

圆锥探头在准二维颗粒介质中匀速穿行的受力研究

龚程, 胡林, 余幼胜

贵州大学理学院, 贵阳 550025

摘要 研究圆锥状探头匀速压入准二维颗粒介质过程中所受阻力随深度的变化, 发现阻力曲线在不同深度区域呈现不同的变化规律, 存在凹—凸—凹的转变。针对本实验条件下观测到的现象, 分析并讨论曲线凹—凸—凹转变中出现两个拐点的物理机制, 认为阻力曲线的变化来源于侵入物自身的体积效应和容器底部对颗粒结构的影响。研究表明, 一般流体的静水压力描述并不适用于颗粒介质的慢速阻力行为, 颗粒介质存在自身的结构规律。

关键词 颗粒介质; 阻力; 力链重组

中图分类号 O345

文献标识码 A

文章编号 1000-7857(2010)23-0063-05

Experimental Research About Force on a Conical a Probe Passing Through a Quasi-two-dimensional Granular Bed with a Constant Velocity

GONG Cheng, HU Lin, YU Yousheng

College of Science, Guizhou University, Guiyang 550025, China

Abstract The movement of an intruder in a granular medium may result in interior reorganization of the force chain structure. The form of drag force experienced by the intruder reflects the macro effect of reorganization. By measuring the slowly-pushing force of the cone intruding vertically into a quasi-two-dimensional granular bed, the depth dependence of the vertical drag force in the granular medium is studied experimentally. It is found that the drag force curve has a concave-convex-concave transition with the increasing penetration depth and the drag force follows different depth dependence in different regimes. By studying the properties of two inflection points of the concave-convex-concave transition, it is shown that the front inflection point of the curve is the result of the volume effect of the intruder in the granular medium, and the rear inflection point of the curve is the result of the bottom boundary support. The depth of the front inflection point is independent of the packing height of the granular medium, however, the depth of the rear inflection point is linear with the packing height of the granular medium.

Keywords granular medium; drag force; force chain reorganization

0 引言

颗粒物质呈现出的很多独特现象和力学特性与其力链网络的复杂性有关, 目前其研究多从实验和计算机模拟方面展开。实验中, 大多对颗粒体系施加有控制的干扰, 研究整个颗粒体系的行为, 从不同角度分析力链受扰动后的演变规

律。Stone 等^[1-2]将一个圆盘竖直缓慢地压入装有颗粒的圆筒仓中, 发现下压深度较浅时阻力曲线呈线性增长, 下压深度较深时阻力曲线会出现饱和; 当圆盘接近容器底部时阻力曲线急剧增长。他们认为, 阻力在浅区域类似液体的静水压力, 随深度的增加线性增长; 阻力在较深区域呈饱和状态是由于存

收稿日期: 2010-08-09; 修回日期: 2010-11-06

基金项目: 《科技导报》博士生创新研究资助计划项目(kjdb20090101-8); 贵州省社会发展科技攻关计划项目(黔科合OZ字[2009]2); 贵州大学研究生创新基金项目(校研理工2010041); 贵州省优秀科技教育人才省长基金项目(黔省专合字(2010)16)

作者简介: 龚程, 硕士研究生, 研究方向为颗粒物质, 电子信箱: gongcheng8888@126.com; 胡林(通信作者), 教授, 研究方向为软凝聚态物理, 电子信箱: hulin53@sina.com

