几类图的均匀邻点可区别全染色

严谦泰

安阳师范学院数学与统计学院,河南安阳 455002

摘要 邻点可区别全染色是在正常全染色的定义下,使得任两相邻顶点的色集不同。设 $G(V,E)$ 为一个简单图,f 为 G 的一个 k–邻点可区别全染色,若 f 满足 $||V_i\cup E_i|-|V_j\cup E_j||\leqslant 1(i\neq j)$,其中,$V_i\cup E_i=\{v|f(v)=i\}\cup\{e|f(e)=i\}$,记 $C(i)=V_i\cup E_i$,则称 f 为 G 的 k–均匀邻点可区别全染色,简记为 k–$EAVDTC$,并称 $\chi_{eat}(G)=\min\{k|G$ 存在 k–均匀邻点可区别全染色$\}$ 为 G 的均匀邻点可区别全染色数。本文给出了路、圈、风车图 K_3^t、图 $D_{m,4}$ 和齿轮图 $\widetilde{W}_n$ 的均匀邻点可区别全染色,以及它们的均匀邻点可区别全色数的确切值。

关键词 邻点可区别全染色;邻点可区别全色数;均匀邻点可区别全染色;均匀邻点可区别全色数

中图分类号 O157.5 **文献标识码** A **文章编号** 1000–7857(2010)21–0078–04

On the Equitable Adjacent–Vertex–Distinguishing Total Coloring of Graphs of Some Classes

YAN Qiantai

School of Mathematics and Statistics, Anyang Normal University, Anyang 455002, Henan Province, China

Abstract With the definition of proper total coloring of a graph, an Adjacent Vertex–Distinguishing Total Coloring (AVDTC) means that none of the two adjacent vertices are incident with the same set of colors. The concept of the AVDTC is proposed by Zhongfu Zhang (2004), and the AVDTC of graphs such as path, cycle, complete graph, complete bipartite graph, star and tree are discussed in Zhang´s paper. The AVDTC of $P_m\times P_n$, $P_m\times C_n$, $C_n\times C_n$ are also given where P_m, C_n are a denoted path with order m and a circle with order n, respectively; the AVDTC of Mycielski graph of some graphs such as path, circle and so on are given in another Zhang´s paper (2000). For the adjacent vertex–distinguishing total chromatic number, a conjecture is given in Zhang´s paper (2004). Let $G(V, E)$ be a simple connected graph of order n $(n\geqslant 2)$, k be a natural number and f be a k–adjacent vertex–distinguishing total coloring of graph G. If f satisfies the condition $||V_i\cup E_i|-|V_j\cup E_j||\leqslant 1$ $(i\neq j)$, where $V_i\cup E_i=\{v|f(\text{‘}v)=i\}\cup\{e|f(e)=i\}$, $C(i)=V_i\cup E_i$, then f is called an equitable adjacent vertex–distinguishing total coloring of graph $G(k$–$EAVDTC)$ and $\chi_{eat}(G)=\min\{k \mid G$ has k–$EAVDTC\}$ is called the chromatic number of the equitable adjacent–distinguishing total coloring of graph G. This paper gives the equitable adjacent vertex distinguishing total coloring chromatic number of path P_n and cycle C_n and graph K_3^t andgraph $D_{m,4}$ and gear wheel $\widetilde{W}_n$.

Keywords adjacent vertex distinguishing total coloring; adjacent vertex distinguishing total coloring chromatic; quitable adjacent vertex distinguishing total coloring; equitable adjacent vertex distinguishing total coloring chromatic

0 引言

随着图的染色问题在现实中被广泛应用,逐渐成为研究的重要领域之一。在文献[1]~[2]中,起源于网络问题的点可区别边染色和邻点可区别边染色问题得到进一步研究。新的染色问题不断被提出[3–9],文献[3]给出了邻点可区别全染色的定义及其几类简单图关于此染色的色数,并提出了相关猜想。

本文给出了路、圈、风车图 K_3^t、图 $D_{m,4}$ 和齿轮图 $\widetilde{W}_n$ 的均匀邻点可区别全染色,给出了它们的均匀邻点可区别全色数的确切值。文中所讨论的图均为简单、有限、无向图,$V(G)$,$E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集,$\Delta(G)$ 表示图 G 中顶点的

