

一类时滞位移反馈参数激励系统的复杂动力学行为

尚慧琳¹, 文永蓬²

1. 上海应用技术学院机械与自动化工程学院, 上海 200235
2. 上海工程技术大学城市轨道交通学院, 上海 201620

摘要 考虑一个具有二次方和三次方非线性的单自由度参数激励系统, 对系统引入一个主动控制即线性时滞位移反馈, 定性地研究系统中时滞反馈对系统动力学行为的影响。首先运用规范型方法, 给出由分岔产生的周期解的解析形式。进而解析地预测了由时滞导致的系统周期解的个数及其稳定性随时滞量的变化规律。发现时滞能够引起系统平衡点失稳, 出现多吸引子共存现象。最后采用 4 阶 Runge-Kutta 法和点映射方法给出数值结果。并对多吸引子的吸引域进行了划分, 给出了时滞导致的系统的概周期吸引子。数值结果与理论预测的一致性验证了理论分析结果的有效性。研究发现时滞可使系统出现复杂的动力学行为。本文结果对控制系统的镇定和系统同步有潜在的应用价值。

关键词 时滞反馈; 概周期解; 分岔; 吸引域

中图分类号 O322, TB53

文献标识码 A

文章编号 1000-7857(2010)19-0055-04

Complex Dynamics of a Parametrically Excited System with Delayed Position Feedbacks

SHANG Huilin¹, WEN Yongpeng²

1. School of Mechanical and Automation Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 200235, China
2. College of Urban Railway Transportation, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, China

Abstract A single-degree-of-freedom system with quadratic, cubic, and parametrically excited terms is considered. We introduce an active control, i.e. a linear delayed-position feedback control, to the system, and the effects of the delayed feedback on the dynamics of the system are studied qualitatively. First, the normal form method is proposed to investigate the dynamics of the system with varying delay. Then the second-order approximation of the periodic solution is obtained, and is used to predict the stability of the bifurcation branches and the variation of the number of solutions with varying time delay. It is found that time delay can make the trivial equilibrium lose its stability, and induce the multiple attractors coexisting in the system. Finally, the numerical results are obtained through the 4th-order Runge-Kutta and point-to-point mapping methods. The basins of attraction are classified. In addition, the quasi-periodic attractor time delay induces is also obtained. The agreement of the numerical and theoretical results verifies the validity of the theoretical predictions. It is found that varying the delay can induce the complex dynamical behaviors in the system. This paper provides potential applications of these findings for the study of stabilization of controlled systems and chaotic motions.

Keywords delayed feedback; quasi-periodic solution; bifurcation; basin of attraction

0 引言

时滞反馈控制常用来改善系统的特性, 如系统镇定^[1]、控制混沌^[2]等。由于时滞反馈控制在实际应用中容易实现, 近年

来, 其扩展研究受到广泛关注^[3-5]。时滞对系统的动态性质影响较大, 非线性时滞反馈控制系统有着比常微分方程描述的原系统更加丰富的动力学行为^[3,6]。时滞反馈控制可使一个平

收稿日期: 2010-05-26, 修回日期: 2010-09-12

基金项目: 国家自然科学基金项目(10902071); 上海高校选拔培养优秀青年教师科研专项基金项目(YYY08004); 上海市教育委员会重点学科建设项目(J51501)

作者简介: 尚慧琳, 讲师, 研究方向为非线性动力学和振动控制, 电子信箱: suliner60@hotmail.com

平衡点稳定的系统出现多周期吸引子共存、概周期吸引子,甚至混沌^[6]。对于对称性非自治系统的时滞反馈控制效应,许多力学与数学工作者进行了研究探讨^[7-9],而对于非对称非自治系统,即便是无时滞反馈系统的复杂性研究也非常有限^[10-11]。

本文利用时滞反馈控制一个具有二次方、三次方非线性的非对称单自由度参数激励系统^[10]:

$$\ddot{u}+2\varepsilon\mu\dot{u}+\omega_0^2u+\varepsilon\delta u^2+\varepsilon^2\alpha u^3+\varepsilon g u \cos \Omega t=0 \quad (1)$$