在 Janssen 效应。Albert 等^[3]将一根圆棒竖直插入装有颗粒的圆筒仓中,测量圆筒仓绕其轴线转动时棒受到的阻力,发现阻力的大小与棒插入颗粒床的深度及棒的侧面积成正比,而与颗粒的运动速度和颗粒的尺寸无关。他们将不同形状的探头连接在竖直棒的末端,探头完全没入颗粒床,圆筒容器绕其轴线转动并测量探头受到的阻力,发现阻力的大小随侵入深度呈非线性变化^[4]。Hill 等^[5]测量了与连接杆相连的不同形状和大小侵入物竖直缓慢压入和拔出浅层颗粒床的阻力,发现阻力随深度的增加并不呈线性增长,而是在下压和上拉过程中均呈现幂率增长关系,且上拉曲线的幂次(1.8)比下压曲线的幂次(1.3)大。彭政等^[6]报道了不同尺寸的大球缓慢压入颗粒床过程中所受阻力随深度变化的实验,发现阻力曲线在不同的深度区域有不同的增长规律,存在凹—凸转变,即在较浅区域阻力曲线为 1.3 次方的幂率增长,在较深的区域趋向 0.3 次方的幂率增长。他们认为曲线呈现由凹向凸转变的拐点,不是来源于前人认为的器壁支撑所致,而是来源于颗粒介质对侵入物上部与下部的压力差,即侵入物的体积效应所致。

为了仔细观察和测定颗粒体系受扰动情况下系统内部结构的变化,本文设计并搭建了准二维颗粒装置,将圆锥形探头缓慢匀速压入颗粒介质中,通过压力传感器测定探头受到的阻力,确定其随压入深度的变化关系,得到了一些较有意义的结果。

1 实验装置和方法

实验装置如图 1 所示,玻璃容器的长、宽、高分别为 380,35,370mm。颗粒为球形玻璃颗粒(平均粒径 0.7~0.9mm)。颗粒堆的制备方法采用定点流源法,漏斗固定在距容器平面约 50mm 位置,缓慢填充颗粒,自然填充条件下容器内形成静止角度约为 26°的颗粒表面,填充好颗粒后用一个自制的“凸”字形刮子把颗粒床的表面刮平。保证每次实验中用同样方法制备颗粒床,颗粒床体积分数约为 59%。圆锥探头的圆锥面直径 26mm,高 13mm,圆锥探头通过一根横截面

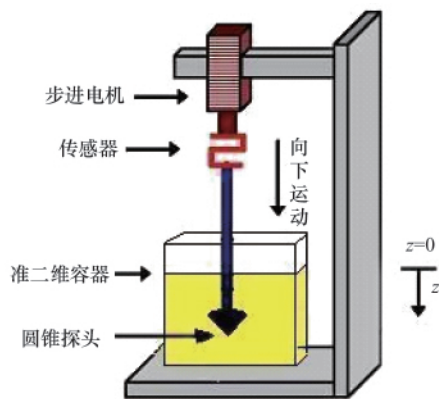


图 1 实验装置示意

Fig. 1 Sketch of experimental setup

直径为 6mm 的刚性棒与压力传感器 (Model 1022, 分辨率 0.001kg) 相连,压力传感器固定在可竖直运动的位移平台 (TSA400-AB,北京卓立汉光仪器有限公司)上,通过与传感器相连接的 GM8803 称重控制器(采集频率 20Hz)采集数据。控制位移平台以 1.069mm/s 的恒定速率将圆锥探头竖直压入颗粒床中,圆锥探头受到的阻力由压力传感器实时采集,并将数据记入电脑数据库。实验中只改变颗粒的填充高度,测量在不同的填充高度下探头所受阻力随压入深度 z 的变化,选择颗粒床表面为坐标原点 $z=0$ 。取重复 4 次测量的平均值作为图 2 中实验曲线上的数据点。

2 结果与分析

图 2 是探头由颗粒床表面下压到距容器底部 10mm 处的过程中,所受阻力 F 随下压深度 z 的变化关系曲线,颗粒填充高度分别为 50,100,150,200,250 和 300mm。由图 2 可知,阻力在下压过程中呈非线性变化:当颗粒填充高度小于 150mm 时,曲线呈单一幂率增长;当颗粒填充高度大于 150mm 时,阻力曲线出现前段下凹,中段凸起,后段又下凹的复杂变化过程。

