6–连通图最长圈上的可收缩边

卢建立,张志芳

河南师范大学数学与信息科学学院,河南新乡 453007

摘要 图的可收缩边与可去边是研究连通图的构造和使用归纳法证明连通图一些性质的有力工具。设 G 是一个 6–连通图,$e\in E(G)$,若收缩 e 后得到的图仍是 6–连通的,则称 e 是 G 的可收缩边。采用树型结构理论进行分类讨论,得到如下结论:① 如果 $P:x=x_1x_2\cdots x_n=y$ 是 6–连通图 G 的一条最长 (x,y)–路,x_ix_{i+1} 是一条不可收缩边,且 $S=\{x_i,x_{i+1},u_1,u_2,u_3,u_4\}$ 是其对应的 6–点割,则 $G-S$ 的每一个断片至少包含 P 上的一个点;② 设 $P:x=x_1x_2\cdots x_n=y$ 是 6–连通图 G 的一条最长 (x,y)–路,且 G 的任意断片的阶都大于 2。如果 P 上任意顶点 x_i 都满足条件 $d(x_i)\geqslant 7$ 或者若 $d(x_i)=6$ 则 $[V(P)]$ 中无 3–圈包含它,那么 P 上至少包含一条可收缩边。在上述结论的基础上,进一步研究了任意断片阶都大于 2 的 6–连通图中最长圈上的可收缩边的分布情况,得到如下新结果:任意断片阶都大于 2 的 6–连通图最长圈上至少有两条可收缩边。

关键词 连通度;可收缩边;断片;端片

中图分类号 O157.5 **文献标识码** A **文章编号** 1000–7857(2010)21–0075–03

Contractible Edges of the Longest Cycle in Some 6–Connected Graphs

LU Jianli, ZHANG Zhifang

College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, Henan Province, China

Abstract Contractible edges and removable edges in connected graphs are a powerful tool to study the structures of connected graphs and to prove some properties of connected graphs by induction. Let G be a 6–connected graph, an edge of G is called a 6–contractible edge if its contraction remains a 6–connected graph. In this paper, we adopt the method of a tree structure theory and obtain the following results: (1) Let $P:x=x_1x_2\cdots x_n=y$ is the longest road of G, x_ix_{i+1} is an uncontractible edge, and $S=\{x_i, x_{i+1}, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ is the corresponding 6–vertex cut, then there is at least one vertex of P in every fragment of $G-S$. (2) Let $P:x=x_1x_2\cdots x_n=y$ is the longest road of G, and any fragment´s order is bigger than 2. If any vertex in P satisfies the condition (a) $d(x_i)\geqslant 7$ or (b) if $d(x_i)=6$, there is no 3–circle which contains the vertex, there is at least one contractible edge in P. Based on the above results, we consider an arbitrary fragment whose order is greater than 2, and the contractible edge´s distribution in the longest cycle of 6–connected graphs and obtains the following result: if arbitrary fragment´s order is greater than 2, then there are at least two contractible edges in the longest circle of 6–connected graphs.

Keywords connected graphs; contractible edges; cut–fragment; end–fragment

0 引言

如果将 K 连通图中的一条边收缩后所得到的图仍是 K 连通图,则称这条边为 G 的 K–可收缩边。收缩边运算和可去边运算不仅是连通图构造的有力工具,而且 K 连通图的 K–可收缩边的存在对图的某些性质进行归纳证明时也有着重要的作用。人们对 K 连通图中的 K–可收缩边分布情况进行了大量的研究[1–2]。

2003 年,吴吉昌等给出某些 4–连通图中圈上的可收缩边和可去边的分布情况[3];2004 年,徐丽琼给出 4–连通图上存在至少两条可去边的充分条件[4];2008 年,杨朝霞给出某些 5–连通图的某些最长圈上可收缩边的分布情况[5]。本文分析 6–连通图任一最长圈上的可收缩边的分布情况。

定理 设 G 是 6–连通图,且 G 的任意断片的阶都大于 2,$C=x_1x_2\cdots x_nx_1$ 是 G 的任意最长圈,若 C 上的任意顶点 x_i 都满