收稿日期:2009–10–29;**修回日期**:2010–10–09

基金项目:河南省自然科学基金项目(0511013800)

作者简介:严谦泰,教授,研究方向为图论及其应用,电子信箱:yqt@aynu.edu.cn

最大度。

定义 1 设 $G(V,E)$ 是阶至少为 2 的连通图，k 是正整数，f 是 $V(G)\cup E(G)$ 到 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的映射，对任意 $u\in V(G)$，记 $C(u)=\{f(u)|u\in V(G)\}\cup\{f(uv)|uv\in E(G),v\in V(G)\}$。如果

i) 对任意 $uv,uw\in E(G),u\neq wu\neq w$，有 $f(uv)\neq f(uw)$。

ii) 对任意 $uv\in E(G)$，有 $f(u)\neq f(v),f(u)\neq f(uv),f(v)\neq f(uv)$，则 f 称为 G 的 k–正常全染色。进一步，如果 f 还满足：

iii) 对于任意 $uv\in E(G)$，有 $C(u)\neq C(v)$，则称 f 为 G 的 k–邻点可区别全染色(记为 k–$AVDTC$)。称 $\min\{k|G$ 有 k–邻点可区别全染色$\}$ 为 G 的邻点可区别全色数，记作 $\chi_{at}(G)$。

定义 2 设 $G(V,E)$ 是一个简单图，f 是 G 的一个 k–邻点可区别全染色，若 f 满足 $||V_i\cup E_i|-|V_j\cup E_j||\leq 1\ (i\neq j)$，其中，$V_i\cup E_i=\{v|f(v)=i\}\cup\{e|f(e)=i\}$，记 $C(i)=V_i\cup E_i$，则称 f 为 G 的 k–均匀邻点可区别全染色，记为 k–$EAVDTC$。并称 $\chi_{eat}(G)=\min\{k|G$ 存在 k–均匀邻点可区别全染色$\}$ 为 G 的均匀邻点可区别全染色数。

引理 1 若 G 有两个相邻的最大度顶点，则

$$\chi_{at}(G)\geqslant\Delta(G)+2$$

引理 2 若图 G 具有 k 个连通分支，$G_1,G_2,\cdots,G_k$，且 $|V(G_i)|\geqslant 2\ (i=1,2,\cdots,k)$，则

$$\chi_{at}(G)=\max\{\chi_{at}(G_1),\chi_{at}(G_2),\cdots,\chi_{at}(G_k)\}$$

基于引理 2，只讨论阶不小于 2 的连通图。本文研究了路、圈、风车图 K_3^t、图 $D_{m,4}$ 和齿轮图 $\widetilde{W}_n$ 的均匀邻点可区别全染色，给出了它们的均匀邻点可区别全色数的确切值。文中未加说明的术语、记号参见文献[4]。

1 主要结论和证明

定理 1 设 P_n 表示 n 阶路，$n\geqslant 2$，则

$$\chi_{at}(P_n)=\begin{cases}3 & n=2,3\\ 4 & n\geqslant 4\end{cases}$$

证明 设 $P_n=v_1,v_2,\cdots,v_n$。

当 $n=2,3$ 时，显然有 $\chi_{at}(P_n)\geqslant 3$。下证 $\chi_{at}(P_n)\leqslant 3$。为此，仅需证明 P_2 和 P_3 均存在 3–$AVDTC$。

在 P_2 中，令 $v_1=1,v_2=3;v_1v_2=2$。在 P_3 中，令 $v_1=1,v_2=3,v_3=2;v_1v_2=2,v_2v_3=1$。因此，$\chi_{at}(P_2)=\chi_{at}(P_3)=3$。显然，这也是 P_2,P_3 的 3–$EAVDTC$。

当 $n\geqslant 4$ 时，由引理 1 可知，$\chi_{at}(P_n)\geqslant 4$，下证 $\chi_{at}(P_n)\leqslant 4$，为此仅需证明 P_n 存在 4–$AVDTC$ 即可。定义一个从 $V(P_n)\cup E(P_n)$ 到 $\{1,2,3,4\}$ 的映射 f：