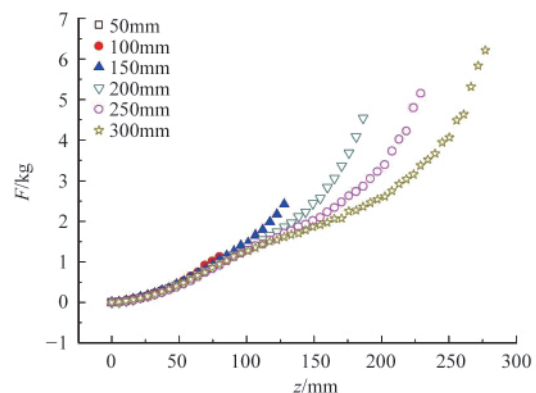


图 2 不同颗粒填充高度时的阻力曲线

Fig. 2 Resistance curve of conical probe in different packing heights

由图 2 还可看出,颗粒填充高度大于 150mm 时,4 条曲线共同经历第一个拐点后出现明显分歧,即曲线后部拐点出现的位置随颗粒填充的高度增加向 z 增加的方向移动。为了能更清楚地理解曲线上凸部分随颗粒填充高度的变化规律,从图 2 中提取颗粒填充高度分别为 100,200,300mm 的阻力曲线如图 3 所示,当颗粒填充高度为 100mm 时,阻力曲线呈单一的幂率增长,没有出现上凸部分;当颗粒填充高度为 200mm,阻力曲线出现上凸部分,但凸起不明显;当颗粒填充高度为 300mm 时,曲线上凸部分凸起很明显,即随着颗粒填充高度的增加,曲线上凸部分的凸起会越来越明显。

3 讨论

3.1 拐点的判断方法

用 Origin 8.0 对图 2 曲线进行数据处理,对曲线 $F(z)$ 平

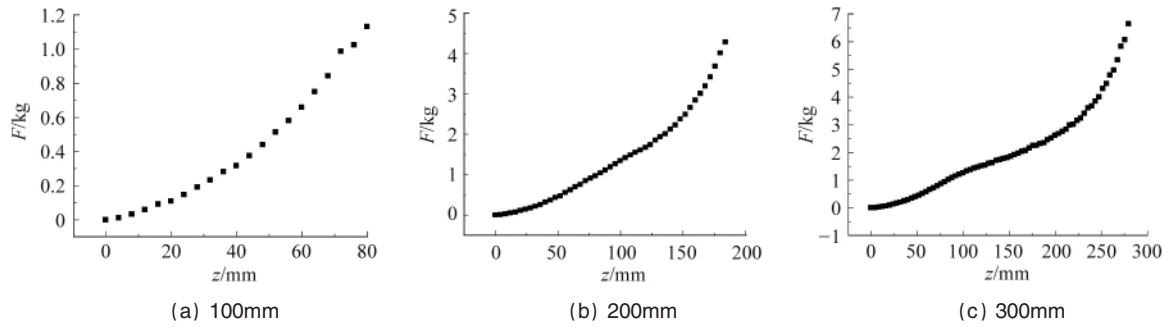


图3 不同颗粒填充高度时阻力随深度的变化关系

Fig. 3 Depth dependence of the resistance for various packing heights

滑后进行拐点判定(二阶微分),数据处理结果表明的确存在2个拐点 z_1 和 z_2 , 其中 z_1 为阻力曲线的前部拐点, z_2 为阻力曲线的后部拐点;数据处理得出的阻力曲线的 z_1 点都出现在同一深度(约 65mm)处,与颗粒填充高度无关;填充高度较浅时,后部拐点还没出现底部就开始影响探头受力,所以只有填充高度为 150, 200, 250 和 300mm 的曲线后部会出现拐点,并随着填充高度的增加, z_2 点出现位置越深,分别为 82.2, 106.1, 124.3 和 156.2mm。

对函数 $F(z)$ 进行二阶求导得到:当 $F''(z) > 0$ 时曲线是凹的;当 $F''(z) < 0$ 时曲线是凸的; $F''(z) = 0$ 处 z 值为曲线拐点。

