

整数阶与非整数阶曼德勃罗集的研究

The Investigation on Mandelbrot Sets in Integer and Non-Integer Orders

杨铁笙 熊育武 詹秀玲

(清华大学水利水电工程系, 北京 100084)

由于曼德勃罗 70 年代开创性的工作,分形几何在理论和应用两个方面都获得了突飞猛进的发展。著名的曼德勃罗分形图以其绚丽的色彩和神秘的结构把成千上万的年青人吸引到计算机前,发掘图中的奥妙,体味科学与艺术结合的独特美感,探究曼集图形给人的哲学启示。当曼集映射非线性项阶次是 2 时,图形就已变幻莫测。阶次增高会出现什么图形?非整数阶次会不会带来更奇妙的花样?它们又将给我们什么启迪?这些正是本文要探讨的问题。

一、正规曼集的特点

曼德勃罗集由下述复映射产生

$$M(Z) = Z^2 + C \quad (1)$$

其中, $Z = x + iy$ 为一复变量, C 为一复常数。

写成叠代式,则是

$$Z(k+1) = Z^2(k) + C \quad (2)$$

k 是叠代次数。

曼集图的生成方法是:对于复平面内某一区域(通常 $\{(x, y) | x \in [-2, 0], y \in [-1.25, 1.25]\}$)中各点 $p = x + iy$ 依次按(2)式进行叠代,并取 $c = p, z(0) = 0$ 。若 $Z(k)$ 的模 $|Z(k)|$ 大于某一预置数 M 时,记该点 P 的叠代次的为 K ,中止该点叠代,转到下一点,若在 N 次(如 $N = 256$)叠代后, $Z(N)$ 之模仍不超过 M ,则认为该点属于有限吸引域,着以黑色,也中止叠代,转到下一点,直到整个区域叠代结束。根据各点的叠代次数 K 分别着以相应的颜色,就得到了所谓的曼德勃罗集。图 1-a(见封二)是曼集整体图,图 1-b, c, d(见封二)是曼集有限吸引域腰部的局部放大。

曼集图形有如下特点:

1. 黑色的有限吸引域主体位于中央。
2. 有限吸引域以外蜿蜒曲折地环绕着各类带状彩色区域,称之为等势带。
3. 有限吸引域和等势带交界线是光滑的,并具

分形性质。有限吸引域主体周围环绕着大大小小的“黑色”卫星体,它们也是有限吸引域的一部分,和主体是连通的。

4. 局部放大图案具有多层次自相似性。

二、曼德勃罗集的扩展

称 $n \in R$ 的复函数映射 $M(Z) = Z^n + C$ 为扩展曼德勃罗集。由于复数域非线性映射解析分析十分困难,目前只有关于复数多项式映射的一般描述,计算机数值试验是观察该类映射细节的唯一可行方法。为了深入了解扩展曼集的特点,笔者编制了专用程序。该程序可生成 $n = 1 \sim 9$ 所有阶次的扩展曼集图形;放大任意部位的局部图案,倍率可达到 $10^{13} \sim 10^{15}$;图形分辨率为 1024×768 ;色彩 256 种。下面就 $n > 2$ 的整数和非整数两种情况分别叙述扩展曼集的图形特性。

1. 整数阶曼集

图 2 为 $n = 1 \sim 9$ 的扩展曼集全集图(见封二上图)。其中左上角为 $n = 1$ 的“简单曼集”,将于结语中谈到。由图中可以看出,当阶次超过 2 时,扩展曼集在整体形态上构成了正 $n-1$ 边形系列。譬如, $n = 4$,有限吸引域外轮廓呈正三角形; $n = 5$,呈正方形; $n = 6$,呈正五边形,等等。现以 $n = 3$ 为例,观察有限吸引域以外的图形细节,如图 3(见封三)所示。图 3-a 是 $n = 3$ 扩展曼集全集,倍率为 1.62455。图 3-b 是图 3-a 腰部区域的局部放大,倍率为 5293.61。图 3-c、3-d、3-e、3-f 依次分别为图 3-b、c、d、e 的局部放大,倍率分别是 3168230 、 2.71478×10^8 、 1.41538×10^{11} 和 4.15083×10^{14} 。各图左下角小图中的白框标示了本帧图在前一帧图中的位置。这些图表明,有限吸引域与等势带的交界线仍然是光滑的,有限吸引域以外散布的卫星体,通过“卷须”和“触角”构成连通的网络(见图 3-d 和 3-e),它们与主体也是连通的。

网络及网络节点上的大大小小的卫星体与等

势带组成蝎尾状的花样(图 3-c)。尽管图 3-c,d,e,f 顺次放大前图的倍率达到 $10^2 \sim 10^3$ 数量级,蝎尾花样仍然是各图的基本主旋律,表现了强烈的自相似性。

随着阶次 n 的增高,扩展曼集图形结构变得越来越复杂。有限吸引域边界区盘根错节的卫星体网络与扭转曲折的等势带彼此吸附、渗透、缠绕,需要更高的放大倍率才能看清它们的构造。但是,上述 2 阶、3 阶曼集图形的特点仍为高阶扩展曼集所具备:互相连通的有限吸引域没有突变的光滑的等势带,以及由两者构成的多层次的自相似的基础图样。

