摄动连续 Riccati 矩阵方程解矩阵界的估计

王 春

黑龙江科技学院理学院,哈尔滨 150027

摘要 Riccati 矩阵方程在控制理论和状态估计问题的研究中具有重要的理论和实用价值。针对摄动参数为带有范数有界不确定性的摄动连续 Riccati 矩阵方程解矩阵界估计问题,通过构造两个半正定矩阵,利用矩阵不等式和特征值的性质得到带有范数有界不确定性的摄动连续 Riccati 矩阵方程解矩阵新的上下界,利用特征值满足的不等式给出解矩阵特征值新的上下界。这些上下界的计算只涉及矩阵特征值的计算和线性矩阵不等式的求解,上下界的估计均由矩阵不等式给出,避免了高阶代数方程的求解。数值算例验证表明,研究结果是可行的。

关键词 摄动连续 Riccati 矩阵方程;范数有界不确定性;解矩阵

中图分类号 O231 **文献标识码** A **文章编号** 1000-7857(2010)19-0059-03

Estimation of Solution Matrix of Perturbed Continuous Riccati Matrix Equation

WANG Chun

College of Science, Heilongjiang Institute of Science and Technology, Harbin 150027, China

Abstract The Riccati matrix equation has a theoretical and practical importance in the control theory and the state estimation problems. The estimation of the solution matrix of the perturbed continuous Riccati matrix equation is studied in this paper. The perturbation parameters of this equation are of norm-bounded uncertainty. The new upper and lower bounds of the solution matrix for the perturbed continuous Riccati matrix equation are derived by constructing two semi-definite matrices, using matrix inequalities and characteristics of eigenvalues of the matrices. The calculations of upper and lower bounds require only the eigenvalues of the matrices and the solution of linear matrix inequalities. All estimations of bounds are given by matrix inequalities. Thus one does not have to solve the higher-order equation. The results obtained are verified by a numerical example, and the feasibility is illustrated.

Keywords perturbed continuous Riccati matrix equation; norm bounded uncertainty; solution matrix

0 引言

Riccati 矩阵方程广泛应用于系统稳定性分析、时滞系统的控制器设计、最大成本估算、数值算法的收敛性、Riccati 微分方程的性态等许多控制难题中,具有重要的理论和实用价值。许多学者对一般的 Riccati 矩阵方程进行了研究,并取得了一些结果,如张维海[1-2]对广义连续 Riccati 矩阵方程进行了研究,给出了广义连续 Riccati 矩阵方程解矩阵的存在条件,并提出强解的概念;Lee[3]使用配方法和 Schur 补引理给出了连续 Riccati 矩阵方程解矩阵的上下界,与以前的结果进行了比较,从很大程度上降低了保守性;陈东彦等[4]针对摄动离散 Riccati 矩阵方程进行了研究,得到了一些结果,但针对摄动连续 Riccati 矩阵方程的结果很少。本文主要对带有范数有界不确定性的摄动连续 Riccati 矩阵方程解矩阵的界进行了有效估计。

收稿日期:2010-04-19;修回日期:2010-09-07

基金项目:黑龙江省教育厅科学技术研究项目(11544048)

作者简介:王春,讲师,研究方向为控制理论及应用,电子信箱:wang3337373@163.com

$\lambda_i(X)$为矩阵 $X\in R^{n\times n}$ 或 $X\in C^{n\times n}$ 的第 i 个特征值，设矩阵 $X=X^{\mathrm{T}}, X\in R^{n\times n}$ 或 $X=X^{\mathrm{H}}, X\in C^{n\times n}$ 的特征值和奇异值均按递减顺序排列，即 $\lambda_1(X)\geqslant\lambda_2(X)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(X)$ 和 $\sigma_1(X)\geqslant\sigma_2(X)\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n(X)$。

1 问题的描述

摄动连续 Riccati 矩阵方程：

$$P(A+\Delta A)+(A+\Delta A)^{\mathrm{T}}P-PR^{\mathrm{T}}P=-Q \tag{1}$$

其中，$A\in R^{n\times n}$ 为渐近稳定矩阵，$Q\in R^{n\times n}, Q=Q^{\mathrm{T}}>0$ 和 $R\in R^{n\times n}, R=R^{\mathrm{T}}>0$ 均为对称正定矩阵，$(A+\Delta A, Q^{1/2})$能稳，$\Delta A\in R^{n\times n}$ 为不确定矩阵，表示矩阵 A 的结构摄动，且假设 $\Delta A\in R^{n\times n}$ 满足范数有界不确定性，即

$$\Delta A=DFE$$

其中，$D\in R^{n\times s}, E\in R^{l\times n}$ 为常值矩阵，$F\in R^{s\times l}$ 为未知不确定矩阵，满足 $F^{\mathrm{T}}F\leqslant I$。