$f(v_iv_{i+1})\in\{1,2,3,4\}$，且 $f(v_iv_{i+1})\equiv i\pmod 4\ (i=1,2,\cdots,n-1)$；

$f(v_j)\in\{1,2,3,4\}$，且 $f(v_j)\equiv j+1\pmod 4\ (j=1,2,\cdots,n)$。

显然，f 是 P_n 的 4–全染色。另外，有

当 $2\leqslant j\leqslant n-1,j\equiv 2\pmod 4$ 时，$C(v_j)=\{1,2,3\}$；

当 $2\leqslant j\leqslant n-1,j\equiv 3\pmod 4$ 时，$C(v_j)=\{2,3,4\}$；

当 $2\leqslant j\leqslant n-1,j\equiv 0\pmod 4$ 时，$C(v_j)=\{3,4,1\}$；

当 $2\leqslant j\leqslant n-1,j\equiv 1\pmod 4$ 时，$C(v_j)=\{4,1,2\}$。

而 $C(v_1)$ 和 $C(v_n)$ 都是二元集，这样对任意 $i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，有 $C(v_i)\neq C(v_{i+1})$。故 f 是 P_n 的 4–$AVDTC$。因此，$\chi_{at}(P_n)=4$。显然，这也是 P_n 的 4–$EAVDTC$。

定理 2 设 C_n 表示 n 阶圈，$n\geqslant 4$，则

$$\chi_{eat}(C_n)=4$$

证明 设 $C_n=v_1v_2\cdots v_nv_1$。

由引理 1 知，$\chi_{at}(C_n)\geqslant 4$，下证 $\chi_{at}(C_n)\leqslant 4$，为此仅需证明 C_n 存在 4–$AVDTC$ 即可。考虑以下 4 种情形。

情形 1 $n\equiv 0\pmod 4$。

定义一个从 $V(C_n)\cup E(C_n)$ 到 $\{1,2,3,4\}$ 的映射 f：

$f(v_iv_{i+1})\in\{1,2,3,4\}$，且 $f(v_iv_{i+1})\equiv i\pmod 4,i=1,2,\cdots,n$；

$f(v_j)\in\{1,2,3,4\}$，且 $f(v_j)\equiv j+1\pmod 4,j=1,2,\cdots,n$。

显然，f 是 C_n 的 4–全染色。另外，对 $1\leqslant j\leqslant n$，有

当 $j\equiv 1\pmod 4$ 时，$C(v_j)=\{4,1,2\}$；

当 $j\equiv 2\pmod 4$ 时，$C(v_j)=\{1,2,3\}$；

当 $j\equiv 3\pmod 4$ 时，$C(v_j)=\{2,3,4\}$；

当 $j\equiv 0\pmod 4$ 时，$C(v_j)=\{3,4,1\}$。

故 f 是 C_n 的 4–$AVDTC$。显然，这也是 C_n 的 4–$EAVDTC$。

情形 2 $n\equiv 1\pmod 4$。

定义一个从 $V(C_n)\cup E(C_n)$ 到 $\{1,2,3,4\}$ 的映射 f：

$f(v_iv_{i+1})\in\{1,2,3,4\}$，且 $f(v_iv_{i+1})\equiv i\pmod 4,i=1,2,\cdots,n-5$；

$f(v_j)\in\{1,2,3,4\}$，且 $f(v_j)\equiv j+1\pmod 4,\ j=1,2,\cdots,n-5$；

$f(v_{n-4}v_{n-3})=1,f(v_{n-3}v_{n-2})=2,f(v_{n-2}v_{n-1})=4,f(v_{n-1}v_n)=3,f(v_nv_1)=4$；

