

数学教育的关键是彻底转变观念

The Key to Maths Education Is to Change Ideas Thoroughly

冯克勤

(中国科技大学北京研究生院,教授 北京 100039)

我从小学到研究生共念了 20 年数学,后来在大学教了 20 年数学,亲身经历了我国数学教育事业的发展。但是为非数学系学生上课不多,对工科数学教育没有经验。这次参加工科大学生数学教改研讨会,是想学习工科数学教改经验和交换看法,我的意见有些也可能过于偏激,欢迎大家讨论、批评和指正。

现在普遍认为,下一个世纪是知识经济和信息化的世纪,经济发展的国际化和竞争性更为突出,创造知识和应用知识的能力与效率将成为影响一个国家综合国力和国际竞争能力的决定性因素,而具有高素质特别是创新意识和能力的人才是关键。在教育战线上,根本目的是为下一世纪培养具有高素质并有创新意识和能力的年轻人才。工科大学生的数学教育,不仅要使学生有扎实的基本知识训练,还要掌握数学方法,最重要的是有数学的思维习惯和在今后工作中运用数学思想方法的创新能力。面对下世纪人才的培养目标和目前数学教育的现状,我们需要很多改进甚至变革。现在对教改谈论了很多,中小学提出把应试教育转变为素质教育,高校也有许多相应的讨论,但总起来仍是说得多做得少。困难主要不在于技术方面,其关键是许多观念要作根本性转变。

学校的基本工作是教书培养人

这似乎是一个浅显的道理。可是在实际上,学校各级领导到底有多少精力是真正花在学校的教学工作上?教师在教书上花多少精力?学生在学习上真正用多少时间?我们老一辈科学家大都是热心的教育家,把教书育人作为毕生天职。现在不少教师在教学中投入不够,其中一个重要原因是政策上的误导。比如说对年轻教师的提职,第一位是看科研成果,对于教学则主要看教学工作量,很少去衡量他是否为真正优秀的教师。必须指出,科研绝对不会影响教学,教师必须有好的研究工作,而新的研究成果也需要及时传授给年轻人,使研究工作和

教学内容都能注以新鲜的活力。现在的问题是:许多教师(特别是优秀教师)要花很多精力应付教学和科研以外的许多事情。来自教育管理部门的许多“新”举措,也许本意是好的,但把下面的人搞得很累,而且劳民伤财。按照“学校基本工作是教学”这个浅显的道理,教师应当是学校的主体。他们对教学和教改最有发言权,应当受到尊重。但是在某些部门那里,教员主要成为管理对象甚至于成为某种工具。这种观念体现出管理体制上的陈旧与落伍。至于学生在学习上投入不足则有复杂的社会原因。随着知识经济的发展和知识受到更大的尊重,相信这种状况很快会有改善。

以下就数学教育谈一些具体看法。

教学的内容需要更新

本世纪(特别是近 50 年来)数学有极大发展。不但有辉煌的理论成就(如费马猜想得到证明),而且数学在科学、技术、管理、经济各领域得到广泛而深入的应用,这已是众所周知的事实。我只想再特别强调一点,就是近十几年纯粹数学方面的一些最新成果开始在工程技术上得到应用,使技术手段产生巨大的变革。比如说在通信方面,1976 年出现了信息安全的公开密钥体制,由于它适应网络通信要求并解决了签名问题,很快在军事和商业等领域得到应用。这种体制下好的算法都用到现代数论知识(椭圆曲线算法,数域筛法等做大数分解)。又比如在纠错码方面,60 年代 BCH 码出现时,通信工程所用的数学由传统的傅立叶分析和统计学更新为近世代数,工程师们纷纷学习有限域;1982 年发现了优于 BCH 码的代数几何码,可以预见到下一世纪的通信工程师要学习一点代数数论和代数几何。再比如丘成桐先生所说的,从事计算机图形学的人,需要打破行业界限,学一点微分几何。这些例子表明,面向下一世纪的工程师们,其数学知识结构必须有很大的改变。

这些年许多学校在开设新课介绍现代数学方

面作了努力。但是从整体上讲,在知识结构更新方面我以为数学是做得最差的。我们高中学生的数学知识大约达到 17 世纪数学水平,但是高中物理可以学到原子核量子理论和爱因斯坦相对论。工科大学生的主要数学课(微积分、线性代数和数理方程)是 18 和 19 世纪的数学,连数学系大学生毕业时,对本世纪的数学也没有一个概念。工科学生在大学里可以学到近几年发展的专业知识,但是对现代科学和技术所用的数学缺乏了解。