引理 1[5] 设 A, D, E 和 F 是相应维数的矩阵，且 $F^{\mathrm{H}}F\leqslant I$，则对任意正定矩阵 $R>0$ 和任意满足 $R-\varepsilon DD^{\mathrm{H}}>0$ 的正数 $\varepsilon>0$，有

$$(A+DFE)^{\mathrm{H}}R^{-1}(A+DFE)\leqslant A^{\mathrm{H}}(R-\varepsilon DD^{\mathrm{H}})^{-1}A+\frac{1}{\varepsilon}E^{\mathrm{H}}E$$

成立。

引理 2[6] 对于任意的变量 $x\in R^n$ 和矩阵 $X\in C^{n\times n}$，有

$$\lambda_n(X)x^{\mathrm{T}}x\leqslant x^{\mathrm{T}}Xx\leqslant\lambda_1(X)x^{\mathrm{T}}x$$

成立，从而有 $\lambda_n(X)I_n\leqslant X\leqslant\lambda_1(X)I_n$ 成立。

引理 3[7] 设矩阵 X, Y 皆为 n 阶 Hermite 矩阵，则有

1）若 $X\geqslant Y$，则 $\lambda_i(X)\geqslant\lambda_i(Y), i=1,2,\cdots,n$；

2）若 $X>Y$，则 $\lambda_i(X)>\lambda_i(Y), i=1,2,\cdots,n$。

2 主要结果和证明

定理 1 设矩阵 P 为式(1)的唯一正定对称解矩阵，则 P 满足下列不等式：

$$P\geqslant G_1^{-1}(G_1M_1G_1)^{1/2}G_1^{-1}=P_1$$

式中，正定矩阵 G_1 定义为 $G_1=(R+R_1^{-1})^{1/2}$，并对于任意的正数 ε_1 和正定对称常值矩阵 R_1 使得下列不等式成立：

$$\varepsilon_1I-ER_1E^{\mathrm{T}}>0$$

$$M_1=Q-AR_1A^{\mathrm{T}}-AR_1E^{\mathrm{T}}(\varepsilon_1I-ER_1E^{\mathrm{T}})^{-1}ER_1A^{\mathrm{T}}-\varepsilon_1DD^{\mathrm{T}}>0$$

另外，P 还满足不等式：

$$P\leqslant G_2^{-1}(G_2M_2G_2)^{1/2}G_2^{-1}=P_2$$

这里，对任意的正数 ε_2 和正定对称常值矩阵 R_2，下列不等式成立：

$$G_2=(R-R_2^{-1})^{1/2}>0$$

$$\varepsilon_2I-ER_2E^{\mathrm{T}}>0$$

且矩阵

$$M_2=Q+AR_2A^{\mathrm{T}}+AR_2E^{\mathrm{T}}(\varepsilon_2I-ER_2E^{\mathrm{T}})^{-1}ER_2A^{\mathrm{T}}+\varepsilon_2DD^{\mathrm{T}}$$

证明 定义半正定矩阵

$$\varphi_1=[R_1^{-1/2}P+R_1^{1/2}(A+\Delta A)]^{\mathrm{T}}[R_1^{-1/2}P+R_1^{1/2}(A+\Delta A)]=PR_1^{-1}P+P(A+\Delta A)+(A+\Delta A)^{\mathrm{T}}P+(A+\Delta A)^{\mathrm{T}}R_1(A+\Delta A)\geqslant0 \tag{2}$$

其中，R_1 为正定对称常值矩阵。

由式(2)，方程(1)为

$$P(A+\Delta A)+(A+\Delta A)^{\mathrm{T}}P+Q=\varphi_1-PR_1^{-1}P-(A+\Delta A)^{\mathrm{T}}R_1(A+\Delta A)+Q=PRP \tag{3}$$

整理式(3)得

$$P(R+R_1^{-1})P=\varphi_1-(A+\Delta A)^{\mathrm{T}}R_1(A+\Delta A)+Q\geqslant Q-(A+\Delta A)^{\mathrm{T}}R_1(A+\Delta A)$$

由引理 1，对任意的正数 ε_1 满足 $\varepsilon_1I-ER_1E^{\mathrm{T}}>0$，有

$$P(R+R_1^{-1})P\geqslant Q-AR_1A^{\mathrm{T}}-AR_1E^{\mathrm{T}}(\varepsilon_1I-ER_1E^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot ER_1A^{\mathrm{T}}-\varepsilon_1DD^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