$f(v_{n-4})=2,f(v_{n-3})=3,f(v_{n-2})=1,f(v_{n-1})=2,f(v_n)=1$。

显然，f 是 C_n 的 4–全染色。另外，对 $1\leqslant j\leqslant n-5$，有

当 $j\equiv 1\pmod 4$ 时，$C(v_j)=\{4,1,2\}$；

当 $j\equiv 2\pmod 4$ 时，$C(v_j)=\{1,2,3\}$；

当 $j\equiv 3\pmod 4$ 时，$C(v_j)=\{2,3,4\}$；

当 $j\equiv 0\pmod 4$ 时，$C(v_j)=\{3,4,1\}$。

而 $C(v_{n-4})=\{4,1,2\},C(v_{n-3})=\{1,2,3\},C(v_{n-2})=\{2,4,1\},C(v_{n-1})=\{4,3,2\},C(v_n)=\{3,4,1\}$，故 f 是 C_n 的 4–$AVDTC$。显然，这也是 C_n 的 4–$EAVDTC$。

情形 3 $n\equiv 2\pmod 4$。

定义一个从 $V(C_n)\cup E(C_n)$ 到 $\{1,2,3,4\}$ 的映射 f：

$f(v_iv_{i+1})\in\{1,2,3,4\}$，且 $f(v_iv_{i+1})\equiv i\pmod 4,i=1,2,\cdots,n-6$；

$f(v_j)\in\{1,2,3,4\}$，且 $f(v_j)\equiv j+1\pmod 4,j=1,2,\cdots,n-6$；

$f(v_{n-5}v_{n-4})=1,f(v_{n-4}v_{n-3})=2,f(v_{n-3}v_{n-2})=3,f(v_{n-2}v_{n-1})=4,f(v_{n-1}v_n)=3,f(v_nv_1)=4$；

$f(v_{n-5})=2,f(v_{n-4})=3,f(v_{n-3})=4,f(v_{n-2})=1,f(v_{n-1})=2,f(v_n)=1$。

显然，f 是 C_n 的 4–全染色。另外，对 $1\leqslant j\leqslant n-6$，有

当 $j\equiv 1\pmod 4$ 时，$C(v_j)=\{4,1,2\}$；

当 $j\equiv 2\pmod 4$ 时，$C(v_j)=\{1,2,3\}$；

当 $j\equiv 3\pmod 4$ 时，$C(v_j)=\{2,3,4\}$；

当 $j\equiv 0\pmod 4$ 时，$C(v_j)=\{3,4,1\}$。

而 $C(v_{n-5})=\{4,1,2\}$，$C(v_{n-4})=\{1,2,3\}$，$C(v_{n-3})=\{2,3,4\}$，$C(v_{n-2})=\{3,4,1\}$，$C(v_{n-1})=\{4,3,2\}$，$C(v_n)=\{3,4,1\}$，故 f 是 C_n 的 4–$AVDTC$。显然，这也是 C_n 的 4–$EAVDTC$。

情形 4 $n\equiv 3 \pmod 4$。

定义一个从 $V(C_n)\cup E(C_n)$ 到 $\{1,2,3,4\}$ 的映射 f：

$f(v_iv_{i+1})\in\{1,2,3,4\}$，且 $f(v_iv_{i+1})\equiv i \pmod 4$，$i=1,2,\cdots,n-7$；

$f(v_j)\in\{1,2,3,4\}$，且 $f(v_j)\equiv j+1 \pmod 4$，$j=1,2,\cdots,n-7$；

$f(v_{n-6}v_{n-5})=1$，$f(v_{n-5}v_{n-4})=2$，$f(v_{n-4}v_{n-3})=3$，$f(v_{n-3}v_{n-2})=1$，$f(v_{n-2}v_{n-1})=4$，$f(v_{n-1}v_n)=3$，$f(v_nv_1)=4$；

$f(v_{n-6})=2$，$f(v_{n-5})=3$，$f(v_{n-4})=4$，$f(v_{n-3})=2$，$f(v_{n-2})=3$，$f(v_{n-1})=2$，$f(v_n)=1$。

显然，f 是 C_n 的 4–全染色。类似于情形 2 和情形 3，可以验证 f 是 C_n 的 4–$AVDTC$。显然，这也是 C_n 的 4–$EAVDTC$。

