强一致性区间数判断矩阵性质和排序

冯向前[1,2], 王 海[1]

1. 南京师范大学计算机科学与技术学院,南京 210046
2. 江苏省信息安全保密技术工程研究中心,南京 210097

摘要 研究了区间数判断矩阵的性质及排序问题。介绍了强一致性区间数判断矩阵、标准化区间数向量等概念;提出求解强一致性区间数判断矩阵排序向量的线性规划模型,并证明了所求排序向量是标准化区间数排序向量。在此基础上给出强一致性区间数判断矩阵的等价条件,进一步提出基于非线性规划模型的强一致性区间数判断矩阵的排序方法,最后通过实例验证了所提出的方法也适用于一致性区间数判断矩阵及满意一致性区间数判断矩阵。

关键词 不确定层次分析法;区间数判断矩阵;强一致性

中图分类号 C934,O223 **文献标识码** A **文章编号** 1000-7857(2010)23-0060-03

Properties and Priority Method of Strong Consistent Interval Judgment Matrix

FENG Xiangqian[1,2], WANG Hai[1]

1. *School of Computer Science & Technology, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China*
2. *Jiangsu Research Center of Information Security & Privacy Technology, Nanjing 210097, China*

Abstract The properties of strong consistent interval judgment matrix in literatures are not well studied both at home and abroad, so the priority method research lacks a theoretical basis. The properties and priority problems of strong consistent interval judgment matrix are studied in this paper. First, some concepts including the interval judgment matrix, the strong consistent interval judgment matrix and the normalized interval vector are explained. Then, a linear programming model is used to derive the normalized interval weights from the strong consistent judgment matrix. On that basis, an equivalent condition of strong consistency for interval judgment matrix is put forward. A nonlinear programming model is developed to generate interval weights for the interval comparison matrix with satisfactory consistency. Finally, two numerical examples are provided to illustrate the validity of the proposed method, and it is shown that the nonlinear programming model can also be applyied to consistent interval judgment matrix and satisfactory consistent interval judgment matrix. The properties and the ranking method may further improve the consistency theories of interval judgment matrix.

Keywords uncertain type of the analytical hierarchy process; interval judgment matrix; strong consistency

0 引言

层次分析法(Analytic Hierarchy Process,AHP)为一种多准则决策方法,由于它在处理复杂决策问题上的实用性和有效性,在经济计划和管理、能源政策和分配、行为科学、军事指挥、运输、农业、教育、人才、医疗和环境等领域得到很好应用[1]。在应用层次分析法时,由于客观事物的复杂性以及人们思维能力、知识结构和知识水平的局限性,单一准则下,决策者虽然能确定第 i 个元素比第 j 个元素重要, 但通常不能对重要性做出确定的、一致的判断,在这种情况下,用模糊数或区间数反映决策者的思维判断更为合理。自 1987 年 Satty 和 Vargas[2]提出区间数判断矩阵偏好信息以来,很多学者对其进行了研究,其中,区间数判断矩阵的一致性是一个很重要的课题[3-6]。文献[7]对已有的区间数判断矩阵一致性概念进行了讨论,并给出了一系列合理定义。本文在文献[7]给出的强一

收稿日期:2010-08-22;**修回日期**:2010-09-30
基金项目:南京师范大学科研项目(2008101XGQ0109)
作者简介:冯向前,讲师,研究方向为信息融合与决策分析,电子信箱:feng_xq@njnu.edu.cn

致性定义的基础上,进一步研究强一致性判断矩阵的性质及排序方法。

1 区间数判断矩阵一致性分析

定义1 若存在$\bar{a}_{ij}=\bar{a}_{ik}\bar{a}_{kj}(i,j,k=1,2,\cdots,n)$,称数字判断矩阵$\bar{A}=[\bar{a}_{ij}]_{n\times n}$具有一致性。

引理1 称数字判断矩阵$\bar{A}=[\bar{a}_{ij}]_{n\times n}$具有一致性,若存在向量$\bar{w}=(\bar{w}_1,\bar{w}_2,\cdots,\bar{w}_n)^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{n}\bar{w}_i=1,\bar{w}_i\geqslant 0,i\in\mathbf{N})$,使得$\bar{a}_{ij}=\bar{w}_i/\bar{w}_j(i,j,k=1,2,\cdots,n)$。

定义2 设有2个区间数$a_1=[l_1,u_1],a_2=[l_2,u_2],l_1>0,l_2>0$,则$a_1\cdot a_2=[l_1\cdot l_2,u_1\cdot u_2],1/a_1=[1/u_1,1/l_1]$。

定义3 称$A=[a_{ij}]_{n\times n}$是区间数判断矩阵,如果对任意的$i,j=1,2,\cdots,n$,均有

1) $a_{ij}=[l_{ij},u_{ij}]$,且$0<l_{ij}\leqslant u_{ij}$;

