一种不确定型多属性决策方法及其应用

张传芳[1],杨春玲[1],许文翠[2]

1. 黑龙江科技学院理学院,哈尔滨 150027
2. 黑龙江农业工程职业学院,哈尔滨 150088

摘要 讨论了权重完全未知且属性值为区间数的多属性决策问题,提出了一种基于理想区间数贴近度的决策方法。首先定义区间数的距离,并给出区间数贴近度的公理化定义,讨论区间数贴近度的性质,然后针对区间型多属性决策问题给出一种区间型决策矩阵的规范化方法,并给出3种确定权重的方法,分别是模糊标度重心赋权法(主观赋权法)、基于最小相对熵原理的熵与相对熵综合赋权法(客观赋权法)以及利用优化方法,以待评方案与理想最优方案的贴近度最大化为优化目标,建立的贴近度最大化赋权法(主、客观组合赋权法)。利用权重可计算出每个方案与理想方案的综合贴近度,即可得到所有方案的排序结果。最后通过实例分析验证了该方法的有效性和实用性。

关键词 区间数;贴近度;多属性决策

中图分类号 O223 **文献标识码** A **文章编号** 1000-7857(2010)22-0086-05

A Method for Uncertain Multi-attribute Decision Making and Its Application

ZHANG Chuanfang[1], YANG Chunling[1], XU Wencui[2]

1. *School of Science, Heilongjiang Institute of Science and Technology, Harbin 150027, China*
2. *Heilongjiang Vocation Institute of Agricultural Engineering, Harbin 150088, China*

Abstract This paper studies a kind of decision making problems of uncertain multiple attributes with attribute weights completely unknown and the attribute values being interval numbers. A decision making method based on similarity degree of ideal interval number is proposed. Firstly, the distance of interval number is defined. An axiomatic definition of the interval number similarity degree is given and its properties are discussed. Then, some formulas are derived for normalizing the decision matrix with interval numbers for multiple attribute decision making with intervals. Three methods used to determine the weights are presented, namely, the fuzzy scale center of gravity weighting approach, which is a subjective weight determination; the comprehensive weighting method of entropy and relative entropy, which is an objective weighting approach based on the principle of the minimum relative information entropy; and that by using optimization theory for maximizing similarity degree with similarity degree of project being evaluated to establish the ideal optimization scheme, which is an objective and subjective combined approach to determine weights with better accuracy of the index weight. The comprehensive similarity degree to the ideal solution is calculated to compare all alternatives. Finally, an illustrative example is given to demonstrate the feasibility and practicability of the method.

Keywords interval number; similarity degree; multi-attribute decision-making

0 引言

多属性决策亦称为多指标决策,普遍存在于工程设计、经济、管理和军事活动中,它重点解决的问题是有限方案的排序择优问题,是决策理论与方法研究的一个重要内容。值得指出的是,以区间数形式给出决策信息的多属性决策是实际中经常遇到的一种。Noel 等[1]采用线性规划方法将区间型

收稿日期:2010-06-28;**修回日期**:2010-11-03

基金项目:黑龙江省教育厅科学技术研究项目(11553103)

作者简介:张传芳,讲师,研究方向为决策理论、模糊数学,电子信箱:kyzcf2006@163.com

决策问题转化为区间数的排序问题;张全等[2]和徐泽水等[3]基于区间数比较的可能度公式和互补判断矩阵的排序方法,对区间型多属性决策问题进行了研究;Yoon 等[4]提出了误差分析方法;叶跃祥等[5]借鉴集对分析理论中论域三划分的思想,将区间评价值转化为三元联系数的形式,给出一种基于集对分析的区间型多属性决策方法;尤天慧等[6]定义了区间数与确定数的距离,用 TOPSIS 方法对决策结果进行排序。本文参考逼近理想解的思想方法,提出了一种基于区间数贴近度的多属性决策方法。