令

$$G_1=(R+R_1^{-1})^{1/2}$$

$$M_1=Q-AR_1A^{\mathrm{T}}-AR_1E^{\mathrm{T}}(\varepsilon_1I-ER_1E^{\mathrm{T}})^{-1}ER_1A^{\mathrm{T}}-\varepsilon_1DD^{\mathrm{T}}$$

则式(4)为

$$PG_1^2P\geqslant M_1 \tag{5}$$

在式(5)两侧左乘和右乘 G_1，得

$$(G_1PG_1)^2\geqslant G_1M_1G_1$$

若矩阵 $M_1>0$，则有

$$P\geqslant G_1^{-1}(G_1M_1G_1)^{1/2}G_1^{-1}$$

定义另一个半正定矩阵

$$\varphi_2=[R_2^{-1/2}P+R_2^{1/2}(A+\Delta A)]^{\mathrm{T}}[R_2^{-1/2}P+R_2^{1/2}(A+\Delta A)]=PR_2^{-1}P-P(A+\Delta A)-(A+\Delta A)^{\mathrm{T}}P+(A+\Delta A)^{\mathrm{T}}R_2(A+\Delta A)\geqslant0 \tag{6}$$

其中，矩阵 R_2 为正定对称常值矩阵。

由式(6)，方程(1)为

$$P(A+\Delta A)+(A+\Delta A)^{\mathrm{T}}P+Q=-\varphi_2+PR_2^{-1}P+(A+\Delta A)^{\mathrm{T}}R_2(A+\Delta A)+Q=PRP \tag{7}$$

整理式(7)，得

$$P(R-R_2^{-1})P=-\varphi_2+(A+\Delta A)^{\mathrm{T}}R_2(A+\Delta A)+Q\leqslant Q+(A+\Delta A)^{\mathrm{T}}R_2(A+\Delta A)$$

再由引理 1，对任意的正数 ε_2 满足 $\varepsilon_2I-ER_2E^{\mathrm{T}}>0$，有

$$P(R-R_2^{-1})P\leqslant Q+AR_2A^{\mathrm{T}}+AR_2E^{\mathrm{T}}(\varepsilon_2I-ER_2E^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot ER_2A^{\mathrm{T}}+\varepsilon_2DD^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

则矩阵 R_2 应使矩阵 $G_2=(R-R_2^{-1})^{1/2}>0$。

令矩阵

$$M_2=Q+AR_2A^{\mathrm{T}}+AR_2E^{\mathrm{T}}(\varepsilon_2I-ER_2E^{\mathrm{T}})^{-1}ER_2A^{\mathrm{T}}+\varepsilon_2DD^{\mathrm{T}}$$

则式(8)为

$$PG_2^2P\leqslant M_2 \tag{9}$$

在式(9)两侧左乘和右乘矩阵 G_2，得

$$(G_2PG_2)^2\leqslant G_2M_2G_2$$

从而有

$$P\leqslant G_2^{-1}(G_2M_2G_2)^{1/2}G_2^{-1}$$

证毕。

定理 2 设矩阵 P 为方程(1)的唯一正定对称解矩阵，则 P 满足以下两个不等式：

$$P\geqslant\frac{M_1^{1/2}}{\lambda_1(G_1)}=P_3 \tag{10}$$

$$P\leqslant\frac{M_2^{1/2}}{\lambda_n(G_2)}=P_4 \tag{11}$$

证明 应用引理2,式(5)和式(9)分别为

$$\lambda_1^2(G_1)P^2 \geqslant M_1$$

$$\lambda_n^2(G_2)P^2 \leqslant M_2$$

则

$$P \geqslant \frac{M_1^{1/2}}{\lambda_1(G_1)}$$

$$P \leqslant \frac{M_2^{1/2}}{\lambda_n(G_2)}$$

证毕。

推论1 方程(1)解矩阵 P 特征值的上下界分别为

$$\lambda_1(P) \geqslant \left[\frac{\lambda_1(M_1)}{\lambda_1(R+R_1^{-1})}\right]^{1/2}$$

$$\lambda_1(P) \leqslant \left[\frac{\lambda_1(M_2)}{\lambda_n(R-R_2^{-1})}\right]^{1/2}$$

