任意小的邻域放大可以得到原来的整个的分形结构。无穷无尽。

2. 在轴线上,或者在每个单元,子单元的孤线上,任取一微小线段放大将得到相同的图案。换言之,尤利亚集的分形自相似性在任意部分有所表现。

3. 任意单元,或子单元,不论其位置,不论其大小具有相似的几何结构。

4. 任意交点,不论是单元与轴线的交点,还是单元与附着在身上的子单元的交点,总而言之,凡图形的交点,起着同原点相同的作用。换言之,在交点附近的一个微小邻域内放大后,可以得到同原来整个图形完全一样的图案。这一点在图3($n=5$)和图5($n=6$)的放大图上可以很清楚的看出。

我们还对不同的参数值作了计算实验。已知 k_1, k_2 的变化将改变单元在图案中的比例。对于较大的 n (例如 $n=12$),较大的 k_1 会导致图形在全平面上的混沌现象,即几乎看不出明确的单元。但是,有很多问题尚有待进一步探讨,例如,计算其维数。至今,我们除了用计算机实验外,尚不知道如何求得它的维数。

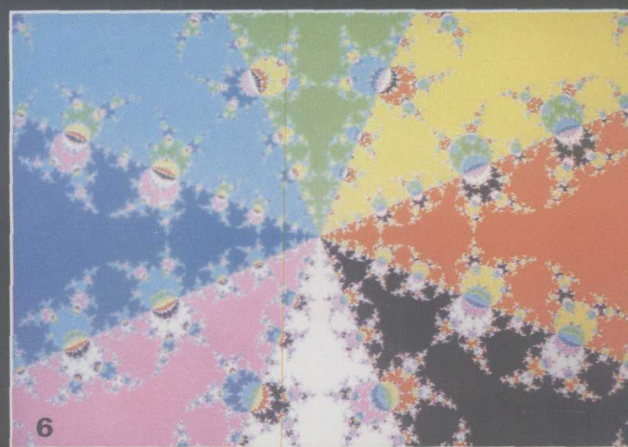
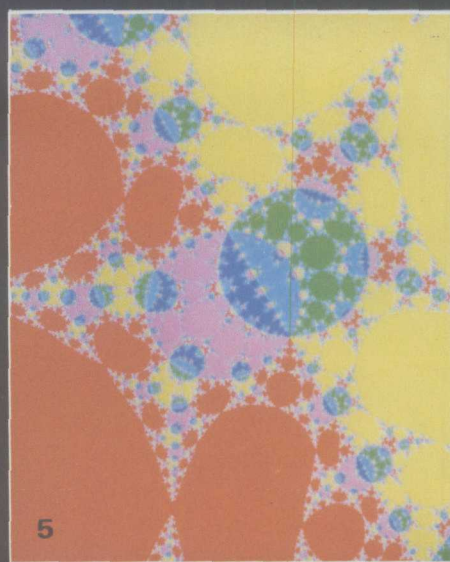
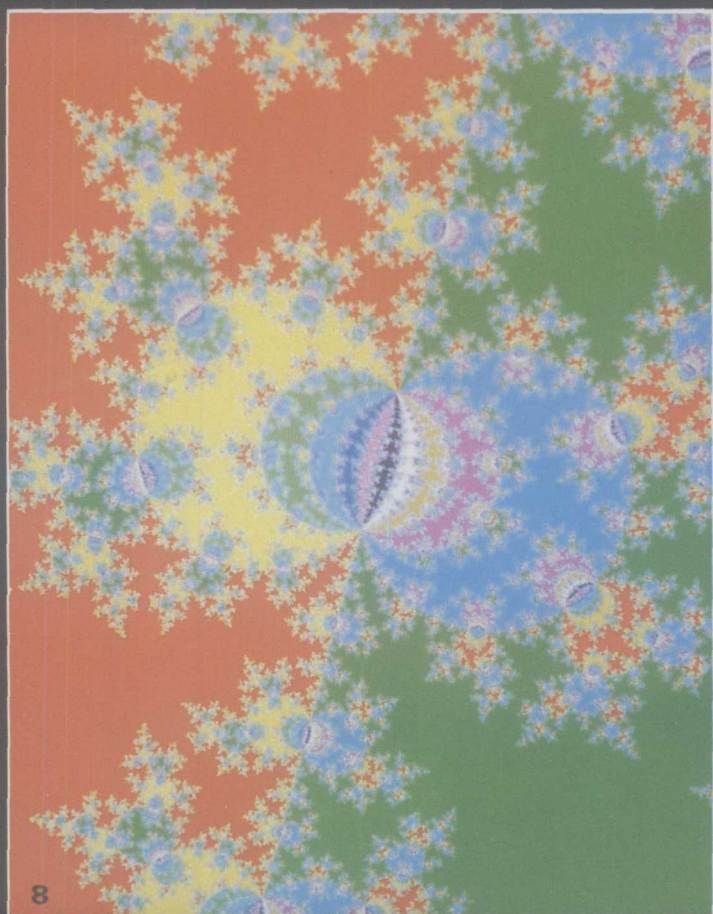
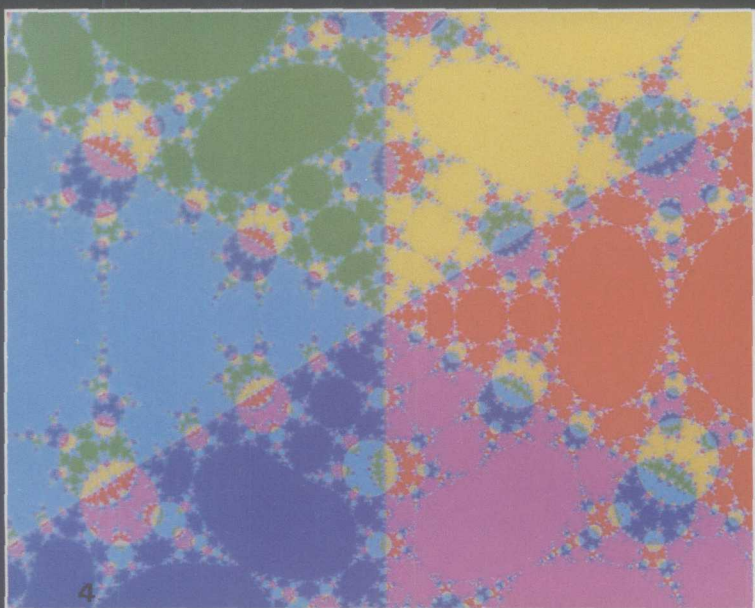
因此,可以说对它的进一步讨论,将丰富分形理论。在艺术上也会达到一个新的水平。