1 区间数的贴近度

定义 1[7–8] 设 **R** 为实数集,对于任意的 $a^-,a^+\in \mathbf{R}$,若 $a^-\leqslant a^+$,则称闭区间

$$\tilde a=[a^-,a^+]=\{x\,|\,a^-\leqslant x\leqslant a^+,x\in\mathbf{R}\}\tag{1}$$

为一个区间数。特别地,若 $a^-=a^+$,则$\tilde a$退化为一个实数。区间数的全体记为:$\tilde{\mathbf{R}}$。

定义 2 设区间数$\tilde a=[a^-,a^+]$,$\tilde b=[b^-,b^+]$,$p\geqslant 1$,称

$$d_p(\tilde a,\tilde b)=\sqrt[p]{|a^+-b^+|^p+|a^--b^-|^p}=\left(|a^+-b^+|^p+|a^--b^-|^p\right)^{\frac{1}{p}}\tag{2}$$

为区间数$\tilde a$与$\tilde b$的广义距离。

当 $p=1$ 时

$$d_1(\tilde a,\tilde b)=|a^+-b^+|+|a^--b^-|$$

即为文献[9]中定义的相离度。

当 $p=2$ 时

$$d_2(\tilde a,\tilde b)=\sqrt{(a^+-b^+)^2+(a^--b^-)^2}$$

即为文献[10]、[11]中定义的区间数的相离度和距离。

参照文献[8]、[12]、[13]定义的模糊集贴近度的公理化定义,给出区间数贴近度的公理化定义为

定义 3 设$\forall\,\tilde a,\tilde b\in\tilde{\mathbf{R}}$,在$\tilde{\mathbf{R}}$上定义二元函数

$$\sigma:\tilde{\mathbf{R}}\times\tilde{\mathbf{R}}\to[0,1]$$

$$(\tilde a,\tilde b)\to\sigma(\tilde a,\tilde b)$$

若满足下列 3 个性质:

1) $\sigma(\tilde a,\tilde b)=1\Leftrightarrow\tilde a=\tilde b$,且 $\sigma(\tilde a,\phi)=0$,其中$\tilde a\neq\phi$;

2) $\sigma(\tilde a,\tilde b)=\sigma(\tilde b,\tilde a)$;

3) $\tilde c\subseteq\tilde b\subseteq\tilde a\Rightarrow\sigma(\tilde a,\tilde c)\leqslant\sigma(\tilde a,\tilde b)$且 $\sigma(\tilde a,\tilde c)\leqslant\sigma(\tilde b,\tilde c)$,

则称 σ 为$\tilde{\mathbf{R}}$上的贴近度函数,称 $\sigma(\tilde a,\tilde b)$为$\tilde a$与$\tilde b$的贴近度。

定义 4 称

$$\sigma_p(\tilde a,\tilde b)=\frac{1}{1+d_p(\tilde a,\tilde b)}=\frac{1}{1+\sqrt[p]{|a^+-b^+|^p+|a^--b^-|^p}}\tag{3}$$

为区间数$\tilde a$与$\tilde b$的贴近度。规定 $\sigma_p(\tilde a,\phi)=0$。

由定义 4 易得区间数贴近度的性质:

1) $0<\sigma_p(\tilde a,\tilde b)\leqslant 1$ 且 $\sigma_p(\tilde a,\tilde b)=1\Leftrightarrow\tilde a=\tilde b$,即$\tilde a$与其自身最贴近;

2) $\sigma_p(\tilde a,\tilde b)=\sigma_p(\tilde b,\tilde a)$,即对称性成立;

3) $\lim\limits_{d_p(\tilde a,\tilde b)\to+\infty}\sigma_p(\tilde a,\tilde b)=0$,即$\tilde a$与$\tilde b$无限相离时贴近度最小;