综上所述，定理 2 得证。

定理 3 t 个 K_3 有一个公共顶点构成的图为风车图 K_3^t，则 $\chi_{eat}(K_3^t)=2t+1$。

证明 设公共点为 x_0，第 i 个 K_3 中其余两个顶点记为 x_1^i，$x_2^i(i=1,2,\cdots,t)$。$\Delta(K_3^t)=2t$，$\chi_{at}(K_3^t)\geqslant 2t+1$，下证 $\chi_{at}(K_3^t)=2t+1$。

定义一个从 $V(K_3^t)\cup E(K_3^t)$ 到 $\{1,2,\cdots,2t+1\}$ 的映射 f：

$f(x_0)=2t+1$；

$f(x_0x_1^i)=2i-1$，$f(x_0x_2^i)=2i$，$i=1,2,\cdots,t$；

$f(x_1^2)=1$，$f(x_2^2)=2$，$f(x_1^3)=3$，$f(x_2^3)=4$，$\cdots$，$f(x_1^t)=2t-3$，$f(x_2^t)=2t-2$，$f(x_1^1)=2t-1$，$f(x_2^1)=2t$；

$f(x_1^ix_2^i)=2t+1$，$i=1,2$；

$f(x_1^ix_2^i)=i$，$i=3,4,\cdots,t$。

显然，f 是 K_3^t 的一个 $2t+1$–全染色，且有

$C(x_0)=\{1,2,\cdots,2t+1\}$；

$C(x_1^1)=\{1,2t-1,2t+1\}$，$C(x_2^1)=\{2,2t,2t+1\}$；

$C(x_1^2)=\{1,3,2t+1\}$，$C(x_2^2)=\{2,4,2t+1\}$；

$C(x_1^i)=\{i-2,i,i+2\}$，$i=3,4,\cdots,t$；

$C(x_2^i)=\{i-2,i+1,i+3\}$，$i=3,4,\cdots,t$。

则 $C(x_1^i)\neq C(x_2^i)$，$i=1,2,\cdots,t$；故 f 是 K_3^t 的一个 $2t+1$–$AVDTC$。

进一步，有 $|C(i)|=2$ 或 3，$i=1,2,\cdots,2t,2t+1$。故 f 也是 K_3^t 的一个 $2t+1$–$EAVDTC$。即 $\chi_{eat}(K_3^t)=2t+1$。

定理 4 m 个 C_4 有一个公共顶点构成的图为风车图 $D_{m,4}$，则 $\chi_{eat}(D_{m,4})=2m+1$。

证明 设公共点为 x_0，第 i 个 C_4 中其余顶点记为 $x_1^i,x_2^i,x_3^i(i=1,2,\cdots,m)$，其中，$x_1^i,x_3^i(i=1,2,\cdots,m)$ 与 x_0 相邻。

$\Delta(D_{m,4})=2m+1$，$\chi_{at}(D_{m,4})\geqslant 2m+1$，下证 $\chi_{at}(D_{m,4})=2m+1$。

定义一个从 $V(D_{m,4})\cup E(D_{m,4})$ 到 $\{1,2,\cdots,2m+1\}$ 的映射 f：

$f(x_0)=2m+1$；

$f(x_0x_1^i)=2i-1$，$f(x_0x_3^i)=2i$，$i=1,2,\cdots,m$；即边 $x_0x_1^1,x_0x_3^1,x_0x_1^2,x_0x_3^2,\cdots,x_0x_1^m,x_0x_3^m$ 依次标 $1,2,\cdots,2m$。

$f(x_1^ix_2^i)=2i-3$，$f(x_3^ix_2^i)=2i-2$，$i=2,3,\cdots,m$；

$f(x_1^1x_2^1)=2m-1$，$f(x_3^1x_2^1)=2m$；即边 $x_1^2x_2^2,x_3^2x_2^2,x_1^3x_2^3,x_3^3x_1^3,\cdots,x_1^mx_2^m,x_2^mx_3^m$ 依次标 $1,2,\cdots,2m$。

$f(x_1^i)=2i-5$，$f(x_3^i)=2i-4$，$i=3,4,\cdots,m$；

$f(x_1^1)=2m-3$，$f(x_3^1)=2m-2$，$f(x_1^2)=2m-1$，$f(x_3^2)=2m$；即顶点 $x_1^3,x_3^3,x_1^4,x_3^4,\cdots,x_1^m,x_3^m,x_1^1,x_3^1,x_1^2,x_3^2$ 依次标 $1,2,\cdots,2m$。