其中, ε 为小的无量纲参数; $\mu, \omega_0, \delta, \alpha, g$ 和 Ω 为常数。式(1)可用来描述一个单自由度机械系统的响应,或者梁、圆盘、壳模型响应的一阶模态近似。其中二次方项可由曲率或不对称材料非线性引起,三次方项可由面内拉伸或对称材料非线性引起,参数项可由轴向谐波、面内载荷,或转矩引起。在不同的参数取值下,无阻尼无外激励的系统(1)(式(1))平衡点个数不同,如 $\omega_0=1.0, \alpha=4.0, \varepsilon=0.1, \delta=3.0$ 时,系统有一个中心,即原点^[12]。对单平衡点系统(1)引入一个线性时滞位移反馈,则系统(1)变换为

$$\ddot{u}+2\varepsilon\mu\dot{u}+\omega_0^2u+\varepsilon\delta u^2+\varepsilon^2\alpha u^3+\varepsilon g u \cos \Omega t=A(u_\tau-u) \quad (2)$$

对时滞反馈控制如何引起单平衡点系统(1)的复杂动力学行为进行研究,采用规范性方法分析了时滞引起的平衡点失稳,研究了时滞反馈系统(2)的主参数共振响应,讨论了系统的分岔性质以及非零解的稳定性。最后,数值验证时滞引起的系统多吸引子共存、吸引域边界分形及概周期运动等复杂现象。

1 时滞引起的周期解及其稳定性分析

1.1 周期解的解析近似解

无外激励、阻尼和时滞的系统(2)平衡点横坐标为 $u=0$, $(2\varepsilon\alpha)^{-1}(-\delta\pm(\delta^2-4\omega_0^2\alpha)^{1/2})$ 。平衡点个数、位置及势阱的形状均取决于 α, δ, ω_0 和 ε 的值。在系统(2)中,对于主参数共振的情况,设

$$\Omega=2\omega_0+\varepsilon\sigma \quad (3)$$

其中 σ 为调谐参数。同时,重新标度反馈增益 $A=\varepsilon A_1$, 观察时滞反馈对主参数共振的作用。根据文献[10],系统(1)的近似解可假设成如下形式:

$$u=r \cos \left(\frac{1}{2} \Omega t - \frac{\gamma}{2} \right) + \varepsilon \left[m_1 r^2 \cos(\Omega t - \gamma) + m_2 r^2 + m_3 r \cos \left(\frac{3}{2} \Omega t - \frac{\gamma}{2} \right) \right] + \dots \quad (4)$$

其中 m_1, m_2 和 m_3 为实数。设

$$\dot{u} = \frac{\Omega}{2} v \quad z = e^{i\Omega t} \quad \zeta = \frac{u - iv}{2} \quad (5)$$

则系统(2)为

$$\dot{\zeta} = \frac{i\Omega}{2} \zeta - \frac{i}{\Omega} G(\zeta, \bar{\zeta}, z, \bar{z}) \quad (6)$$

采用规范型方法,设

$$\begin{aligned} \zeta &= \eta + \varepsilon h_1(\eta, \bar{\eta}, z, \bar{z}) + \varepsilon^2 h_2 + \dots \\ \dot{\eta} &= i\Omega \eta / 2 + \varepsilon g_1(\eta, \bar{\eta}, z, \bar{z}) + \varepsilon^2 g_2 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

分别对比 ε 和 ε^2 同阶系数可得

$$u = \eta + \bar{\eta} + \varepsilon \left[-\frac{4\delta}{3\Omega^2} (\eta^2 + 6\eta\bar{\eta} + \bar{\eta}^2) + \frac{g}{4\Omega^2} (\eta z + \bar{\eta}\bar{z}) \right] + O(\varepsilon^2) \quad (8)$$

联合式(4)~式(6)和式(8)可知

$$\eta = \frac{1}{2} r e^{i\left(\frac{\Omega}{2}t - \frac{\gamma}{2}\right)} \quad (9)$$

对比式(4)和式(8)系数得

$$m_1 = -\frac{2\delta}{3\Omega^2} \quad m_2 = -3m_1 \quad m_3 = -\frac{g}{4\Omega^2} \quad (10)$$