收稿日期:2009–11–27;修回日期:2010–09–25

基金项目:河南省杰出青年计划项目(084100510013)

作者简介:卢建立,副教授,研究方向为图论及其应用、离散数学等,电子信箱:lujianli@henannu.edu.cn

足以下条件之一,则 C 上至少包含两条可收缩边。

1) $d(x_i)\geqslant 7$;

2) 若 $d(x_i)=6$,则 $V(C)$ 中无 3–圈包含它。

1 相关概念

本文考虑的都是无向的有限简单图,所采用的符号和术语均与文献[1]一致。

G 是 6–连通的非完全图,$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示 G 的顶点集和边集。若 $x\in V(G)$,$d(x;G)$ 表示 x 在 G 中的度,在不引起混淆的情况下,用 $d(x)$ 代替 $d(x;G)$。下面先给出 6–连通图中可去边,可收缩边及某些相关的定义。

设 e 是 6–连通图 G 的一条边,$G\Theta e$ 表示图 G 做下列运算所得的图:

1) 从 G 中去掉 e 得图 $G-e$;

2) 如果 e 的某个端点在 $G-e$ 中度数为 5,则去掉此端点,再两两联结此端点在 $G-e$ 中的 5 个邻点;

3) 如果经过 2)中的运算后,有重边出现,则用单边代替它们,使得此图为简单图。

若 $G\Theta e$ 仍为 6–连通图,则称 e 为 G 的可去边,否则称 e 为 G 的不可去边。G 的所有可去边的集合记为 $E_R(G)$,G 的所有不可去边的集合记为 $E_N(G)$。对于 $e\in E(G)$,若收缩 e 后得到的图仍是 6–连通的,则称 e 是 G 的可收缩边,简称可收缩边,反之则称 e 为不可收缩边。易见,$e=xy$ 是 G 的不可收缩边当且仅当 G 有包含$\{x,y\}$的 6–点割 T。G 的所有可收缩边记作 $E_c(G)$。

设 $A,B\subseteq V(G)$,$A\cap B=\phi$,$A\neq\phi\neq B$,记$\langle A,B\rangle=\{xy|xy\in E(G);x\in A,y\in B\}$。用 N 表示 $V(G)$ 的非空子集,则 N 在 G 中的导出子图用$[N]$表示。G 中两点 x 与 y 之间的路记为 (x,y)–路。

若 $e=xy\in E(G)$,且 $xy\notin E_c(G)$,则易知 G 中存在包含 x 和 y 的 6–点割 T,称 $G-T$ 的各个连通分支为断片。设 $E_0\subset E(G)-E_c(G)$,$xy\in E_0$,T 是包含 x 和 y 的 6–点割,则称 T 为 E_0–点割,称 $G-T$ 的各个连通分支为 E_0–断片;如果 E_0–断片不包含其他的 E_0–断片作为其真子集,则称它为 E_0–端片。

2 主要结果及其证明

引理 1 设 P:$x=x_1x_2\cdots x_n=y$ 是 6–连通图 G 的一条最长 (x,y)–路,若 x_ix_{i+1} 是一条不可收缩边,且 $S=\{x_i,x_{i+1},u_1,u_2,u_3,u_4\}$是其对应的 6–点割,则 $G-S$ 的每一个断片至少包含 P 上的一个点。

证明 (反证法)假设 A 是 $G-S$ 的任意一个断片,且 A 不包含 P 上的点。既然$\langle\{x_i\},A\rangle\neq\phi$,$\langle\{x_{i+1}\},A\rangle\neq\phi$,从而存在 $x_iv_1\in\langle\{x_i\},A\rangle$,$x_{i+1}v_2\in\langle\{x_{i+1}\},A\rangle$。因为 A 是 $G-S$ 的断片,所以存在 A 中的一条 (v_1,v_2)–路:P_1:$v_1=y_1y_2\cdots y_t=v_2$(包含 $v_1=v_2$ 的情形),令 $P_2=(P-x_ix_{i+1})\cup x_iv_1\cup P_1\cup x_{i+1}v_2$,则 P_2 是 G 中比 P 更长的 (x,y)–路,矛盾。故 $G-S$ 的每一个断片至少包含 P 上的一个点。