$f(x_2^i)=2m+1$，$i=1,2,3$；

$f(x_2^i)=i-3$，$i=4,5,\cdots,m$。

即顶点 $x_2^1,x_2^2,x_2^3,x_2^4,x_2^5,\cdots,x_2^m$，依次标 $2m+1,2m+1,2m+1,1,2,\cdots,m-3$。

显然，f 是 $D_{m,4}$ 的一个 $2m+1$–全染色。且有

$C(x_0)=\{1,2,\cdots,2m+1\}$；

$C(x_1^1)=\{1,2m-3,2m-1\}$，$C(x_2^1)=\{2m-1,2m,2m+1\}$，$C(x_3^1)=\{2,2m-2,2m\}$；

$C(x_1^2)=\{1,3,2m-1\}$，$C(x_2^2)=\{1,2,2m+1\}$，$C(x_3^2)=\{2,4,2m\}$；

$C(x_1^3)=\{1,3,5\}$，$C(x_2^3)=\{3,4,2m+1\}$，$C(x_3^3)=\{2,4,6\}$；

$C(x_1^i)=\{2i-5,2i-3,2i-2\}$，$C(x_2^i)=\{i-3,2i-3,2i-2\}$，$C(x_3^i)=\{2i-2,2i,2i-4\}$；$i=4,5,\cdots,m$；

则 $C(x_1^i)\neq C(x_2^i)$，$C(x_3^i)\neq C(x_2^i)$，$i=1,2,\cdots,m$；故 f 是 $D_{m,4}$ 的一个 $2m+1$–$AVDTC$。

进一步，有 $|C(i)|=3$ 或 4，$i=1,2,\cdots,2m,2m+1$。故 f 也是 $D_{m,4}$ 的一个 $2m+1$–$EAVDTC$。即 $\chi_{eat}(D_{m,4})=2m+1$。

定理 5 在轮图 W_n 的轮圈 C_n 上每两个相邻点之间加入一个顶点后所得的图称为齿轮图，记为 $\widetilde{W}_n$，则 $\chi_{eat}(\widetilde{W}_n)=n+1$。

证明 设中心点为 x_0，与 x_0 相邻顶点依次为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$；与 x_0 不相邻顶点依次为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$。其中，y_i 与 x_i,x_{i+1} 相邻，y_n 与 x_1,x_n 相邻。

$\Delta(\widetilde{W}_n)=n$，$\chi_{at}(\widetilde{W}_n)\geqslant n+1$，下证 $\chi_{at}(\widetilde{W}_n)=n+1$。

定义一个从 $V(\widetilde{W}_n)\cup E(\widetilde{W}_n)$ 到 $\{1,2,\cdots,n+1\}$ 的映射 f：

$f(x_0)=n+1$；

$f(x_0x_i)=i$，$i=1,2,\cdots,n$；

即边 $x_0x_1,x_0x_2,\cdots,x_0x_n$ 依次标 $1,2,\cdots,n-1,n$。

$f(x_i)=i-1$，$i=2,3,\cdots,n$；

$f(x_1)=n$；

即顶点 $x_2,x_3,\cdots,x_n,x_1$ 依次标 $1,2,\cdots,n-1,n$。

$f(x_iy_i)=i+3$，$i=1,2,\cdots,n-3$；

$f(x_iy_i)=i-n+3$，$i=n-2,n-1,n$；

即边 $x_1y_1,x_2y_2,\cdots,x_ny_n$ 依次标 $4,5,\cdots,n-1,n,1,2,3$。

$f(x_{i+1}y_i)=i+2$，$i=1,2,\cdots,n-2$；

$f(x_{i+1}y_i)=1$，$i=n-1$；

$f(x_1y_n)=2$；

即边 $x_2y_1,x_3y_2,\cdots,x_ny_{n-1},x_1y_n$ 依次标 $3,4,\cdots,n-1,n,1,2$。

$f(y_i)=n+1$，$i=1,2,n$；即顶点 y_1,y_2,y_n 都标 $n+1$。

$f(y_i)=i-2$，$i=3,4,\cdots,n-1$；即顶点 $y_3,y_4,\cdots,y_{n-1}$ 依次标 $1,2,\cdots,n-3$。