2) $a_{ij}=1/a_{ji}$。

当对任意的$i,j=1,2,\cdots,n$,都有$l_{ij}=u_{ij}$时,A为数字判断矩阵。

定义4[7] 若存在数字判断矩阵$\bar{A}=[\bar{a}_{ij}]_{n\times n}(\bar{a}_{ij}\in[l_{ij},u_{ij}])$具有一致性,称区间数判断矩阵$A=[a_{ij}]_{n\times n}$具有一致性。

定义5 若对任意的实数$\bar{a}_{ij}\in[l_{ij},u_{ij}]$,均存在数字互反判断矩阵$\bar{A}=[\bar{a}_{kl}]_{n\times n}(\bar{a}_{kl}\in[l_{kl},u_{kl}],k,l\in\mathbf{N})$具有一致性,其中当$k=i$,$l=j$时,$\bar{a}_{kl}=\bar{a}_{ij}$,称$A=[a_{ij}]_{n\times n}$为强一致性区间数判断矩阵。

若对某个$\bar{a}_{ij}\in[l_{ij},u_{ij}]$,不存在数字互反判断矩阵$\bar{A}=[\bar{a}_{kl}]_{n\times n}(\bar{a}_{kl}\in[l_{kl},u_{kl}]$,且$k=i,l=j$时,$\bar{a}_{kl}=\bar{a}_{ij})$满足一致性,则说明$\bar{a}_{ij}$是不合理信息,因此定义5是合理的。

2 区间数判断矩阵排序方法

定义6[8] 设$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$是一个区间数向量,若对任意的$\bar{w}_i\in w_i(i\in\mathrm{N})$,存在实数$\bar{w}_j\in w_j(j\in\mathbf{N},j\neq i)$,使得$\bar{w}=(\bar{w}_1,\bar{w}_2,\cdots,\bar{w}_n)^{\mathrm{T}}$满足$\sum_{i=1}^{n}\bar{w}_i=1,\bar{w}_i\geqslant 0(i\in\mathbf{N})$,则称$w$为标准化区间数向量。

引理2[8] 区间数向量$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$为标准化向量的充要条件是其满足

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}w_i^L+w_j^U\leqslant 1,j\in\mathbf{N};\ \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}w_i^U+w_j^L\geqslant 1,j\in\mathbf{N}$$

设区间数判断矩阵$A=[a_{ij}]_{n\times n}$具有强一致性,求解以下线性规划(LP)模型:

$$w_i^L=\min\bar{w}_i\quad i\in\mathbf{N}$$
$$\mathrm{st}\quad \bar{w}\in S_{\bar{w}}$$
$$w_i^U=\max\ \bar{w}_i\quad i\in\mathbf{N}$$
$$\mathrm{st}\quad \bar{w}\in S_{\bar{w}}$$

其中,$S_{\bar{w}}=\{\bar{w}\,|\,l_{ij}\leqslant\bar{w}_i/\bar{w}_j\leqslant u_{ij},\sum_{i=1}^{n}\bar{w}_i=1(\bar{w}_i\geqslant 0,i\in\mathbf{N})\}$,$\bar{w}=(\bar{w}_1,\bar{w}_2,\cdots,\bar{w}_n)^{\mathrm{T}}$。

LP模型的解构成了区间数排序向量$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ $(w_i=[w_i^L,w_i^U])$,那么w是标准化区间数向量。下面进行说明:

对于$w_i^L(i\in\mathbf{N})$,由LP模型的约束条件可知,存在$\bar{w}_j\in w_j$ $(j\in\mathbf{N},j\neq i)$使得$w_i^L+\sum_{j\neq i}\bar{w}_j=1$。

又因为$w_j\leqslant w_j^U$,所以$w_i^L+\sum_{j\neq i}w_j^U\geqslant 1$。对于$w_i^U(i\in\mathrm{N})$,同理可得$w_i^U+\sum_{j\neq i}w_j^L\leqslant 1$。根据引理2,$w$是标准化区间数向量。

定理1 区间数判断矩阵$A=[a_{ij}]_{n\times n}$具有强一致性的充分必要条件为:由LP模型的解构成的标准化区间数排序向量$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$满足,对任意的$i,j\in\mathbf{N}$,

$$a_{ij}\subset\{\frac{\bar{w}_i}{\bar{w}_j}\,|\,\bar{w}_i\in w_i,\bar{w}_j\in w_j,\text{且存在}\bar{w}_k\in w_k(k\neq i,k\neq j),\text{使得}\sum_{m=1}^{n}\bar{w}_m=1\}\tag{1}$$