引理 2 设 P:$x=x_1x_2\cdots x_n=y$ 是 6–连通图 G 的一条最长 (x,y)–路,且 G 的任意断片的阶都大于 2。若 P 上任意顶点 x_i 都满足以下条件之一,则 P 上至少包含一条可收缩边。

1) $d(x_i)\geqslant 7$;

2) 若 $d(x_i)=6$,则$[V(P)]$中无 3–圈包含它。

证明(反证法) 假设 P 上的边都是不可收缩边。设 $E_0=E(P)$,则对于每一条边 x_ix_{i+1},都有相应的 E_0–点割 $S=\{x_i,x_{i+1},u_1,u_2,u_3,u_4\}$ 包含它,且对于 $G-S$ 的每一个连通分支都是 E_0–断片。设 A 是 $G-S$ 的一个 E_0–断片,易知每一个 E_0–断片都包含一个 E_0–端片作为它的子集,不失一般性,设 A 是一个 E_0–端片,而 $B=G-A-S$ 是其他的 E_0–断片之和。由引理 1 知,$E(P)\cap\langle A,S\rangle\neq\phi$,其中 $u\in S$,$v_1\in A$,显然 $uv_1\in E_0$ 是不可收缩边,设其对应的 E_0–E_0–点割为 $T=\{u,v_1,w,s,t,f\}$,易知 $u\in S\cap T$,$v_1\in A\cap T$。令 $G-T=C\cup D$,其中 $C\cap D=\phi$,$C\neq\phi\neq D$,注意 C 和 D 都不一定是连通图。如图 1 所示。

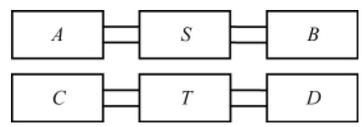

图 1 割集与断片分割示意图

Fig. 1 Partition diagram of cut sets and fragment

令

$$X_1=(C\cap S)\cup(S\cap T)\cup(A\cap T)$$

$$X_2=(D\cap S)\cup(S\cap T)\cup(A\cap T)$$

$$X_3=(D\cap S)\cup(S\cap T)\cup(B\cap T)$$

$$X_4=(C\cap S)\cup(S\cap T)\cup(B\cap T)$$

以下分情形讨论

2.1 $A\cap C\neq\phi$

此时,X_1 是 G 的一个点割,因为 G 是 6–连通图,所以$|X_1|\geqslant 6$。若$|X_1|=6$,因为 $uv_1\in E_0\cap E([X_1])$,所以 X_1 是 G 的一个 E_0–点割,则 $A\cap C$ 是 $G-X_1$ 的 E_0–断片(或 E_0–断片之和),与 A 是 G 的 E_0–断片相矛盾。故$|X_1|\geqslant 7$。注意到$|X_1|+|X_3|=|S|+|T|=6+6=12$。故$|X_3|\leqslant 5$。由 G 是 6–连通图知 $B\cap D=\phi$。我们说,$S\cap D\neq\phi$,否则有 $D=D\cap A$,则 D 是包含在 A 中的 E_0–断片,矛盾。故 $S\cap D\neq\phi$。此时又分以下两种情况。

情况 1 $B\cap T\neq\phi$。

由$|X_3|=|D\cap S|+|S\cap T|+|B\cap T|\leqslant 5$,$S\cap D\neq\phi$ 及 $u\in S\cap T$ 知$|B\cap T|\leqslant 3$。

1) $|B\cap T|=3$。因为$|X_3|=|D\cap S|+|S\cap T|+|B\cap T|\leqslant 5$,$S\cap D\neq\phi$,此时有$|S\cap T|=1$,这时$|A\cap T|=|T|-|B\cap T|-|S\cap T|=6-3-1=2$;又由于$|X_1|\geqslant 7$ 得$|S\cap C|\geqslant 4$。又$|S\cap C|+|S\cap D|=5$,故有$|S\cap C|=4$,$|S\cap D|=1$。这时$|X_2|=4$,$|X_3|=5$。因为 G 是 6–连通的,所以 $A\cap D=\phi$,$B\cap D=\phi$,$|D|=|S\cap D|=1<2$,这与 G 的所有断片的阶都大于 2 矛盾。