3.2 两次拐点出现的原因

根据实验观察并结合数据处理结果分析后认为:① 阻力曲线的前部拐点是源于探头上部颗粒回填所致。即探头竖直压入颗粒介质中,开始是将下方的颗粒挤向两侧(流化),此时探头受到的阻力完全是下方颗粒介质对其的平均压力(方向朝上),当探头整个没入颗粒介质以后,两侧的颗粒向空穴处回填,覆盖在探头上方,但这些回填的颗粒在短时间内不会立即构成强的力链,当这些回填颗粒与整个颗粒系统充分接触,形成新的力链结构后,探头上部的介质对探头有向下的平均压力,这时探头所受合力发生变化,导致曲线前部拐点的出现。文献[7]中小球压入颗粒床也有类似的行为。② 探头下压逐渐接近容器底部,若底部边界对探头的受力有影响(给探头一个向上的反作用力),那么,探头受到的合力应该与不受底部影响时不同,即底部不是自由边界与自由边界有区别,探头下压相同深度时两种情况下的曲线会出现分离,分离点就是底部边界开始对探头有影响的位置。

为了找出底部开始影响探头受力的位置,设计了以下实验:在同样的实验装置条件下,颗粒填充高度为 350mm,探头下压至深度为 175mm 处,这时底部仍旧保持 175mm 深的颗粒,即认为底部是自由边界,得到图 4 中三角形标记的曲线,以下称为参照曲线。阻力曲线的数据点是通过 4 次测量取平均值得到的,当阻力曲线的阻力值与参照曲线的阻力值偏差等于 4 次测量得到的最大值与最小值的差时,将该点处的值作为 z_0 ,然后,保持所有实验条件不变,只是改变颗粒填充高

度,变为 250mm,同样由颗粒上表面开始用同样的速率下压,得到图 4 中方形数据点曲线。当探头下压深度 $z_0 = 124\text{mm}$ 时两条曲线出现分离。这表明填充高度为 250mm 的颗粒床中,探头下压到 124mm 深度处,底部边界影响开始起作用,探头所受合力逐渐增大。用同样的方法可以分别找出颗粒填充高度分别为 150, 200, 300mm 时,阻力曲线与参照曲线分离时分离点的深度分别为 78, 111 和 155mm。用 Origin 8.0 对不同填充高度的曲线进行数据处理,得到后部拐点深度 z_2 的值,该值与实验曲线上分离点深度 z_0 一致。证实了阻力曲线后部拐点的出现是由于底部边界影响所致。

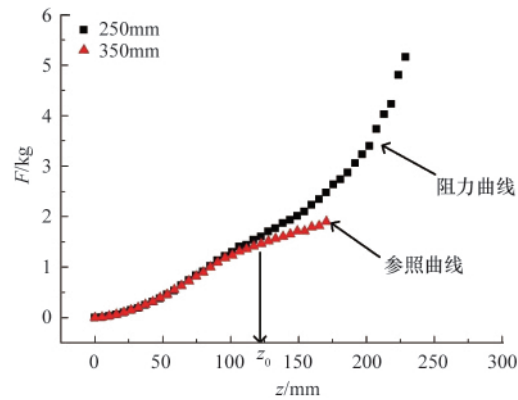
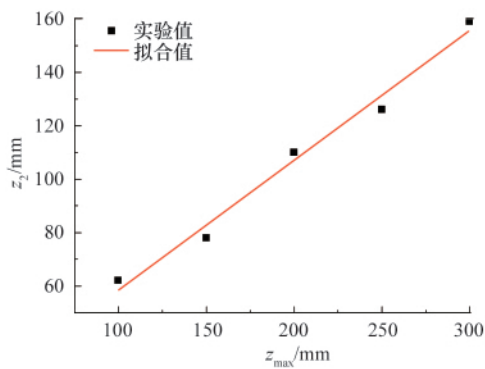