2. 非整数阶曼集

非整数阶次的扩展曼集图形与整数图形最大区别是有限吸引域和等势带存在错动、断裂和破碎。现以 $n=3.2$ 为例,图 4-a 到 4-e(见封底,封面是图 4-c 的局部放大)是 $n=3.2$ 的扩展曼集的整体图及局部放大图。从图 4-a 到图 4-e,放大倍率依次为 1.62455、1574.96、27233.8、7986730 和 1.04099×10^9 。对照图 3-a 可以看到, $n=3.2$ 的图形相当于 $n=3.0$ 的图形在作用力下的变形。“受力点”在左侧中腰,左半部为“压应力”,右半部为“拉应力”,且因变形过大而发生断裂。图 4-b 显示了断裂区局部状况。外围本来光滑的等势带出现破裂、错位,内部的精细结构发生畸变。有些碎片被孤立,在错动的等势带中形成孤岛。

把图 4-b 中一块碎片放大,得到图 4-c。在这块碎片中看到的仍然是类似于图 4-b 中的错动、破碎景象。有趣的是,在图 4-c 这块大碎片(见封面)中,我们发现了一些“有序构造”。左侧由几块灰黑色碎片堆砌成类似菜花状的图案,“菜花”头在下面,茎在上面,构形特点是右侧呈三级分叉,“菜头”顶部由大到小排列着一系列黑色有限吸引域卫星体,其形状恰与图 4-a 中显示的扭曲的黑色有限吸引域相似。把图 4-c 的“菜花”二级、三级分叉的茎部放大,得到图 4-d,会发现分叉茎部内的彩色碎片的排列方式仍然是右侧分叉的“菜花”型。依照右侧分叉的方式生长,形成多层次的“菜花”。不仅分叉茎部内,而且“菜花”头部内也是这种结构。图 4-e 是图 4-d“菜花”头部的放大。在这张图中可以看到由碎片堆砌的五级分叉“菜花”。

整体图出现断裂、错动;断裂区域出现破碎,在低倍率放大区中碎片废墟似乎杂乱无章。然而,逐步提高放大倍率,就能发现废墟中碎片的堆砌物具有多层次嵌套的自相似结构,这就是非整数阶次扩展曼集 $n=3.2$ 的特点。这是非整数阶次共性,而非 $n=3.2$ 所独有,只不过碎片堆砌的图案因阶次不同有所变化而已。我们观察到: $n=1 \sim 9$ 九类非整数阶次的扩展曼集都具有上述特点。例如,图 5(见封底右下角)是 $n=8.35$ 断裂区的细部结构:等势带

断裂明显,断裂错动造成的碎片以黑色的近圆形的有限吸引域为核心,构成环状恒星一行星结构,这种结构在不同水平上嵌套出现。

三、结 论

如果在扩展曼集中令 $n=1$,则使该映射由非线性映射蜕化为线性映射,如图 2 中的左上角第一幅图所示,它由圆形有限吸引域和一簇同心等势圆环带组成。这是一个平凡图形,没有复杂的边界,没有分形的界线,也没有自相似的嵌套结构。一旦阶次离开 $n=1$,复杂构造便立即出现。曼集及其扩展集的这些图形特点形象、生动地显示了“非线性导致复杂性”的规律。然而,复杂并非无章可循,复杂中蕴涵着规律。整数扩展曼集,从阶次 $n=4$ 开始,依阶次 n 的增高,其全集外廓线呈现 $n-1$ 边的正多边形。该正 $n-1$ 边形有限吸引域与周围的等势带仍保有光滑的分形的边界和多层次的自相似结构。

奇特现象发生在 n 取非整数的扩展曼集。在那里,正 $n-1$ 边形被扭曲变形,出现断层错位。断裂区域内等势带的光滑性被破坏,出现图形破损。但图形废墟中仍能观察到由碎片堆砌的自相似花样,这种花样在不同层次上具有嵌套结构。

以上观察结果是在阶次 $n=1 \sim 9$ 的取值范围内得到的。

扩展曼集在非整数阶次内给出的图形与整数阶次迥然不同,这究竟反映了什么样的物理过程,有待进一步研究。如果从非线性叠代 $Z(k+1)=Z^n(k)+c$ 在复平面上的收敛(有限吸引域,黑色)和发散(等势带;彩色)的角度去观察这两类图形,似乎可以说, n 取整数,反映了连续而不均匀介质中复杂边界上的非线性过程; n 取非整数,反映了不连续不均匀且有断层的破碎介质中复杂边界上的非线性过程。尽管这只不过是猜测,但也有一定现实背景。地质断层中的破碎带构造就是一例。若把扩展曼集的等势带比喻为不同地质岩层,则非整数阶次的断层放大区内错动造成的碎片废墟就相当于在破碎岩层中看到的情况。在全国第三届分形理论及其应用的学术讨论会上,有石油物探工作者曾报告:若假设破碎断层中油气储量质量分布具有分形特点,在不同长度标尺内具有自相似性,并导致地震波的时间分形和能量分形,利用这一特性,可以缩小钻井范围,提高选择钻井位置的精确度。他们的假设以及相应的一些实测资料,与非整数曼集断层区域观察到的碎片的自相似堆砌嵌套结构有不谋而合之处。如果能得到进一步证实,则上述工程应用中的假设和工程手段可望找到理论依据,而扩展曼集在非整数阶次展现的废墟中的分形也有了物理背景和应用的价值。(责任编辑 蔡德诚)