2) $|B\cap T|=2$。因为$|X_3|\leqslant 5$,此时$|S\cap T|=2$ 或 1。

① $|S\cap T|=2$ 时,$|A\cap T|=2$,因为$|X_3|\leqslant 5$,所以$|S\cap D|=1$,此时$|X_2|=|X_3|=5$,所以 $A\cap D=\phi$,$B\cap D=\phi$,$|D|=|S\cap D|=1<2$,矛盾。

② $|S\cap T|=1$ 时,$|A\cap T|=3$。由于$|X_1|\geqslant 7$ 得$|S\cap C|\geqslant 3$,又$|S\cap C|+|S\cap D|=5$,故有$|S\cap C|=3$,$|S\cap D|=2$ 或$|S\cap C|=4$,$|S\cap D|=1$。

(i) $|S\cap C|=3$,$|S\cap D|=2$ 时,$|X_2|=6$,$|X_3|=5$,此时 $A\cap D=\phi$,$B\cap D=\phi$。这是因为若 $A\cap D\neq\phi$,注意到 $uv_1\in E_0\cap E([X_2])$,因而 X_2 是 G 的 E_0-点割,从而 $A\cap D$ 是 $G-X_2$ 的 E_0-断片(或 E_0-断片之和),与 A 是 G 的 E_0-断片相矛盾。故 $A\cap D=\phi$;若 $B\cap D\neq\phi$,因为 G 是 6-连通的,所以$|X_3|\geqslant 6$ 矛盾。这时$|D|=|S\cap D|=2$,矛盾。

(ii) $|S\cap C|=4$,$|S\cap D|=1$ 时,$|X_2|=5$,$|X_3|=4$,类似前面所证可得矛盾。

3) $|B\cap T|=1$ 时,$|S\cap T|=1$ 或 2 或 3。

① $|S\cap T|=3$ 时,$|A\cap T|=2$。因为$|X_3|\leqslant 5$,故有$|S\cap D|=1$,从而$|S\cap C|=2$,此时$|X_2|=6$,则由(i)的讨论知 $A\cap D=\phi$。此时$|D|=|S\cap D|=1<2$,矛盾。

② $|S\cap T|=2$ 时,$|A\cap T|=3$,且因为$|X_3|\leqslant 5$,故有$|S\cap D|=1$ 或 2。

(i) $|S\cap D|=1$ 时,$|S\cap C|=3$。此时$|X_2|=6$,则由①的讨论可知矛盾。

(ii) $|S\cap D|=2$ 时,由于$|X_1|\geqslant 7$ 得$|S\cap C|\geqslant 2$。因为$|S|=6$,所以$|S\cap C|=2$,$|X_3|=|X_4|=5$,又 G 是 6-连通的,故 $B\cap C=\phi$,$B\cap D=\phi$,$|B|=|B\cap T|=1<2$,矛盾。

③ $|S\cap T|=1$ 时,$|A\cap T|=4$,由于$|X_1|\geqslant 7$,得$|S\cap C|\geqslant 2$。因为$|S\cap D|+|S\cap C|=5$,故类似前面的讨论可得矛盾。

情况 2 $B\cap T=\phi$。

此时 $B\cap C=B\neq\phi$,故 X_4 是 G 的点割,$|X_4|=|S\cap(C\cup T)|\geqslant 6$,所以 $S\cap D=\phi$,而 $S\cap D\neq\phi$,矛盾。所以 $A\cap C=\phi$,同理,$A\cap D=\phi$。

2.2 $A\cap C=\phi$

由 2.1 节的证明可知,此时 $A\cap D=\phi$,故 $A\cap T=A\neq\phi$。若$|A\cap T|=1$,设 $A\cap T=\{v_1\}$,显然 $x_i\,x_{i+1}v_1x_i$ 是 G 中的 3-圈,且 $d(v_1)=6$,由 P 是 G 中的最长(x,y)-路,显然 $v_1\in V(P)$,与条件 2)矛盾。故$|A\cap T|\geqslant 2$。因为 $S\cap T\neq\phi$,所以$|B\cap T|\leqslant 3$。