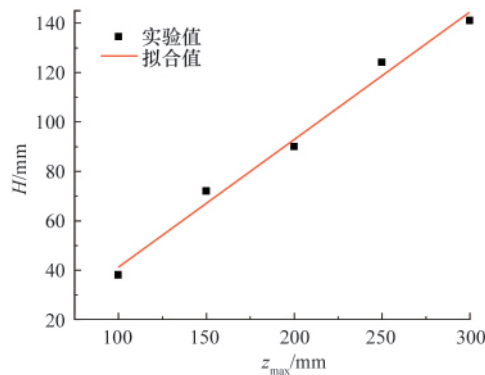
图4 颗粒填充高度为 250mm 的阻力与参照曲线
Fig. 4 Resistance curve for packing height of 250mm and the reference curve

3.3 底部边界影响与颗粒填充高度的关系

由图 2 可知,颗粒填充高度不同时,后部拐点出现的位置也不同。为了讨论这个问题,以颗粒填充总高度 z_{max} 为横坐标,分别以第 2 个拐点的位置 z_2 、 z_2 到容器底部的距离 H (即 $H = z_{\text{max}} - z_2$) 为纵坐标,得 z_2 和 H 随 z_{max} 的变化曲线(图 5)。可以看出,拐点位置 z_2 、底部边界的影响距离 H 均随颗粒填充高度线性增加。其中,拟合曲线 $z_2 = 0.484z_{\text{max}} + 1.02$, $H = 0.516z_{\text{max}} - 1.02$ 。该变化可以理解为,由于颗粒体系的力网结构,强力链在支



(a)



(b)

图5 第2个拐点深度(a)和第2个拐点距底部距离(b)随颗粒填充高度的变化关系

Fig. 5 z_{\max} dependence of the z_2 (a) and the H (b)

撑颗粒体系重量及探头所施加压力中占主要作用,分布在颗粒体系内的大量弱力链与强力链衔接,对强力链的稳定起辅助作用,并参与强力链断裂后的重组。强力链随着颗粒填充深度的增加而增多。探头下压时,由于容器周边和底部边界的限制,压力下方的强力链会更加突出,并呈拱形支撑来自上方的压力。当颗粒填充高度增加,探头下压过程中诱发的强链增多,从四周反射到探头上的作用随之增大。所以,容器底部边界影响的范围会随颗粒填充高度的增加而增加。

3.4 曲线凸起与颗粒填充高度的关系

图3显示了曲线的上凸区域受颗粒填充高度的影响。实验发现,在曲线前部拐点和后部拐点之间,曲线的变化表现为上凸。

从图6可以看出,曲线两个拐点之间的上凸曲线呈同一变化规律(误差范围内几乎重合)。对于给定曲率的曲线,其上任意两点之间的距离越短,越像直线。因此,当颗粒填充高度为300mm时曲线上凸部分比颗粒填充高度为100mm时凸起明显。

3.5 探头受力动力学分析

为了解释实验结果,认为在探头的上方和下方以及在浅层颗粒和深层颗粒介质的平均压强与深度都满足关系式

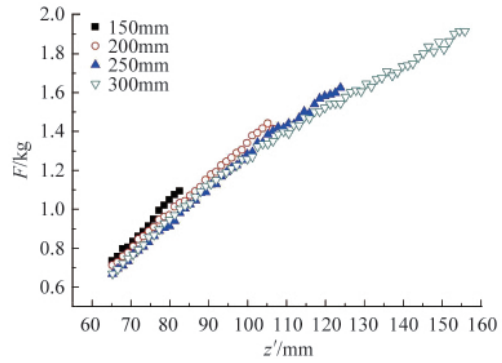


图6 不同颗粒填充高度下两拐点之间的曲线
Fig. 6 Resistance curves between two inflection points for different packing heights of grain medium

$$P=kz^\alpha$$

其中, k 为比例系数, α 为常数。

1) 当探头压入深度较浅时(z_1 之前),探头受力 F 主要来自探头下方颗粒介质对其向上的作用,即 $F \approx P \cdot S \approx k \cdot S z^\alpha$,其中 S 为圆锥截面积。这与对本实验浅层颗粒阻力曲线进行拟合所得到的拟合公式 $F=a \cdot z^b$ 一致,并得出 $k \approx 9.2 \times 10^{-5}$, $\alpha \approx 1.7$ 。