(责任编辑 冷远猷)

生态 学中的分形奇葩

(图说明见王本楠 施寅文 图7 见封面)

THE ART OF FRACTAL IN ECOLOGY



总第三十九期

ISSN 1000-7857

CN 11-1421/N

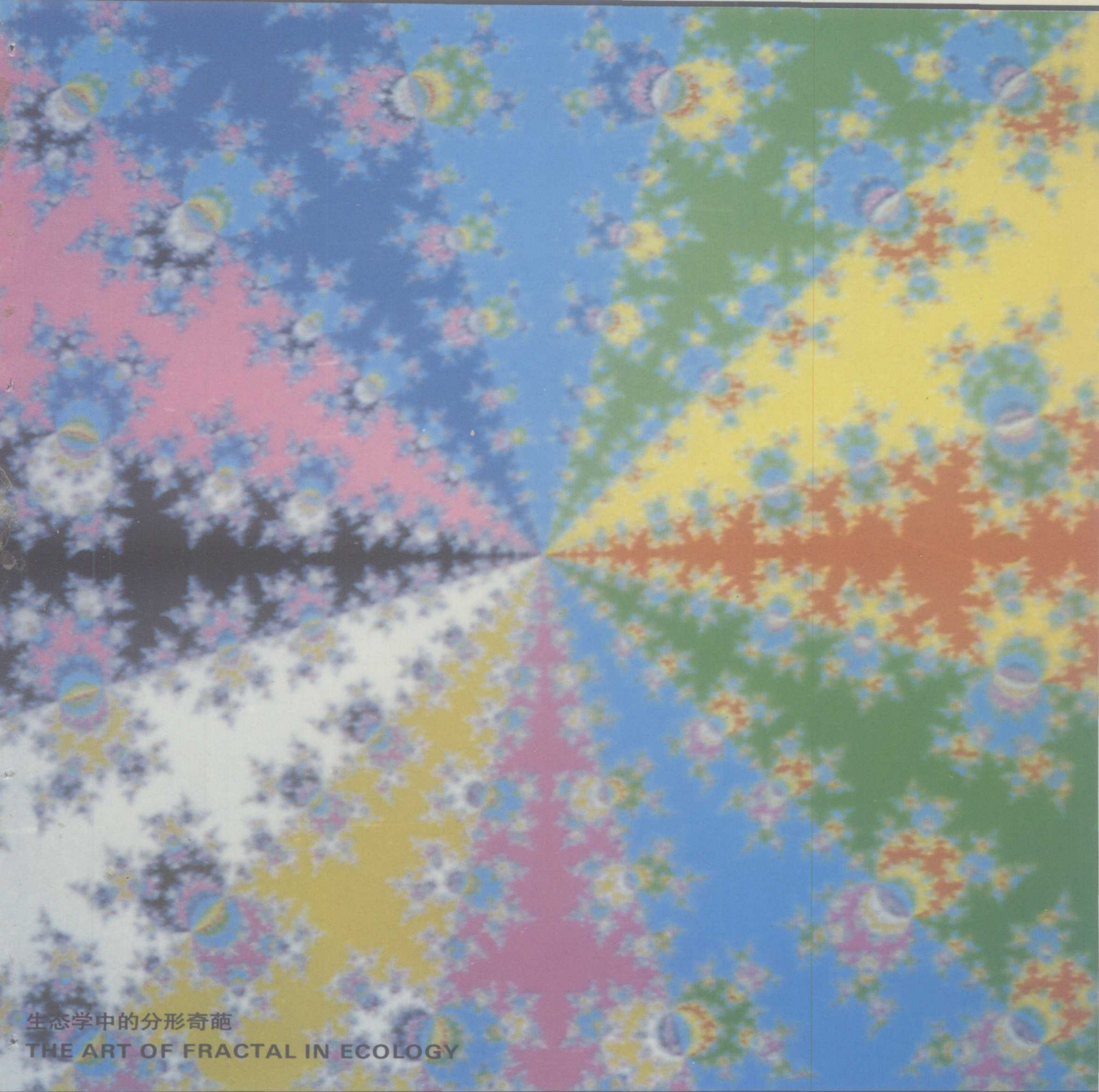
科技导报

6

1991

Science & Technology Review

探讨现代化的道路与方法 TO EXPLORE THE COURSES & MEANS OF MODERNIZATION



生态学中的分形奇葩

THE ART OF FRACTAL IN ECOLOGY

中国科学技术协会主办

生态

学中的分形奇葩

(图说明见王本楠 施寅文 图7 见封面)

THE ART OF FRACTAL IN ECOLOGY