4) 若区间数满足$\tilde c\subseteq\tilde b\subseteq\tilde a$,即 $a^-\leqslant b^-\leqslant c^-<c^+\leqslant b^+\leqslant a^+$,则

$$\sigma_p(\tilde a,\tilde c)\leqslant\sigma_p(\tilde a,\tilde b)\text{且 }\sigma_p(\tilde a,\tilde c)\leqslant\sigma_p(\tilde b,\tilde c)$$

5) 若区间数$\tilde a,\tilde b,\tilde c$满足 $a^-\leqslant a^+\leqslant b^-\leqslant b^+\leqslant c^-\leqslant c^+$,则

$$\sigma_p(\tilde a,\tilde c)\leqslant\sigma_p(\tilde a,\tilde b)\text{且 }\sigma_p(\tilde a,\tilde c)\leqslant\sigma_p(\tilde b,\tilde c)$$

这些性质显然符合区间数贴近度的含义及其公理化定义,从而说明由式(3)定义的区间数的贴近度是合理的。

2 决策模型的建立

设方案集 $A:\{A_i\},i\in M=\{1,2,\cdots,m\}$。属性指标集为 $G:\{G_j\},j\in N=\{1,2,\cdots,n\}$。方案 A_i 关于指标 G_j 的属性值$\tilde x_{ij}$构成区间型决策矩阵 $X=(\tilde x_{ij})$,不失一般性假设$\tilde x_{ij}=[x_{ij}^-,x_{ij}^+](i\in M,j\in N)$均为正区间数,各指标的权重未知。

2.1 数据的预处理

由于各评价指标的量纲不同、数量级不同,为了消除这些对决策结果的影响,需要将决策矩阵 $X=(\tilde x_{ij})$规范化为 $\boldsymbol R=(\tilde r_{ij})_{m\times n}$。常见的指标类型为效益型和成本型,分别用 I_1,I_2 表示。本文的规范化方法如下:

$$r_{ij}^-=x_{ij}^-/\max_i x_{ij}^+\quad r_{ij}^+=x_{ij}^+/\max_i x_{ij}^+\qquad(i\in M,\ j\in I_1)\tag{4}$$

$$r_{ij}^-=\min_i x_{ij}^-/x_{ij}^+\quad r_{ij}^+=\min_i x_{ij}^-/x_{ij}^-\qquad(i\in M,\ j\in I_2)\tag{5}$$

变换式(4)和式(5)的优点是它们是线性变换的,变换前后的属性值成比例,且变换后有$[r_{ij}^-,r_{ij}^+]\in[0,1]$,各最优属性的值均为 1,但最差属性的值不统一。

2.2 权重的确定

2.2.1 模糊标度重心赋权法——主观赋权法

假设由专家给出的各属性间的重要程度由高到低排序为 $G_{j_1},G_{j_2},\cdots,G_{j_n}$,相邻属性间的重要性程度均为模糊语气算子,则可结合模糊语气算子与定量标度的关系[14](表 1)确定相邻属性 $G_{j_k},G_{j_{k+1}}$间的标度值 $\beta_{j_{k+1}}(k=1,2,\cdots,n-1)$,取 $\beta_{j_1}=0.5$,令 $e_{j_k}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=k}^{n}\beta_{j_i}$,将其归一化后即得权重

$$w_{j_k}=\frac{e_{j_k}}{\sum\limits_{l=1}^{n}e_{j_l}}=\frac{\sum\limits_{i=k}^{n}\beta_{j_i}}{\sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{i=l}^{n}\beta_{j_i}}\qquad(k=1,2,\cdots,n)\tag{6}$$

称这种赋权法为排序模糊标度重心赋权法,得到的权重记为

$$W^S=(w_1^S,w_2^S,\cdots,w_n^S)^{\mathrm T}\tag{7}$$

其中,$w_1^S,w_2^S,\cdots,w_n^S$ 为 $w_{j_1}^S,w_{j_2}^S,\cdots,w_{j_n}^S$原序排列,$w_{j_k}^S(k=1,2,\cdots,n)$由式(6)确定。