证明 对式(10)和式(11)应用引理3,得

$$\lambda_1(P) \geqslant \lambda_1(P_3)=\lambda_1\left[\frac{M_1^{1/2}}{\lambda_1(G_1)}\right]=\frac{\lambda_1^{1/2}(M_1)}{\lambda_1(G_1)}=$$

$$\frac{\lambda_1^{1/2}(M_1)}{\lambda_1^{1/2}(R+R_1^{-1})}=\left[\frac{\lambda_1(M_1)}{\lambda_1(R+R_1^{-1})}\right]^{1/2}$$

$$\lambda_1(P) \leqslant \lambda_1(P_4)=\lambda_1\left[\frac{M_2^{1/2}}{\lambda_n(G_2)}\right]=\frac{\lambda_1^{1/2}(M_2)}{\lambda_n(G_2)}=$$

$$\frac{\lambda_1^{1/2}(M_2)}{\lambda_n^{1/2}(R-R_2^{-1})}=\left[\frac{\lambda_1(M_2)}{\lambda_n(R-R_2^{-1})}\right]^{1/2}$$

证毕。

3 数值算例

例 在方程(1)中,设 $\Delta A \in R^{n\times n}$ 满足范数有界不确定性,且

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 0.5\\ 0 & -7\end{bmatrix} \quad R=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.5\end{bmatrix} \quad Q=\begin{bmatrix}3 & 0.2\\ 0.2 & 3\end{bmatrix}$$

$$\Delta A=DFE=\begin{bmatrix}0.049 & 0.014\\ 0.014 & 0.038\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin\beta & 0\\ 0 & \cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

则有

1)由定理1,取 $\varepsilon_1=0.0019, R_1=\varepsilon_1(EE^{\mathrm{T}})^{-1}-\varepsilon_1 D$,得

$$M_1=\begin{bmatrix}2.5542 & 0.7380\\ 0.7380 & 0.2853\end{bmatrix} \quad P \geqslant P_1=\begin{bmatrix}0.0666 & 0.0163\\ 0.0163 & 0.0160\end{bmatrix}$$

取 $\varepsilon_2=4.5$, $R_2=\frac{\varepsilon_2}{2}(EE^{\mathrm{T}})^{-1}+\frac{1}{2}R^{-1}$,得

$$M_2=\begin{bmatrix}70.3312 & -40.6636\\ -40.6636 & 575.1768\end{bmatrix} \quad P \leqslant P_2=\begin{bmatrix}10.3741 & -2.3833\\ -2.3833 & 54.5711\end{bmatrix}$$

2)由定理2,取 $\varepsilon_1=0.0019, R_1=\varepsilon_1(EE^{\mathrm{T}})^{-1}-\varepsilon_1 D$,得

$$P \geqslant P_3=\begin{bmatrix}0.0664 & 0.0164\\ 0.0164 & 0.0159\end{bmatrix}$$

取 $\varepsilon_2=4.5, R_2=\frac{\varepsilon_2}{2}(EE^{\mathrm{T}})^{-1}+\frac{1}{2}R^{-1}$,得

$$P \leqslant P_4=\begin{bmatrix}10.3405 & -1.5730\\ -1.5730 & 29.8699\end{bmatrix}$$

该算例说明了定理1和定理2的正确性和可行性。

4 结论

本文研究了连续Riccati矩阵方程在摄动参数满足范数有界不确定性下的解矩阵的上下界的估计问题,得到了两个定理,且又给出了解矩阵的特征值的上下界,然后利用数值算例说明了结果的正确性和可行性。

参考文献(References)

[1] 张维海. 矩阵代数Riccati方程的进一步研究 [J]. 控制理论与应用, 2000, 17(4): 576–578.
Zhang Weihai. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(4): 576–578.

[2] 张维海. 广义代数Riccati方程的一个比较定理 [J]. 控制理论与应用, 2002, 19(6): 915–918.
Zhang Weihai. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(6): 915–918.

[3] Lee C H. Solution bounds of the continuous Riccati matrix equation[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(8): 1409–1413.

[4] 陈东彦, 侯玲. 摄动离散矩阵Lyapunov方程解的估计 [J]. 控制理论与应用, 2006, 23(5): 830–832.
Chen Dongyan, Hou Ling. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(5): 830–832.

[5] Moheimani S O R, Petersen I R. Optimal quadratic guaranteed cost control of a class of uncertain time-delay systems [J]. *IEEE Proceedings of Control Theory Application*, 1997, 144(2): 183–188.

[6] Rugh W J. Linear system theory [M]. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall Inc, 1993: 237–241.

[7] Yasuda K, Hiral K. Upper and lower bounds on the solution of the algebraic Riccati equation [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, 24(3): 483–487.

(责任编辑 代而)