证明 1)充分性。假设$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$为LP模型的解构成的标准化区间数排序向量,且满足式(1),即对任意$\bar{a}_{ij}\in[l_{ij},u_{ij}]$,存在数字向量$\bar{w}=(\bar{w}_1,\bar{w}_2,\cdots,\bar{w}_n)^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{n}\bar{w}_i=1,\bar{w}_i\in w_i$, $i\in\mathrm{N})$,使得$\bar{a}_{ij}=\bar{w}_i/\bar{w}_j$,且对任意的$k,l\in\mathbf{N}$,$l_{kl}\leqslant\bar{w}_k/\bar{w}_l\leqslant u_{kl}$。令$\bar{a}_{kl}=\bar{w}_k/\bar{w}_l$,则数字判断矩阵$\bar{A}=[\bar{a}_{kl}]_{n\times n}$具有一致性,所以区间数判断矩阵$A=[a_{ij}]_{n\times n}$有强一致性。

2)必要性。假设A具有强一致性,$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$为LP模型的解构成的标准化区间数排序向量。由定义5,对任意$\bar{a}_{ij}\in a_{ij}(i,j\in\mathbf{N})$,存在一致性数字判断矩阵$\bar{A}=[\bar{a}_{kl}]_{n\times n}(\bar{a}_{kl}\in[l_{kl},u_{kl}];k,l\in\mathbf{N})$。根据定义1,存在数字向量$\bar{w}=(\bar{w}_1,\bar{w}_2,\cdots,\bar{w}_n)^{\mathrm{T}}$,使得$\bar{a}_{ij}=\bar{w}_i/\bar{w}_j$,由LP模型知,$w_i^L\leqslant\bar{w}_i\leqslant w_i^U,w_j^L\leqslant\bar{w}_j\leqslant w_j^U$,所以有

$$a_{ij}\subset\{\frac{\bar{w}_i}{\bar{w}_j}\,|\,\bar{w}_i\in w_i,\bar{w}_j\in w_j\ \text{且存在}\bar{w}_k\in w_k(k\neq i,k\neq j),\text{使得}\sum_{m=1}^{n}\bar{w}_m=1\}$$

如果$A=[a_{ij}]_{n\times n}$是强一致性区间数判断矩阵,则可通过求解LP模型得到标准化区间数排序向量。

如果$A=[a_{ij}]_{n\times n}$不具有强一致性,但具有一致性,即存在数字判断矩阵$\bar{A}=[\bar{a}_{ij}]_{n\times n}(\bar{a}_{ij}\in[l_{ij},u_{ij}])$具有一致性,则可以通过求解LP模型找到所有一致性信息。如果采用LP模型求解排序向量,一方面需要判别$A=[a_{ij}]_{n\times n}$是否具有一致性,另一方面会丢失所有不一致但决策者满意的信息,可以通过以下非线性规划模型(MLP)找出所有满意的信息。

$$w_i^L=\min\ \bar{w}_i\quad(i\in\mathbf{N})$$

$$\text{st}\quad \sum_{j=1}^{i-1}\frac{\overline{w}_j}{\bar{a}_{ji}}+\sum_{j=i+1}^{n}\bar{a}_{ij}\overline{w}_j\leqslant(n-1)(1+RI\cdot\delta)\overline{w}_i$$

$$w_i^U=\max\ \overline{w}_i\quad (i\in\mathbf{N})$$

$$\text{st}\quad \sum_{j=1}^{i-1}\frac{\overline{w}_j}{\bar{a}_{ji}}+\sum_{j=i+1}^{n}\bar{a}_{ij}\overline{w}_j\leqslant(n-1)(1+RI\cdot\delta)\overline{w}_i$$

$$l_{ij}\leqslant\bar{a}_{ij}\leqslant u_{ij}\quad (i<j;i,j\in\mathbf{N})$$

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{w}_i=1\quad (\overline{w}_i\geqslant 0,i\in\mathbf{N})$$

$$\delta\leqslant\delta^U$$

其中,RI 为层次分析法中的随机一致性指标,δ^U 为满意一致性指标阈值。

容易证明若决策者满意一致性指标阈值取 0,LP 模型等价于 MLP 模型,决策者可以根据自己的实际需求采用不同的方法求解排序向量。

3 算例分析

例 1 考虑如下区间数判断矩阵:

$$A=\begin{bmatrix}1&[2,5]&[2,4]&[1,3]\\ [1/5,1/2]&1&[1,3]&[1,2]\\ [1/4,1/2]&[1/3,1]&1&[1/2,1]\\ [1/3,1]&[1/2,1]&[1,2]&1\end{bmatrix}$$

文献[7]证明了其具有一致性,但不具有强一致性,下面利用第 2 节提出的方法求解排序向量。

首先用 LP 模型求解矩阵中所有的一致性信息, 求得区间数排序向量 w 为

$$w_1=[0.4000,0.5218]\qquad w_2=[0.1667,0.2401]$$
$$w_3=[0.1111,0.2000]\qquad w_4=[0.1538,0.2223]$$