2) 当探头压入较深时(z_1 和 z_2 之间),探头上方的回填颗粒与整个颗粒系统充分接触,形成新的力链结构,探头上部的介质开始对探头有向下的平均压力,这时探头所受合外力发生变化,探头受力主要来自:① 探头上部颗粒介质对其向下的作用 F_{\downarrow} ;② 探头下方颗粒介质对其向上的作用力 F_{\uparrow} ;③ 探头受到颗粒介质对其摩擦力 f ,其中摩擦系数 $\mu \approx 0.8$ 。按照图7对各个力进行求解:

$$F_{\downarrow} = k z^\alpha \pi R^2$$

$$F_{\uparrow} = \int_0^h k(z+L)^\alpha \cdot 2\pi(R-L\tan\theta) \frac{1}{\cos\theta} dL$$

$$f = \mu \int_0^h k(z+L)^\alpha \cdot 2\pi(R-L\tan\theta) \frac{1}{\cos\theta} dL$$

其中, R 为圆锥半径, h 为圆锥的高度, θ 为圆锥的半顶角。

由于圆锥的对称性, F_{\uparrow} 、 f 水平方向上的合力为0,所以探头受到的合力应该是3个力在竖直方向上的分力合, f_{\perp} 、 $F_{\uparrow\perp}$ 分别表示 f 、 F_{\uparrow} 沿竖直方向上的分力。

$$f_{\perp} = \mu F_{\uparrow} \cos\theta = \mu \int_0^h k(z+L)^\alpha \cdot 2\pi(R-L\tan\theta) \frac{1}{\cos\theta} dL \cdot \cos\theta$$

$$= \mu \int_0^h k(z+L)^\alpha \cdot 2\pi(R-L\tan\theta) dL$$

$$F_{\uparrow\perp} = F_{\uparrow} \sin\theta = \int_0^h k(z+L)^\alpha \cdot 2\pi(R-L\tan\theta) \frac{1}{\cos\theta} dL \cdot \sin\theta$$

$$= \int_0^h k(z+L)^\alpha \cdot 2\pi(R-L\tan\theta) dL$$

由于实验中探头的半径 R 为13mm,高度 h 为13mm, $\tan\theta=R/h=1$,圆锥探头受到的合力为

$$F = f_{\perp} + F_{\uparrow\perp} + F_{\downarrow}$$

$$= 2k\pi(1+\mu) \int_0^h (z+L)^\alpha \cdot (R-L\tan\theta) dL - k z^\alpha \pi R^2$$