进而得到系统规范型。由式(9),将系统规范型写成极坐标形式,近似有

$$\begin{cases} \dot{r} = -\frac{\varepsilon c_2 r}{\Omega} - g r \left[\frac{\varepsilon^2 c_2}{\Omega^3} \cos \gamma + \left(\frac{\varepsilon^2 c_1}{\Omega^3} + \frac{\varepsilon}{2\Omega} \right) \sin \gamma \right] \\ r \dot{\gamma} = 2 \left[\frac{\varepsilon c_1}{\Omega} + \frac{\varepsilon^2 (c_1^2 + c_2^2)}{\Omega^3} + \frac{\varepsilon^2 g^2}{8\Omega^2} \right] r + 2g r \left[\frac{\varepsilon^2 c_2}{\Omega^3} \sin \gamma - \left(\frac{\varepsilon^2 c_1}{\Omega^3} + \frac{\varepsilon}{2\Omega} \right) \cos \gamma \right] + \varepsilon^2 \left(\frac{20\delta^2}{3\Omega^3} - \frac{3\alpha}{2\Omega} \right) r^3 \end{cases} \quad (11)$$

其中,

$$c_1 = A \left(\cos \frac{\Omega}{2} \tau - 1 \right) \quad c_2 = A \sin \frac{\Omega}{2} \tau + \mu \Omega \quad (12)$$

令式(11)右端为0,有

$$\begin{cases} -c_2 - g \left[\frac{\varepsilon c_2}{\Omega^2} \cos \gamma + \left(\frac{\varepsilon c_1}{\Omega^2} + \frac{1}{2} \right) \sin \gamma \right] = 0 \\ 2 \left[c_1 + \frac{\varepsilon (c_1^2 + c_2^2)}{\Omega^2} + \frac{\varepsilon g^2}{8\Omega^2} \right] + 2g \left[\frac{\varepsilon c_2}{\Omega^2} \sin \gamma - \left(\frac{\varepsilon c_1}{\Omega^2} + \frac{1}{2} \right) \cos \gamma \right] + \varepsilon \left(\frac{20\delta^2}{3\Omega^2} - \frac{3\alpha}{2} \right) r^2 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

由式(13)可解到 r 和 γ , 将其代入式(4),即可得系统的二阶近似解。式(13)意味着系统(2)的稳态解和非稳态解是由时滞、外激励的频率及外激励振幅共同决定。至此,非线性振动系统(2)的周期解问题即转化为平均方程(11)的定常解问题。

1.2 解析解的稳定性分析

将式(11)化为直角坐标后求 Frechét 导数,即可判断平衡点稳定性。故设

$$p = r \cos \left(\frac{\gamma}{2} \right) \quad q = r \sin \left(\frac{\gamma}{2} \right) \quad (14)$$

则 p 和 q 满足

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \left(-\frac{\varepsilon c_2}{\Omega} - \frac{\varepsilon^2 g c_2}{\Omega^3} \right) p + \left[\frac{\varepsilon^2 g c_1}{\Omega^3} - \frac{\varepsilon g}{2\Omega} - \frac{\varepsilon c_1}{\Omega} - \frac{\varepsilon^2 (c_1^2 + c_2^2)}{\Omega^3} - \frac{\varepsilon^2 g^2}{8\Omega^3} \right] q - \varepsilon^2 \left(\frac{10\delta^2}{3\Omega^3} - \frac{3\alpha}{4\Omega} \right) (p^2 + q^2) q \\ \dot{q} &= \left[-\frac{\varepsilon^2 g c_1}{\Omega^3} - \frac{\varepsilon g}{2\Omega} + \frac{\varepsilon c_1}{\Omega} + \frac{\varepsilon^2 (c_1^2 + c_2^2)}{\Omega^3} + \frac{\varepsilon^2 g^2}{8\Omega^3} \right] p + \left(-\frac{\varepsilon c_2}{\Omega} + \frac{\varepsilon^2 g c_2}{\Omega^3} \right) q + \varepsilon^2 \left(\frac{10\delta^2}{3\Omega^3} - \frac{3\alpha}{4\Omega} \right) (p^2 + q^2) p \end{aligned} \quad (15)$$