技术领域的课程更新较快,因为 50 年前的许多技术已经陈旧,现在讲电子管已无意义,其他自然科学课程更新也比较容易,似乎唯独数学有特殊的困难。这其中除了长期形成的数学传统之外,人们往往强调数学知识传授的连贯性和严密的逻辑性推理体系。在这里就有一个观念的问题:数学教材或论文写出来的推理程序常常不是我们在研究和思考数学时的思维程序,甚至两者完全相反。我们在做一个几何证明题时,首先要分析问题。在想出证明之后,常常是以与思考相反的程序写成证明形式。如果只看证明逻辑,学生没有学到很多东西,他不知道这个证明是怎么得来的,不知道为什么会有这样的结果,学习后,他们自己也仍没有研究和创造这类新结果的能力。所以,我们不必把形式化和严格化的东西看得过于神圣,这不是我们要教给学生的最本质的东西,最本质的应当是数学的直观和形象化。对于工科学生,微积分不必讲太精细的 ε - δ 方法,各种奇怪级数和积分的收敛判别法和交换原则也不必要。龚升教授在中国科技大学无线电系教过多年“简明微积分”,不从 ε - δ 方法入手,而是从积分和微商的直观意义入手。对于多变量情形,用具有物理意义的斯托克斯公式等把二者联系起来。要在观念上有所转变,才能在有限学时范围内把旧课程的学时降下来,添加上新的课程内容。另一方面是下面要谈的教学方法问题,就是把学生的主动性调动起来,有许多内容由学生自己去做。

要推行教与学及时反馈、 培养学生主动学习的教学方法

在评价教学质量上也有一个观念问题。我们常常用教学大纲、教材内容和教员讲课的仔细程度作为检查教学水平的标准,而很少把学生真正学到多少知识和能力作为尺度,而后者恰恰是最重要的尺度。有的教员陶醉于自己在黑板上的个人表演,不关心他背后堂上学生的冷漠和昏昏状态。我们常常热衷于告诉学生面面俱到的知识,但不知如何用最少的语言启发学生自己学习和思考的能力。我们还常常用学生的考试分数来衡量学生的学习效果和成绩,但这是不可靠的。这里我想介绍一个例子。

1992 年,美国 Winona 州立大学校长 D. W. Krueger 发表过一篇叫《重返最优》的文章,讲对教学应当如何评价。他们对典型单位进行彻底分析之后,发现考试分数“并不能告诉我们课程计划的质量是如何提高的,甚至不知是否在提高”。也不能解答“课程是否合适?学生是否在学这些课程?他们是不是真的在努力?”为此,他们制定了“良好本科教育的七项原则”,简述成:(1) 学生与教师之间的接触(课堂内外师生经常接触是影响学习动机和参与的最重要因素);(2) 鼓励学生之间合作(集体努力比个人努力更能促进学习,合作可提高参与意识以及与他人交换想法的意识,使思维更敏捷并加深对问题的理解);(3) 鼓励主动学习(把学的东西变成为自己知识的一部分,为学生创造表现的机会);(4) 给与及时反馈(教师要及时了解学生懂了什么和不懂什么,对学生的能力要作及时评价);(5) 有效地利用和安排学习时间;(6) 随时对学生给予较高的期望(这对各种水平的学生都重要);(7) 尊重不同的才能和方法(不同个体应用不同计划和选择,挖掘和尊重个性)。

这是一个教与学及时反馈并且强调学生主动学习的教学方法。我想这是一种比较先进并且更能培养创造性人才的方法。我们现在总觉得学时不够,可是国外总学时比我们要短;我们讲得太细。事实上,教材中写得很仔细的材料不必再由教师在黑板上再表演一遍,可以交给学生课下自己去看懂,以作业形式来检查学生课下努力的程度。国外计算机课程老师讲得很少,大多数任务是以作业形式由学生学习,提交软盘形式的作业。我们应当改变教学方式,彻底转变学生过份依赖老师的局面,培养学生主动学习的风气。著名物理学家玻尔所培养的学生有 10 位后来获得诺贝尔奖。他的教学方式被称之为“哥本哈根精神”,突出特点是师生合作。玻尔的名言是“不教之教”,即教师只需要提出问题,引导学生如何思考,不需讲“硬件”,即知识性的原理、结论、定律和事实;需要做的只是培植“软件”,即培植与进行创造性活动有关的能力和品格,对创造活动的价值取向和态度。这种通过“不教”达到“教”的目的,可以说是教学的最高境界了。爱因斯坦也说过:“发展独立思考和独立判断能力应当始终放在首位,而不应当把获得专业知识放在首位。”我们应当重视和借鉴这些经验,从观念和行动上改变我们的教育思想和教学方法。