表 1　语气算子与定量标度的关系

Table 1　Relationship between mode operator and quantitative mark

语气算子	同样	稍稍	略为	较为	明显	显著	十分	非常	极其	极端	无可比拟
定量标度	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1.0

2.2.2　CERE 赋权法——客观赋权法

信息熵理论认为，熵可以度量所获取的数据提供的有用信息量。由于在区间型规范化决策矩阵 $R=(\tilde{r}_{ij})_{m\times n}$ 中不能直接利用传统确定熵权的方法[15-16]求指标权重，对此，给出一种确定区间型属性熵权的方法。

令

$$A^-=(r_{ij}^-)_{m\times n}\qquad p_{ij}^-=r_{ij}^-\Big/\sum_{i=1}^{m}r_{ij}^-\qquad h_j^-=-(\ln m)^{-1}\sum_{i=1}^{m}p_{ij}^-\ln p_{ij}^-$$

则

$$w_j^-=(1-h_j^-)\Big/\sum_{k=1}^{n}(1-h_k^-)\quad(j\in N)\tag{8}$$

其中，若 $p_{ij}^-=0$，则规定 $p_{ij}^-\ln p_{ij}^-=0$，$(i\in M,j\in N)$，且记 $\boldsymbol{w}^-=(w_1^-,w_2^-,\cdots,w_n^-)^{\mathrm{T}}$。

令

$$A^+=(r_{ij}^+)_{m\times n}\quad p_{ij}^+=r_{ij}^+\Big/\sum_{i=1}^{m}r_{ij}^+\qquad h_j^+=-(\ln m)^{-1}\sum_{i=1}^{m}p_{ij}^+\ln p_{ij}^+$$

则

$$w_j^+=(1-h_j^+)\Big/\sum_{k=1}^{n}(1-h_k^+)\qquad(j\in N)\tag{9}$$

记 $\boldsymbol{w}^+=(w_1^+,w_2^+,\cdots,w_n^+)^{\mathrm{T}}$。

根据最小相对熵原理，当将 x,y 看成两个离散分布时，相对熵可以作为二者符合程度的一个度量[17]。将 $\boldsymbol{w}$ 与 $\boldsymbol{w}^-$、$\boldsymbol{w}^+$ 看作离散分布，利用相对熵作为优化函数建立如下模型：

$$\begin{aligned}&\min F(\boldsymbol{w})=\sum_{j=1}^{n}w_j(\ln w_j-\ln w_j^+)+\sum_{j=1}^{n}w_j(\ln w_j-\ln w_j^-)\\&\mathrm{st}\ \sum_{j=1}^{n}w_j=1,w_j\geqslant0\qquad(j\in N)\end{aligned}\tag{10}$$

利用拉格朗日乘子法解优化问题(10)，可得最优解为

$$w_j=\frac{\sqrt{w_j^-w_j^+}}{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{w_k^-w_k^+}}\qquad(j\in N)\tag{11}$$

称上述确定权重方法为熵与相对熵综合赋权法(Comprehensive Weighting Method of Entropy and Relative Entropy，CERE)，确定的权重记为

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{E}}=(w_1^{\mathrm{E}},w_2^{\mathrm{E}},\cdots,w_n^{\mathrm{E}})^{\mathrm{T}}\tag{12}$$

2.2.3　贴近度最大化赋权法——主、客观组合赋权法

假设有 Q 种赋权方法对 n 个属性赋权值，第 q 种赋权方法给出的权值向量为

$$\boldsymbol{w}^q=(w_1^q,w_2^q,\cdots,w_n^q)^{\mathrm{T}}\tag{13}$$

其中，$\sum_{j=1}^{n}w_j^q=1,w_j^q\geqslant0,j=1,2,\cdots,n,q=1,2,\cdots,Q$。

为了综合各种赋权方法的特点，设组合权值为

$$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}=\alpha_1\boldsymbol{w}^1+\alpha_2\boldsymbol{w}^2+\cdots\alpha_Q\boldsymbol{w}^Q\tag{14}$$