方程组(15)在平衡点附近的 Jacobi 矩阵的特征值为

$$\lambda = -2c_2 / \Omega \pm 2 \sqrt{c_2^2 / \Omega^2 - f} \quad (16)$$

其中,

$$f = c_1^2 - \frac{\varepsilon^2 g^2 c_1^2}{\Omega^2} - \left(\frac{\varepsilon g A c_2}{\Omega^2} + \frac{g}{2} \right)^2 + \left[c_2 + \frac{\varepsilon (c_2^2 + c_1^2)}{\Omega^2} + \frac{\varepsilon g^2}{8\Omega^2} \right]^2 \quad (17)$$

根据 Routh-Hurwitz 定理可得平衡点稳定的条件为 $c_2 > 0, f > 0$ 。当 $c_2 \neq 0, f = 0$ 时,特征方程有一零特征根,此时平衡点将产生静态分岔;而当

$$c_2 = 0 \quad f \neq 0 \quad \left. \frac{\partial c_2}{\partial \tau} \right|_{c_2=0} \neq 0 \quad (18)$$

特征方程有一对纯虚根,此时平衡点发生 Hopf 分岔。同时,非零解 Jacobi 矩阵的特征值满足以下特征方程:

$$\lambda^2 + \frac{4\epsilon c_2}{\Omega} \lambda + \frac{\epsilon^2}{\Omega^2} \left(\frac{40\delta^2}{3\Omega^2} - 3\alpha \right) \cdot \left[\left(\frac{\epsilon g c_1}{\Omega^2} + \frac{\epsilon g}{2} \right) \cos \gamma - \frac{\epsilon g c_2}{\Omega} \sin \gamma \right] r^2 = 0 \quad (19)$$

将式(13)解得的 r 和 γ 代入式(19),即可判断周期解的稳定性。现给定一组系统参数取值:

$$\alpha = 4.0 \quad \omega_0 = 1.0 \quad \mu = 1.0 \quad \delta = 3.0 \\ \Omega = 2.0 \quad g = 2.0 \quad A = 2.0 \quad (20)$$

应用本节分析方法可得系统(2)周期解随时滞 τ 的变化情况,如图 1 所示。系统在一定的时滞取值范围内出现多吸引子共存现象,即不同的初始值可以导致不同的系统动力学行为。

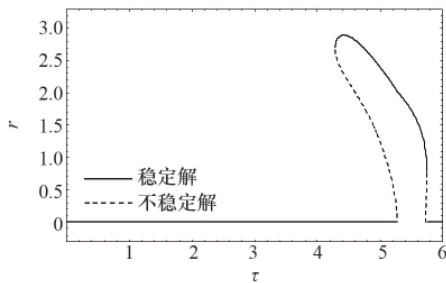


图 1 系统(2)的周期解的振幅随时滞的变化
Fig. 1 Variation of the amplitude r of the periodic solutions of the system (2) with time delay

2 时滞引起的复杂现象

为了验证本文理论分析的可靠性并进一步研究系统的动力学行为,利用 4 阶 Runge-Kutta 法,固定积分步长为 0.005,得到系统(2)的数值解。系统参数取值同图 1,设系统初始状态为

$$u(t) = 0.0 \quad \dot{u}(t) = 0.0 \quad (-\tau \leq t < 0) \quad (22)$$

系统(2)的数值解如图 2 所示。可以看出,解析解与数值解基本一致,从而验证了解析方法定性分析的可靠性。

如图 1 所示, $\tau = 4.3$ 时,平衡点吸引子和周期吸引子共存。对于这样多吸引子共存情况,有必要划分各吸引子的初值吸引盆。图 1 中一定时滞量取值下各吸引子的吸引域分布如图 3 所示,其中各图中吸引域在初始值区间 $-20 \leq u(0) \leq 10, -20 \leq \dot{u}(0) \leq 20$ 上绘制,初始点个数均为 $300 \times 400^{[1]}$ 。图中浅灰色区域为平衡点吸引子的吸引域,黑色区域为周期吸引子的吸引域。可以看出,平衡点吸引子的吸引域随时滞的增大而减小;同时,吸引盆呈不同程度的分形。在更大的时滞量下,系统会出现概周期吸引子,如图 4 所示。