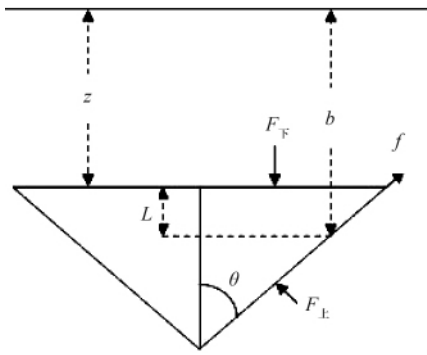


图7 探头的受力及积分变量示意图

Fig. 7 Sketch of force on the probe and integral variable

用 Origin 8.0 画出 $F-z$ 理论曲线, 发现理论推导出的值与实验值基本吻合, 如图 8 所示。

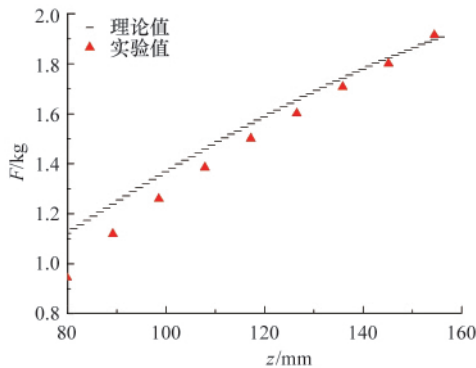


图8 实验值和理论值

Fig. 8 Comparison between experiment and theory

4 结论

本实验测量了在不同填充高度下, 圆锥探头缓慢压入颗

粒床过程中所受阻力。结果表明, 当填充颗粒总高度较高时, 阻力曲线存在两个拐点, 前部拐点是颗粒回填所致, 拐点深度约 65mm, 该值与探头尺寸有关且不随颗粒填充高度变化; 后部拐点是底部边界影响所致。后部拐点出现的深度随着颗粒填充高度的增加线性增加, 容器底部边界效应也随颗粒填充高度的增加而增强, $H-z_{\max}$ 与 z_2-z_{\max} 关系拟合直线的斜率均在 0.5 左右。对探头受力的动力学过程进行了分析, 理论推导出的曲线和实验值基本吻合。该实验研究可帮助认识工程钻探中钻头受力与钻探深度及钻头受力与岩层深度的关系, 理解钻头磨损与钻探深度之间的物理意义。

参考文献 (References)

- [1] Stone M B, Bernstein D P, Barry R, et al. Stress propagation: Getting to the bottom of a granular medium[J]. *Nature*, 2004, 427(6974): 503-504.
- [2] Stone M B, Barry R, Bernstein D P, et al. Local jamming via penetration of a granular medium[J]. *Phys Rev E*, 2004, 70(4): 041301-041310.
- [3] Albert R, Pfeifer M A, Barabási A L, et al. Slow drag in a granular medium[J]. *Phys Rev Lett*, 1999, 82(1): 205-208.
- [4] Albert I, Sample J G, Morss A J, et al. Granular drag on a discrete object: Shape effects on jamming[J]. *Phys Rev E*, 2001, 64(6): 061303-061306.
- [5] Hill G, Yeung S, Koehler S A. Scaling vertical drag forces in granular media[J]. *Europhys Lett*, 2005, 72(1): 137-143.
- [6] 彭政, 陆坤权, 厚美瑛. 阻塞态颗粒介质的慢速阻力 [J]. *物理学报*, 2009, 58(9): 6566-6571.
Peng Zheng, Lu Kunquan, Hou Meiyang. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(9): 6566-6571.
- [7] Peng Z, Xu X T, Lu K Q, et al. Depth dependence of vertical plunging force in granular medium[J]. *Phys Rev E*, 2009, 80(2): 021301-021305.

(责任编辑 代丽)

·学术动态·



“第三届全国法制/法治系统工程理论研讨会”征文

中国系统工程学会等将于 2010 年 12 月 30 日在北京召开“第三届全国法制/法治系统工程理论研讨会”。

征文内容: 法制/法治系统复杂性理论研究; 法制系统的系统性、开放性和适应性研究; 法制系统与中国经济-科技-社会系统协同发展研究; 系统法学观与中国立法司法决策; 法制系统在社会控制中的地位与作用; 法制系统自身的完善及其控制能力的提高; 立法系统、司法系统(公检法司)及执法部门(工商、税务、仲裁)的信息化建设的理论和实践成果; 法制系统的智能化建设的理论和实践成果; 分配体制改革与法律系统框架完善; 法制文明与城市发展; 基层司法所与农村法制系统建设; 与主题相关的政府、司法部门的工作议题及其法制/法治系统工程理论和实践成果。

征文截止时间: 2010 年 12 月 15 日。

地址: 北京市海淀区西土城路 25 号中国政法大学系统法学与系统科学和文化研究中心 (100088) 罗明; 电话: 010-58908037; 传真: 010-58908037; 电子信箱: th3huiyi@163.com。