其中，$\alpha_q\geqslant0(q=1,2,\cdots,Q)$ 为均衡因子，表示对应权重的重要程度，满足单位化约束条件：

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_Q^2=1\tag{15}$$

设规范化的理想方案为

$$\tilde{\boldsymbol{r}}^+=(\tilde{r}_1^+,\tilde{r}_2^+,\cdots,\tilde{r}_n^+)^{\mathrm{T}}\tag{16}$$

根据定义 4 可知，方案 A_i 与理想方案之间的差异可以用规范化决策矩阵 $\boldsymbol{R}=(\tilde{r}_{ij})_{m\times n}$ 中 A_i 的评价向量 $(\tilde{r}_{i1},\tilde{r}_{i2},\cdots,\tilde{r}_{in})$ 与理想方案的综合贴近度衡量，即

$$\sigma_i^+=\sum_{j=1}^{n}\sigma_p(\tilde{r}_{ij},\tilde{r}_j^+)w_j\qquad(i\in M)\tag{17}$$

显然对每个方案来说，σ_i^+ 总是越大越好，为此，建立如下的多目标最优化模型：

$$\begin{aligned}&\max D(\alpha)=(\sigma_1^+,\sigma_2^+,\cdots,\sigma_m^+)^{\mathrm{T}}\\&\mathrm{st}\quad\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_Q^2=1\\&\qquad\alpha_q\geqslant0\ (q=1,2,\cdots,Q)\end{aligned}\tag{18}$$

令

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix}\sigma_p(\tilde{r}_{11},\tilde{r}_1^+)&\sigma_p(\tilde{r}_{12},\tilde{r}_2^+)&\cdots&\sigma_p(\tilde{r}_{1n},\tilde{r}_n^+)\\\sigma_p(\tilde{r}_{21},\tilde{r}_1^+)&\sigma_p(\tilde{r}_{22},\tilde{r}_2^+)&\cdots&\sigma_p(\tilde{r}_{2n},\tilde{r}_n^+)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\sigma_p(\tilde{r}_{m1},\tilde{r}_1^+)&\sigma_p(\tilde{r}_{m2},\tilde{r}_2^+)&\cdots&\sigma_p(\tilde{r}_{mn},\tilde{r}_n^+)\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{W}_{n\times Q}=(\boldsymbol{w}^1,\boldsymbol{w}^2,\cdots,\boldsymbol{w}^Q)=\begin{pmatrix}w_1^1&w_1^2&\cdots&w_1^Q\\w_2^1&w_2^2&\cdots&w_2^Q\\\vdots&\vdots&&\vdots\\w_n^1&w_n^2&\cdots&w_n^Q\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_Q)^{\mathrm{T}}$$

则模型(18)可改写为

$$\begin{aligned}&\max\ D(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{AW\alpha}\\&\mathrm{st}\quad\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1\\&\qquad\boldsymbol{\alpha}\geqslant0\end{aligned}\tag{19}$$

假设各方案之间公平竞争，不存在任何偏好关系，求解模型(19)时可采用等权的平方和函数法将多目标规划问题化成单目标最优化问题：

$$\max\ F(\boldsymbol{\alpha})=\sum_{i=1}^{m}(\sigma_i^+)^2=D(\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}D(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AW\alpha}$$

$$\mathrm{st}\quad\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$$

$$\boldsymbol{\alpha}\geqslant 0 \tag{20}$$

由于向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 满足单位化约束条件,故式(20)可化成如下等价的最优化问题:

$$\max\ F(\boldsymbol{\alpha})=\frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}$$

$$\mathrm{st}\quad \boldsymbol{\alpha}\geqslant 0 \tag{21}$$

根据矩阵理论可知,$F(\boldsymbol{\alpha})$为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的 Rayleigh 商[18]。又由于 $W^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AW$ 为对称阵,由 Rayleigh 商的性质可得 $F(\boldsymbol{\alpha})$存在最大值,且

$$\max\ F(\boldsymbol{\alpha})=\lambda_{\max}(W^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AW)$$