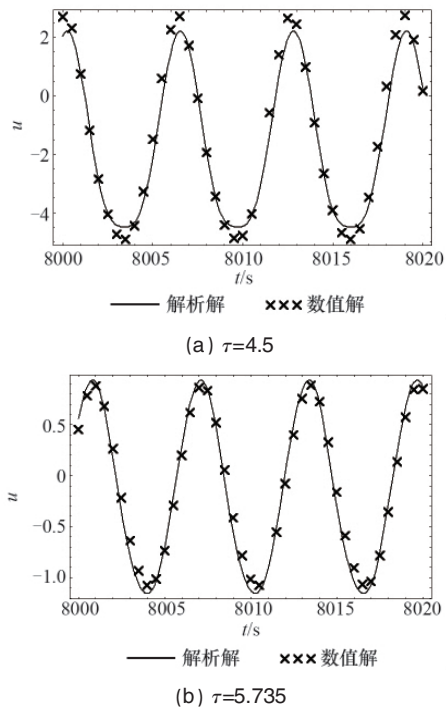


图 2 系统(2)的数值解与解析解的对比
Fig. 2 Comparison between numerical solutions and analytical ones

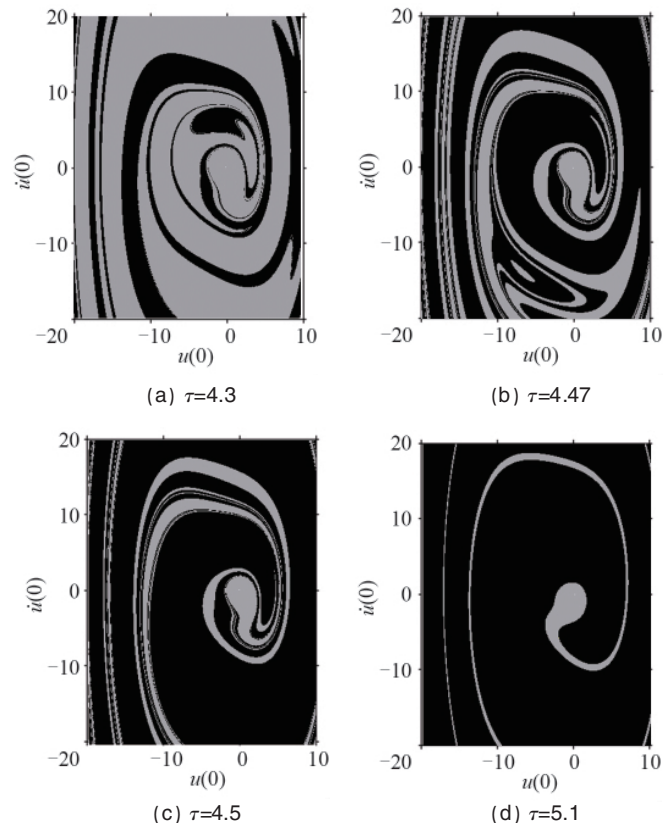
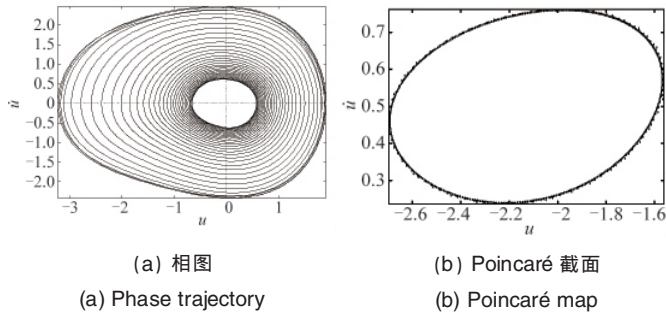


