

二十一世纪的数学

Mathematics in the 21st Century

陈省身

(南开大学数学研究所所长)

编者按 本文为作者在纪念国家自然科学基金十周年学术会议上的发言,由中国数学学会根据录音整理。本刊作了少量删节。文中小标题是编辑部加的。

从两个故事谈起

我先讲两个故事。

我们都知道欧几里得(Euclid)的《几何原本》,这是一本数学方面的论著,完成于2000多年以前。它对于人类是一个很伟大的贡献。书中包括了分析和代数,不限于几何,目的是用推理的方法得到几何的结论。其中,第13章的内容讲的是正多面体的面数。正多面体就是这样一个多面体:它的面互相交合,同时通过一个顶点的每个面的边数是相同的。正多面体在平面上的情形是正多边形。正多边形很多,有正三角形、正四边形……等等。当时发现,到了空间,讨论正多面体就不这么简单了。空间的正多面体少得多,一共有五种正多面体:四面体、六面体、八面体、十二面体,最大的一个是正二十面体。

有些人可能会想,数学家们一天到晚没有事情可做,无中生有,搞这些多面体有什么意思?不过我跟张存浩先生讲,现在化学里的钛化合物就跟正多面体有关系。这就是说,经过2000年之后,正多面体居然会在化学里有用,有些数学家正在研究正多面体和分子结构间的关系。我们也知道,生物学上的病毒(Virose)也具有正多面体的形状。这表明,当年数学家的一种“空想”,经历了这么长的时间之后,竟然是很“实用”的。

我再讲一个许多人都在讲的故事。有两个中学时代的朋友,多年未见了,一天忽然碰到。甲对乙说:“你这些年在做什么事?”乙说:“我在研究人口问题”。甲当然很想看看老朋友的工作,于是拿

来乙的人口学论文一读,发现论文出现很多 π 。他觉得很奇怪。 π 是圆周率,圆周与直径之比,怎么会和人口学扯上关系?这个问题与上面的正多面体问题说明了同样的一点,即基础科学,特别是纯粹数学很难说将来会在什么时候会有用,并且起到很重要的作用。如果要求基础科学立刻就要有应用,那是太短视了。

数学家经常在家里想问题,想出来的东西为什么会有用?我想,主要的原因就是它的基础非常简单,又十分坚固,它的结果是根据逻辑推理得出来的,所以完全可靠。逻辑推理比实验证实所获的结果要更为可靠些。数学由于它的逻辑可靠性,因而是一门有坚实根底的学问,这是数学有用的一种解释。

还有一个问题是,为什么许多不同的学科往往会用到相同的数学。这也是弄不清楚的问题。一种解释是好的数学太少。数学要讲应用,就往往归结到那几种特别好的数学,这种好数学也不多。

关键是培养人才

我的题目是讲21世纪的数学,也就是要讲中国的数学该怎么发展,如何使中国数学在21世纪占有若干方面的优势。办法说来很简单,就是要培养人才,找有能力的人来做数学,使优秀的年青人在数学上获得发展。具体一些讲,就是要在国内办十个够世界水平的、第一流的数学研究院。中国这么大,不仅北京要有,别的地方也应该办。

至于什么叫够水平,第一流,这并没有严格的定义。我只能说南开数学所不够水平,要达到世界

水平还需要很多的努力,

中国科学的根子必须在中国。中国科学技术在本土上生根,然后才能长上去。可是要请有能力的人来做数学很不容易。我从1984年开始组建南开数学所。开始时想,请有能力的人来所工作就是了。可是由于种种原因,很难做到这一点。我们办第一流的数学研究所就要有第一流的数学家。有了第一流的数学家,房子破一点,设备差一点,书也找不到,研究所仍是第一流。房子很漂亮,书很多,也有很贵的计算机,如果没有人来做第一流的工作,又有什么用处?我看到这种情形,就改变想法,努力训练自己的年青人,培养自己的数学家,送他们出国学习,到世界各地,请最好的数学家给予指导。

我很高兴地告诉大家,这些措施已经开始出现成效。比方说贺正需,他到美国加州大学圣地亚哥分校跟M.弗里德曼学。弗里德曼得过菲尔兹奖,是年青的领袖人物。他亲自对我说,贺正需是他最好的学生。再比方说,王蜀光,他是王宽诚基金会资助出国的,在选拔考试中获第一名。我介绍他到英国牛津大学跟S.唐纳森学习。唐纳森是英国当代最了不得的年轻数学家。我想他大概还不到30岁,现已成为牛津大学的教授。王蜀光一年前已完成了博士论文。另一位王荣光也是王宽诚基金会资助出国的,他到美国哈佛大学跟C. Taubes 读博士学位,今年也做完了论文。还有一位是张伟平,他的老师D. 别斯缪(Bismut)是法国最有名的年轻数学家。张伟平在巴黎只用两年时间完成了博士论文,现在在巴黎的Institut des Hautes Etudes 做博士后。我还可以提到一些人,这里不能一一列举了。这样的人才,希望能留住他们。