利用区间数排序方法求得排序为

$$w_1>w_2>w_4>w_3$$

求解模型 MLP,找所有满意的信息(假设 δ^U=0.1),求得区间数排序向量 w 为

$$w_1=[0.3173,0.6188]\qquad w_2=[0.1182,0.3326]$$
$$w_3=[0.0858,0.2421]\qquad w_4=[0.1206,0.3280]$$

利用区间数排序方法求得排序为

$$w_1>w_2>w_4>w_3$$

例 2 供应链管理中,常需要选择利益共享、风险共担的合作伙伴。假设某企业有 4 个合作伙伴$\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$可供选择,聘请专家进行决策,专家从业务绩效、业务能力、质量系统以及企业所处的环境 4 个方面根据伙伴企业的基本状况进行两两比较,给出了区间数判断矩阵 B[4]。

$$B=\begin{bmatrix}1&[1,2]&[1,2]&[2,3]\\ [1/2,1]&1&[3,5]&[4,5]\\ [1/2,1]&[1/5,1/3]&1&[6,8]\\ [1/3,1/2]&[1/5,1/4]&[1/8,1/6]&1\end{bmatrix}$$

把矩阵 B 代入 LP 模型无解, 说明矩阵 B 不含有一致性信息。令 δ^U=0.1,利用 MLP 模型求解区间数排序向量 w 为

$$w_1=[0.2577,0.3259]\qquad w_2=[0.3878,0.4297]$$
$$w_3=[0.2116,0.2579]\qquad w4=[0.0637,0.0743]$$

利用区间数排序方法求得排序为

$$w_2>w_1>w_3>w_4$$

4 结论

在文献[7]对区间数判断矩阵一致性研究的基础上,进一步深入探讨了强一致性区间数判断矩阵的性质及排序方法。若决策者给出的偏好信息满足强一致性,说明决策者给出的所有信息都是合理信息;证明了利用线性规划模型(LP)求解强一致性区间数判断矩阵的排序向量是标准化区间数排序向量,并给出了所求标准化区间数排序向量与强一致性区间数判断矩阵的关系;通过实例验证了所提出的基于非线性规划模型的强一致性区间数判断矩阵排序方法也适用于一致性区间数判断矩阵及满意一致性区间数判断矩阵,完善了区间数判断矩阵理论。

参考文献(References)

[1] Satty T L. The analysis hierarchy process [M]. New York: McGraw-Hill, 1980.

[2] Satty T L, Vargas L. Uncertainty and rank order in the analytic hierarchy process[J]. *European Journal of Operational Research*, 1987, 32(1): 107-117.

[3] 徐泽水. 群组 AHP 中区间判断矩阵的一致性研究 [J]. 运筹与管理, 2000, 9(2): 8-11.
Xu Zeshui. *Operation and Management*, 2000, 9(2): 8-11.

[4] Wang Y M, Yang J B, Xu D L. Interval weight generation approaches based on consistency test and interval comparison matrices [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2005, 167(1): 252-273.

[5] 魏毅强, 刘进生, 王绪柱. 不确定 AHP 中判断矩阵的一致性概念及权重[J]. 系统工程理论与实践, 1994, 7(4): 16-22.
Wei Yiqiang, Liu Jinsheng, Wang Xuzhu. *Systems Engineering-Theory and Practice*, 1994, 7(4): 16-22.

[6] 朱建军, 刘士新, 王梦光. 基于遗传算法求解区间数 AHP 判断矩阵的权重[J]. 系统工程学报, 2004, 19(4): 344-349.
Zhu Jianjun, Liu Shixin, Wang Mengguang. *Journal of Systems Engineering*, 2004, 19(4): 344-349.

[7] 冯向前, 魏翠萍, 胡钢, 等. 区间数判断矩阵的一致性研究 [J]. 控制与决策, 2008, 23(2): 182-186.
Feng Xiangqian, Wei Cuiping, Hu Gang, *et al*. *Control and Decision*, 2008, 23(2): 182-186.

[8] Wang Y M, Elhag T M S. On the normalization of interval and fuzzy weights[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2006, 157(18): 2456-2471.

(责任编辑 刘志远)

本期推理小游戏答案

A 先拿一个,在这以后根据 B 的三种情况采取以下策略。

1. 若 B 拿一个,A 就拿二个。
2. 若 B 拿二个,A 就拿一个。
3. 若 B 拿四个,A 就拿二个。

也就是说, 每次保持和 B 拿的总数一定是 3 或 6, 由于 499=3×166+1,每轮 A 与 B 拿的总数一定是 3 的倍数,所以经过 N 次后一定会给 B 留下 1 或 4 个,意味着 B 必输。