其中,$\lambda_{\max}(W^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AW)$为实对称阵 $W^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AW$ 的最大特征值,此时,$\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\lambda_{\max}$ 对应的单位化特征向量。由于 $W^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AW$ 是非负对称矩阵,根据非负不可约矩阵的 Perron-Frobenius 定理可知,$\lambda_{\max}$ 为单根且对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_Q)^{\mathrm{T}}$ 全部为正实数[18]。

另外,需要指出的是,为求解模型(19),也可采用等权的线性权和法将多目标规划转化成单目标最优化问题:

$$\max\ F_1(\boldsymbol{\alpha})=\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^{+}=\boldsymbol{e}_{m\times1}^{\mathrm{T}}D(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{e}_{m\times1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathrm{st}\quad \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1 \tag{22}$$

$$\boldsymbol{\alpha}\geqslant 0$$

其中,$\boldsymbol{e}_{m\times1}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$。

利用拉格朗日乘子法解优化问题(22)可得最优解为

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}}{\sqrt{\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}}} \tag{23}$$

事实上,这种方法与前一种方法实质是相同的,且在后面算例中通过计算也表明两种方法计算的结果基本相同。

2.3 方案的排序

将矩阵 $W^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AW$ 最大特征值对应的特征向量方法计算得到的 $\boldsymbol{\alpha}$ 值代入式(14),可得组合权向量 $\boldsymbol{w}$,再由式(17)可计算出每个方案与理想方案的综合贴近度 σ_i^{+} $(i\in M)$,按 σ_i^{+} 由大到小对各方案进行排序,其中最大者对应理想方案。

3 实例分析

考虑一个扩建工程招投标问题[11],有 4 个备选方案,7 项评价指标,即工期合理性(G_1)、施工工艺先进性(G_2)、安全与环保可靠性(G_3)、综合生产能力(G_4)、近 3 年的合同履行情况(G_5)、投标报价(G_6)和质量保证性(G_7)。其属性值见表 2,其中 G_6 为成本型指标,其余均为效益型指标,权重未知。

首先,利用式(4)、式(5)将决策矩阵规范化,列于表 3。

其次,假设对于上述 7 项指标,专家给出的模糊排序为

$$G_7>G_6>G_1>G_3>G_2>G_4>G_5$$

表 2 决策矩阵

Table 2 Decision matrix

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7
A_1	[7,9]	[4,6]	[7,9]	[5,7]	[6,8]	[7.8,7.8]	[6,8]
A_2	[6,8]	[7,9]	[8,10]	[7,9]	[7,9]	[7.2,7.2]	[8,10]
A_3	[5,7]	[6,8]	[6,8]	[8,10]	[5,7]	[7.5,7.5]	[7,9]
A_4	[7,9]	[6,8]	[6,8]	[7,9]	[7,9]	[7.5,7.5]	[6,8]

表 3 规范化决策矩阵

Table 3 Normalization of decision matrix

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7
A_1	[0.7778,1.0000]	[0.4444,0.6667]	[0.7,0.9]	[0.5,0.7]	[0.6667,0.8889]	[0.9231,0.9231]	[0.6,0.8]
A_2	[0.6667,0.8889]	[0.7778,1.0000]	[0.8,1.0]	[0.7,0.9]	[0.7778,1.0000]	[1.0000,1.0000]	[0.8,1.0]
A_3	[0.5556,0.7778]	[0.6667,0.8889]	[0.6,0.8]	[0.8,1.0]	[0.5556,0.7778]	[0.9600,0.9600]	[0.7,0.9]
A_4	[0.7778,1.0000]	[0.6667,0.8889]	[0.6,0.8]	[0.7,0.9]	[0.7778,1.0000]	[0.9600,0.9600]	[0.6,0.8]