主流数学与非主流数学

数学有很多特点。比如做数学不需要很多设备,现在有电子通讯(E-Mail),要的资料很容易拿到。别的学科必须依赖设备,大家争分夺秒在一些最主要的方向上工作,在主流方向作出自己的贡献。数学则不同,由于数学的方向很多,又是个人的学问,不一定大家都集中做主流数学。我倒觉得可以鼓励人们不一定在主流数学上做。常有的情形是现在不是主流,过几年却成为主流了。这里我想讲讲我个人的经验。1943年,我在西南联大教书,应邀从昆明到美国普林斯顿高等研究院讲学。靠近普林斯顿有一个小城叫New Brunswick,是新泽西州立大学所在地。我8月到普林斯顿不久,就在New Brunswick参加美国数学会的暑期年会。由于近,我也去听听演讲,会会朋友。有一次我和一位美国非常有地位的数学家聊天,他问我

做什么,我说微分几何,他立刻说:"It is dead(它已死了)".但就在战后,微分几何成了主流数学。因此,我觉得做数学的人,有可能找到现在并非主流,但很有意义、将来很有希望的方向。主流方向上集中了世界上许多优秀人物,投入了大量的经费,你抢不过他们,赶不上,不如做其它同样很有意义的工作。我希望中国数学在某些方面能够生根,搞得特别好,具有自己的特色。这在历史上也有先例。例如:第二次世界大战以前,波兰就搞逻辑、点集拓扑。他们根据一些简单公设推出许多结论,成就不小。另外如芬兰,在复变函数论上取得成功,一直到现在,例如在拟共形映照(Quasi Conformal Mapping)上的推广一直在世界上领先。因为他们做的工作,别的国家不做,他们就拥有该领域内世界上最强的人物,我还可以举出更多的例子。

办好十个数学研究院

我刚才提到要办十个够水平的数学研究院,怎样才能够水平呢?

第一、应当开一些基本的先进课程。学生来了,要给他们基本训练,就要为他们开高水平的课。所谓基本训练有两方面。一是培养推理能力,学生应该知道什么是正确的推理,什么是不正确的推理,必须保证每步都正确,不能急于得结果。马马虎虎,最后一定出毛病。二是要知道一些数学,对整个数学有个判断。从前是与分析有关的学科较重要。20世纪以来是代数较时髦,群论、群表示论,后来是拓扑学,等等。总之,好的研究中心应该能开这些基本课程。我认为,中国要做到这一点是不困难的。无非是两条:一是讲授研究院的某些课程,给予奖金;二是也可请几个国外的人来教。这样,数学研究院会有一个完整的课程系统。

第二、我想必须要有好的学生。我们每年派去参加国际奥林匹克数学竞赛的中学生都很不错。虽然中学里数学念得好将来不一定都研究数学,但希望有一部分人搞数学,而且能有成就。昨天,我和在北京的一些数学竞赛中获奖的学生见面,谈了话。我对他们说,搞数学的人将来会有大的前途,10年,20年之后,世界上一定会缺乏数学人才。现在的年青人不愿念数学,势必造成人才短缺。学生不想念数学也难怪,因为数学很难,又没有把握。苦读多年之后,往往离成为数学家还很远。同时,又有许多因素在争夺数学家,例如计算机。做一个好的计算机软件,需要很高的才能,很不容易,不过它与数学相比,需要的准备知识较少。搞数学的人不知要念多少书,好象一直念不完。这样,有能力的人就转到计算机领域去了。也

有一些数学博士,毕业后到股票市场做生意。例如预测股票市场的变化,写个计算机程序,以供决策使用,其收入比大学教授高得多了。因此,数学人才的流失,是世界性的问题。

相比之下,中国的情况反而较为乐观,因为中国的人才多,流失一些还可以再培养。我们应采取一个态度,中国变成一个输送数学家的工厂。出去的人希望能回来,如果不回来,我们仍然继续送。中国有的是人才,送出去一部分在世界上发挥影响也是值得的。我们要做的事是花不多的钱,打好基础,开出好的课。基础搞得好了,至于出去的人回来不回来可以变得次要些。这是我的初步想法。参加国际奥林匹克数学竞赛的人,数学都是很好的,如果他们进大学数学系,我建议立刻给奖学金。钱很有限,但效果很大,对别人也是一种鼓励。对好的数学系学生来说,到国外去只是时间问题。国内做得很好的话,到了国外不必做研究生,可以直接当教授。中国已有条件产生第一流的数学家,大家要有信心。