显然，f 是 $\widetilde{W}_n$ 的一个 $n+1$–全染色。且有

$C(x_0)=\{1,2,\cdots,n+1\}$；

$C(x_1)=\{1,2,4,n\}, C(y_1)=\{3,4,n\}, C(y_n)=\{2,3,n\}$;

$C(x_2)=\{1,2,3,5\}, C(y_2)=\{4,5,n\}$;

$C(x_i)=\{i,i+1,i+3,i-1\}, i=3,4,\cdots,n-3$;

$C(y_i)=\{i+2,i+3,i-2\}, i=3,4,\cdots,n-2$;

$C(x_{n-2})=\{1,n-1,n,n+1\}, C(x_{n-1})=\{2,n-1,n,n+1\}, C(x_n)=\{1,3,n-1,n\}$;

$C(y_{n-1})=\{1,2,n-3\}$;

$C(y_n)=\{2,3,n+1\}$;

则 $C(x_i)\neq C(y_i), i=1,2,\cdots,n; C(x_{i+1})\neq C(y_i), i=1,2,\cdots,n-1$; $C(x_1)\neq C(y_n)$,故 f 是 $\widetilde{W}_n$ 的一个 $n+1$-$AVDTC$。

进一步,有$|C(i)|=4$ 或 5,$i=1,2,\cdots,n,n+1$,故 f 也是 $\widetilde{W}_n$ 的一个 $n+1$-$EAVDTC$,即 $\chi_{eat}(\widetilde{W}_n)=n+1$。

2 结论

本文研究了路、圈、风车图 K_3^t、图 D_{m4} 和齿轮图 $\widetilde{W}_n$ 的均匀邻点可区别全染色,给出了其均匀邻点可区别全色数的确切值,进一步验证了文献[3]中的猜想对这几类图是成立的。

参考文献(References)

[1] Balister P N, Bollobás B, Shelp R H. Vertex distinguishing coloring of graphs with Δ(G)=2[J]. *Discrete Mathematics*, 2002, 252: 17–29.

[2] Zhang Z F, Liu L Z, Wang J F. Adjacent strong edge coloring of graphs [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2002, 15(5): 623–626.

[3] 张忠辅, 陈祥恩, 李敬文, 等. 关于图的邻点可区别全染色 [J]. 中国科学: A 辑, 2004, 34(5): 574–583.
Zhang Zhongfu, Chen Xiangen, Li Jingwen, *et al*. *Science in China: Series A*, 2004, 34(5): 574–583.

[4] Bollobás B. Modern graph theory [M]. New York: Springer–Verlag, 1998: 145–177.

[5] Zhang Z, Wang W, Bao S, *et al*. On the equitable total coloring of some join graphs[J]. *Journal of Information and Computational Science*, 2005, 2(4): 829–834.

[6] Zhang Z F, Chen X E, Li J W, *et al*. On the adjacent vertex–distinguishing total coloring of graphs [J]. *Science in China: Series A*, 2005, 48(3): 289–299.

[7] Zhang Z F, Li J W, Chen X E, *et al*. *D*(*β*) vertex distinguishing edge coloring of graphs[J]. *Acta Mathematica Sinica: Chinese Series*, 2006, 49(3): 703–708.

[8] Zhang Z F, Li J W, Chen X G, *et al*. *D*(*β*) vertex distinguishing total coloring of graphs[J]. *Science in China: Series A*, 2000, 36(10): 1119–1130.

[9] 张忠辅, 程辉, 姚兵, 等. 图的邻点强可区别的全染色 [J]. 中国科学: A 辑, 2007, 37(9): 1073–1082.
Zhang Zhongfu, Cheng Hui, Yao Bin, *et al*. *Science in China: Series A*, 2007, 37(9): 1073–1082.

(责任编辑 朱宇)