要建立活跃的教学环境和气氛

陈省身先生来中国常常问道:“现在国内教数学和研究数学,是否有一种‘活’的气氛”。我们在教课时是否应留下一点时间让学生发表一下自己的

意见或问点问题？学生没有听清楚，是否可以立刻举手请老师再说一遍？老师写错符号或讲错了话，是否有同学敢于向老师指出来？这些问题都值得深思。

在国外，你会发现有的教室里桌子摆成圆形，老师和同学平等地围坐在一起，老师只扮演节目主持人的角色。同学打断老师的讲话，在我国常被认为是不礼貌行为，而在国外老师很高兴，认为他的讲课受到学生的注意，并且乐于听到学生提出异议。一堂课下来没有人提问题或发表看法，反而认为学生没有礼貌，没有人关心他的讲课。这很典型地反映出教育观念上的巨大差异：是维护教师的权威，培养学生“听话”，还是平等地对待学生，鼓励学生求知欲望、创造兴趣和个性发展。国外校园气氛比较生动活泼和丰富多彩，而我们则比较单调划一和死气沉沉。

每个大学都积聚了许多专家和思想家，这样好的条件应当充分地利用。学生不能只接触到几个教员，要开设五花八门的选修课和讲座，让学生有机会听到更多老师和访问者的不同学识和观点，领略不同学科的奥妙，了解不同领域的发展和彼此的影响，使学生见多识广、思想丰富而活跃。

除了科学地评定教学质量之外， 也要科学地评定学生学习质量

现在各国都使用笔试考试，但笔试所起的误导作用恐怕以我国最甚。高考分数不仅决定年轻学生的未来，而且不少中学按学生相差的分数规定向学校交钱的多少。把学校和教师收入建立在考分差学生的基础上，这就把考分的作用发挥到最荒谬绝伦的地步了。笔试只是一种省事的考核办法，但绝不是最科学的方法。它至少有以下弊病：使学生主要关注低级思维而不是创造性的思考和语言表达能力这种高级思维；规范化的试卷体现不出人的个性；往往成为教和学的指挥棒，使教和学的目的仅是为了考试而不是培养全面素质，招致高分低能的坏结果；常常强化了对数学的曲解，认为数学只有唯一的答案，而学生只能做出老师认为是正确的答案……实际上，我们应当以学生在讨论、作业等方面的日常表现作为考核学生的主要依据，而考试则主要采用口试方式为好。德国波恩大学对期末考试就一直采取口试。由3位教授共同对每个学生面试10~20分钟。问题有指定的，也有像“你对这个课最有趣的内容是什么？请给我们讲一下”；“你对本课程在学习中有何新想法”这类问题。不论学生

讲的正确与否，教授们不停地与学生讨论，随时问一些小问题，考查学生对正确东西的确认程度，或者有多大能力发现和改正错误。最后由3位教授共同给定一个分数和能相应体现学生个性特点的评语。这样的考试教授是辛苦的，但是德国人对待他们认为是合理和科学的事情就一直持有这样认真的态度。我也欣赏目前流行的数模竞赛，题目来自各种实际问题，没有唯一的答案，3人一组共同讨论出认为最佳的数学模型，分工进行论述和计算，并且对问题和解法做出自己的评论，3天之内交卷。这种考试更接近于研究的本质，体现探究、创造和合作精神，培养运用数学的能力。我们的中小学生在考试中出了一点小错便会得到一个不好的分数。这种对天真幼稚的孩童要求百分之百不出错，不仅过于残酷，也违反人类实践的常规。在实践中任何人都会出错，问题是要培养通过直觉和验算如何及时发现错误和改正错误的能力。从另一个角度说，我们总是强调计算的准确无误，可是实际问题大多只需要近似到一定程度。我们应当培养学生根据问题要求决定计算近似程度的能力。总之，我们的教学对于学生将来工作中运用数学时真正需要的能力考虑得太少了。

怎样做才算是一位真正优秀的教员

我们教育学生的主要目的不是为了得到全优的分数，而是培养学生创新的能力。这对教员提出了更高的要求。在讲课方面，不要过于精细繁琐，过于死板和技术化，而要善于把复杂深奥的数学以通俗和生动的形式讲出来，并且富有幽默感。教员不仅对讲课要有更多的投入，而且对学生要更多地予以关注，与学生有更多交流的机会，引导学生的兴趣和挖掘他们的个性发展和探究欲望。据说法国拓扑学家托姆(Thom)曾经和两位古人类学家讨论：我们的祖先由于什么动机保存了火种。一位古人类学家说是由于火可以取暖，另一位则认为由于用火做成的熟食味道鲜美可口。而托姆则发表了不同观点。他认为人类保存火种的最原始动机，是由于在漫漫的黑夜中被光彩夺目的火苗所吸引，对美丽的火焰着了迷。我不想讨论托姆的观点是否正确，只是联想到，我们应当把怎样的教员看作是最优秀的？我想，倘若你使学生都有一个好的分数，那只是一个合格的教员；但若学生们（哪怕只是班上的一小部分）在你的课上对数学着了迷，看到数学的火焰光彩夺目，那才是一位真正优秀的教员。

(责任编辑 蔡德诚)