相应的模糊语言分别为十分、明显、较为、稍稍、明显、略为。结合语气算子与定量标度表 1 由式(6)可得主观权值为

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{S}}=(0.1556,0.1222,0.1444,0.1556,0.1333,0.1778,0.1111)^{\mathrm{T}}$$

再次,根据规范化决策矩阵,由式(8)计算可得

$$\boldsymbol{w}^{-}=(0.1371,0.2877,0.1126,0.2067,0.1371,0.0062,0.1126)^{\mathrm{T}}$$

利用式(9)计算可得

$$\boldsymbol{w}^{+}=(0.1361,0.2713,0.1171,0.2117,0.1361,0.0106,0.1171)^{\mathrm{T}}$$

由式(11)可得 CERE 赋权法的客观权值为

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{E}}=(0.1360,0.2795,0.1149,0.2093,0.1367,0.0080,0.1149)^{\mathrm{T}}$$

从而得权值矩阵为

$$W=(\boldsymbol{w}^{\mathrm{S}},\boldsymbol{w}^{\mathrm{E}})=\begin{bmatrix}0.1556 & 0.1222 & 0.1444 & 0.1556 & 0.1333 & 0.1778 & 0.1111\\ 0.1360 & 0.2795 & 0.1149 & 0.2093 & 0.1367 & 0.0080 & 0.1149\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

最后,设规范化后的理想方案为

$$\tilde{r}_1^{+}=[1,1],\tilde{r}_2^{+}=[1,1],\tilde{r}_3^{+}=[1,1],\tilde{r}_4^{+}=[1,1],\tilde{r}_5^{+}=[1,1],$$

$\tilde{r}_6^+ = [1,1]$

取参数 $p=2$,由定义 3 可得贴近度矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0.8182 & 0.6068 & 0.7597 & 0.6317 & 0.7400 & 0.9019 & 0.6910\\0.7400 & 0.8182 & 0.8333 & 0.7597 & 0.8182 & 1.0000 & 0.8333\\0.6680 & 0.7400 & 0.6910 & 0.8333 & 0.6680 & 0.9465 & 0.7597\\0.8182 & 0.7400 & 0.6910 & 0.7597 & 0.8182 & 0.9465 & 0.6910\end{bmatrix}$$

再结合上面得到的权值矩阵 W,可计算矩阵 W^TA^TAW 的最大特征值为 $\lambda_{max}=4.6899$,其对应的单位化特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}=(0.7241,0.6897)^T$$

由此利用式(14)可得主、客观组合权向量为

$$\boldsymbol{w}=(0.2070,0.2813,0.1838,0.2570,0.1908,0.1343,0.1597)^T$$

如有需要可将其归一化,但是否将其归一化不影响排序的结果。归一化后有

$$\boldsymbol{w}=(0.1464,0.1989,0.1300,0.1818,0.1350,0.0950,0.1130)^T$$

再由式(17)计算得各方案的综合贴近度为

$$\sigma_1^+=0.7177,\sigma_2^+=0.8171,\sigma_3^+=0.7522,\sigma_4^+=0.7733$$

因此,各方案的排序为

$$A_2 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_1$$

从算例的综合贴近度来看,4 种方案的贴近度有较大差异,很容易将各方案按贴近度的大小进行排序,且与张尧等[11]排序结果完全相同,说明本文的方法是有效的。

4 结论

本文讨论了区间数的贴近度定义及其性质,结合权重完全未知且属性值为区间数的多属性决策问题提出了一种基于区间数贴近度的决策方法, 并给出了 3 种确定权重的方法,最后运用本文方法建立了多属性决策模型,为解决不确定型多属性决策问题的提供了一个新的有效途径。

参考文献(References)

[1] Noel B, Ayodele M. An action learning evaluation procedure for multiple criteria decision making problems [J]. *European Journal of Operational Research*, 1997, 96(2): 379-386.