培养学生我主张流动。19世纪的德国数学当然是世界第一。德国的大学生可以到任何大学去注册。这学期在柏林听Weierstrass的课,下学期到哥廷根听Schwarz的课,随便流动。教授也可以流动。例如柏林大学已有M.普朗克 A.爱因斯坦,一个理论物理学家在柏林大学自然没有发展的希望,就不妨到别的学校去创业。我希望中国的学生、教授都能流动。教授可以到别的学校去教课,各个数学研究院的教授也能互相交换。

选择好数学研究的方向

我想再讲点数学。刚才说过,选择数学研究方向并不一定要跟主流,可以选自己特别喜欢的那些分支。不过,一个数学家应当了解什么是好的数学,什么是不好的或不大好的数学。有些数学是具有开创性的,有发展的,这就是好的数学。还有一些数学也蛮有意思,但渐渐变成一种游戏了。所以选择好的数学研究方向是很重要的。

让我举例来谈谈。大家是否知道有个拿破仑定理?定理是说任给一个三角形,各边上各作等边三角形,然后将这三个等边三角形的重心联起来,又是一个等边三角形。各边上的等边三角形也可朝里面做,得到两个解,等等。这就不好的数学,因为它难有进一步的发展,好象一种游戏。

那么,什么是好的数学?比方说解方程就是。搞数学都要解方程。一次方程易解。二次方程就不同。 $x^2 - 1 = 0$ 有实数解。 $x^2 + 1 = 0$ 就没有实数解。后来就加进复数,讨论方程的复数解。大家知道的代数基本定理就是n次代数方程必有复数解。

这一问题有很长的历史。当年的有名数学家欧拉(1707~1783)就考虑过这个问题,结果一直没有证出来。后来还是高斯(1771~1855)发现了复数与拓扑有关系,有了新的理解。因为模等于1的复数表示一个圆周,在这圆周上就会有很多花样。第一个证明代数基本定理的是高斯,而且给了不止一个证明。

如果从解 $f(x) = 0$ 到解 $f(x, y) = 0$,那就进到研究曲线,当然也可能没有解,一个零点也没有。于是花样就来了,假使你在 $f(x, y) = 0$ 中把 x, y 都理解为复数,则两个复数相当于四维实空间,这就很麻烦,出现了复变函数论中的黎曼曲面。你要用黎曼曲面来表示这个函数,求解原来的方程 $f(x, y) = 0$,那就要用很多的数学知识。其中最要紧的概念是亏格(Genus) g 。你把 $f(x, y) = 0$ 的解看成曲面之后,那么曲面有多少个圈,球面、环面等等的花样就很多,都和 g 有关。

此外,也可以有另外的花样。如假定 $f(x, y) = 0$ 的系数都是整数,你也可以讨论这一方程的整数解,这个问题就很难了。直到前几年才发现这一方程是否有整数解和亏格 g 有密切关系。当 $g = 0$ 时,有无穷多个整数解。 $g = 1$ 则有些特别的性质。当 $g > 1$ 时,德国的伐尔廷斯(Faltings)在1984~1985年间证明了 $f(x, y) = 0$ 的整数解至多为有限个。这一结果和费马定理有关。那是说 $x^n + y^n = z^n (n > 3)$ 没有正整数解。这还没有解决费马问题,但是前进了一大步。

确实,数学可以引出很深的观念。数学中我愿把数论看作应用数学。数论就是把数学应用于整数性质的研究。我想数学中有两个很重要的数学部门,一个是数论,另一个是理论物理。理论物理也是用很多数学的部门。

我还想讲一点,比方说最近一个时期最热闹的数学,即当前的主流数学是什么?刚才我说过我并不喜欢大家都去搞主流数学,不过主流数学毕竟是重要的。所谓主流数学,是指一个伟大的数学贡献,深刻的定理,含义很广,证明很不简单。如果在当前选一个这样的贡献,我想那就是Atiyah—Singer指数定理。Atiyah是英国皇家学会会长。这个指数定理可看成是上面所谈问题的近代发展,即将代数方程、黎曼曲面、亏格理论等从低维推广到高维和无穷维。

因此,我觉得数学研究不但是很深、很难、很强,而且做到一定的地步仍然维持一个整体。到现在为止,数学没有分裂为好几块,依旧是完整的。尽管现代数学的研究范围在不断扩大,有些观念看来比较次要,慢慢就被丢掉了,但基本的观念始终在维持着。

(责任编辑 蔡德诚)