1) $|B\cap T|=3$ 时,$|S\cap T|=1$,这时$|A|=|A\cap T|=2$,与 G 的任意断片的阶都大于 2 的前提矛盾。

2) $|B\cap T|=2$ 时,$|S\cap T|=1$ 或 2。

① $|S\cap T|=1$ 时,$|A\cap T|=3$。因为$|S\cap D|+|S\cap C|=5$,$|X_1|\geqslant 7$,得$|S\cap C|\geqslant 3$。这时又分情况:$|S\cap C|=3$,$|S\cap D|=2$ 或$|S\cap C|=4$,$|S\cap D|=1$,类似前面的讨论可得矛盾。

② $|S\cap T|=2$ 时,$|A\cap T|=2$,讨论同上。

3) $|B\cap T|=1$ 时,$|S\cap T|=1$ 或 2 或 3。类似前面的讨论可得矛盾。

4) $|B\cap T|=0$ 时,$u\in S\cap T$,$|S\cap T|\geqslant 1$,由 $S\cap C$ 与 $S\cap D$ 的对称性可知,总有$|X_3|\leqslant 5$,$|X_4|\leqslant 5$ 成立,故 $B\cap C=\phi$,$B\cap D=\phi$,于是$|B|=|B\cap T|+|B\cap C|+|B\cap D|=0$,矛盾。

由以上讨论可知引理 2 成立。

定理 设 G 是 6-连通图,且 G 的任意断片的阶都大于 2,$C=x_1x_2\ldots x_nx_1$ 是 G 的任意最长圈,若 C 上的任意顶点 x_i 都满足以下条件之一,则 C 上至少包含两条可收缩边。

1) $d(x_i)\geqslant 7$;

2) 若 $d(x_i)=6$,则$[V(C)]$中无 3-圈包含它。

证明 设 $x'x''$是 C 上的一条边,显然 $P=C-x'x''$是 G 中的一条最长(x',x'')-路,由引理 2 可知,P 上至少包含一条可收缩边,记为 uv,则 $P'=C-uv$ 是 G 中的一条最长(u,v)-路,由引理 2 可知,P'上至少包含一条可收缩边,记为 xy,因而 $uv\neq xy$ 是 C 上的两条可收缩边。证毕。

3 结论

图的可收缩边与可去边是研究连通图的构造和性质的有力工具。本文考虑任意断片阶都大于 2 的 6-连通图中最长圈上的可收缩边的分布情况,得到结果:任意断片阶都大于 2 的 6-连通图最长圈上至少有两条可收缩边。

参考文献(References)

[1] Bondyj A ,Murtyu S R. Graph theory with applications [M]. London: The Macmillan Press Ltd, 1976.

[2] Yin J H. Removable edges in 4-connected graphs and the structures of 4-connected graphs [J]. *J Systems Sci Math Sci*, 1999, 19(4): 434-438.

[3] 吴吉昌. 4-连通图中圈上的可去边和可收缩边 [J]. 厦门大学学报: 自然科学版, 2003, 42(5): 555-558.
Wu Jichang. *Journal of Xiamen University: Natural Science Edition*, 2003, 5: 555-558.

[4] 徐丽琼. 连通图的可去边及连通图的构造[D]. 厦门: 厦门大学, 2005.
Xu Liqiong. Removable edges in connected graphs and the construction of connected graphs[D]. Xiamen: Xiamen University, 2005.

[5] 杨朝霞. 某些 5-连通图最长圈上的可收缩边 [J]. 山东大学学报: 理学版. 2008, 43(6): 12-14.
Yang Zhaoxia. *Journal of Shandong University: Natural Science Edition*, 2008, 43(6): 12-14.

(责任编辑 杨书春)

本期推理小游戏答案

4 对订婚的,2 对结婚的。
单独参加舞会的男士 2 人独身,2 人已婚。
单独参加舞会的女士有 3 人。
女士中人数最多的是订婚的。
所以,孙女士属于订婚的。