[2] 张全, 樊治平, 潘德惠. 不确定性多属性决策中区间数的一种排序方法[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(5): 129-133.
Zhang Quan, Fan Zhiping, Pan Dehui. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 1999, 19(5): 129-133.

[3] 徐泽水, 达庆利. 区间数排序的可能度法及其应用 [J]. 系统工程学报, 2003, 18(1): 67-70.
Xu Zeshui, Da Qingli. *Journal of Systems Engineering*, 2003, 18(1): 67-70.

[4] Yoon K. The propagation of errors in multiple-attribute decision analysis: A practical approach [J]. *Journal of the Operational Research Society*, 1989, 40(7): 681-686.

[5] 叶跃祥, 糜仲春, 王宏宇, 等. 一种基于集对分析的区间数多属性决策方法[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(9): 1344-1347.
Ye Yuexiang, Mi Zhongchun, Wang Hongyu, *et al*. *Systems Engineering and Electronics*, 2006, 28(9): 1344-1347.

[6] 尤天慧, 樊治平. 区间数多指标决策的一种 TOPSIS 方法[J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2002, 23(9): 840-843.
You Tianhui, Fan Zhiping. *Journal of Northeastern University: Natural Science Edition*, 2002, 23(9): 840-843.

[7] 刘进生, 王绪柱, 张宝玉. 区间数排序 [J]. 工程数学学报, 2001, 18(4): 103-109.
Liu Jinsheng, Wang Xuzhu, Zhang Baoyu. *Journal of Engineering Mathematics*, 2001, 18(4): 103-109.

[8] 胡宝清. 模糊理论基础[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2004.
Hu Baoqing. Fuzzy theory [M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2004.

[9] 徐泽水. 求解不确定型多属性决策问题的一种新方法[J]. 系统工程学报, 2002, 17(2): 177-181.
Xu Zeshui. *Journal of Systems Engineering*, 2002, 17(2): 177-181.

[10] 徐泽水, 孙在东. 一类不确定型多属性决策问题的排序方法[J]. 管理科学学报, 2002, 5(3): 35-39.
Xu Zeshui, Sun Zaidong. *Journal of Management Sciences in China*, 2002, 5(3): 35-39.

[11] 张尧, 樊治平. 部分指标权重信息下的区间数多指标决策方法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2008, 40(10): 1672-1676.
Zhang Yao, Fan Zhiping. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2008, 40(10): 1672-1676.

[12] 曾文艺, 李洪兴. 模糊度与贴近度的关系研究[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(6): 76-79.
Zeng Wenyi, Li Hongxing. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 1999, 19(6): 76-79.

[13] 罗承忠. 模糊集引论: 上册[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2005.
Luo Chengzhong. The introduction of fuzzy set: Part I [M]. Beijing: Beijing Normal University Press, 2005.

[14] 陈守煜. 工程模糊集理论与应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1998.
Chen Shouyi. Engineering fuzzy set theory and application [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1998.

[15] Hwang C L, Yoon K. Multiple attribute decision making: Methods and applications[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1981.

[16] 张文泉, 张世英, 江立勤. 基于熵的决策评价模型及应用 [J]. 系统工程学报, 1995, 10(3): 69-74.
Zhang Wenquan, Zhang Shiying, Jiang Liqin. *Journal of Systems Engineering*, 1995, 10(3): 69-74.

[17] 雷功炎. 关于将相对熵用于层次分析的简单注记 [J]. 系统工程理论与实践, 1995(3): 65-68.
Lei Gongyan. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 1995(3): 65-68.

[18] 王应明, 傅国伟. 确定有限方案多目标决策权系数的新方法[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 1993, 36(6): 97-102.
Wang Yingming, Fu Guowei. *Journal of TsingHua University: Science and Technology Edition*, 1993, 36(6): 97-102.

(责任编辑 代而)