图 3 不同时滞下系统(2)的吸引盆
Fig. 3 Basins of attraction of the system (2) under the different values of time delay

图 4 $\tau=11.8$ 时系统(2)的数值解Fig. 4 Numerical solution of equation (2) for $\tau=11.8$

3 结论

本文主要研究线性时滞位移反馈对一类有二次方和三次方非线性的非对称参数激励系统动力学行为的影响。构造规范型方法得到时滞引发的主参数共振响应解的近似解,确定了分叉解的分叉方向及稳定性,并利用数值方法验证解析结果的有效性。对于系统的多稳态运动,通过将时滞反馈系统吸引域向有限维欧氏空间投影,绘制了不同时滞下多稳态解的吸引盆,并进一步数值研究了时滞引起的复杂现象。研究发现,时滞不仅可以改变系统平衡点的稳定性,还可以引起系统多吸引子共存现象,控制吸引盆边界的拓扑形态,并进一步引起系统的复杂运动,如概周期运动。这些研究结果在研究受控系统的镇定和混沌运动方面有着潜在的应用价值。

参考文献 (References)

[1] Hu H Y. Using delayed state feedback to stabilize periodic motions of an oscillator[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 275(3-5): 1009-1025.

- [2] Just W, Benner H, von Loewenich C. On global properties of time-delayed feedback control: Weakly nonlinear analysis [J]. *Physica D - Nonlinear Phenomena*, 2004, 199(1-2): 33-44.
- [3] Wang H L, Hu H Y, Wang Z H. Global dynamics of a duffing oscillator with delayed displacement feedback[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2004, 14(8): 2753-2775.
- [4] Fischer D, Isermann R. Mechatronic semi-active and active vehicle suspensions[J]. *Control Engineering Practice*, 2004, 12(11): 1353-1367.
- [5] Shang H L, Xu J. Delayed feedbacks to control the fractal erosion of safe basins in a parametrically excited system [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2009, 41(4): 1880-1896.
- [6] Shang H L, Xu J. Delay induced multiple attractors and basins in a controlled system[J]. *Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems, Series B: Application & Algorithms*, 2007, 14(S5): 117-122.
- [7] Ji J C, Leung A Y T. Bifurcation control of a parametrically excited duffing system[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2002, 27(4): 411-417.
- [8] Maccari A. Vibration control for parametrically excited Liénard systems [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2006, 41(1): 146-155.
- [9] 邢真慈, 徐伟, 戎海武, 等. 有界噪声激励下带有时滞反馈的随机 Mathieu-Duffing 系统的响应[J]. *物理学报*, 2009, 58(2): 824-929. Xing Zhenci, Xu Wei, Rong Haiwu, et al. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(2): 824-929.
- [10] Zavodney L D, Nayfeh A H, Sanchez N E. Bifurcations and chaos in parametrically excited single-degree-of-freedom systems [J]. *Nonlinear Dynamics*, 1990, 1(1): 1-21.
- [11] 张明, 聂宏. 非对称非线性系统非平稳随机响应的中心差分法[J]. *振动工程学报*, 2009, 22(2): 128-133. Zhang Ming, Nie Hong. *Journal of Vibration Engineering*, 2009, 22(2): 128-133.

(责任编辑 代丽)

·学术动态·



“2010年全国压电和声波理论及器件技术研讨会”征文

中国力学学会、中国声学学会将于2010年12月10—13日召开“2010年全国压电和声波理论及器件技术研讨会”。

征文内容:压电理论(包括微纳米压电理论);声波理论(表面波、体波等);压电器件设计与分析(谐振器、传感器、换能器、MEMS/NEMS/Nano压电器件等);压电材料(陶瓷、晶体、薄膜、微纳米等压电材料);超声技术;压电器件的加工与制造技术(包括微纳米材料与器件的制造与制备技术);振荡器、滤波器设计与制造。

征文截止日期:2010年10月31日。

联系方式:福建省厦门市厦门大学萨本栋微纳米技术研究中心 407(361005), 郭航;电话:0592-2186897;传真:0592-2187196;电子信箱:hangguo@xmu.edu.cn。

会议网址: <http://piezo.xmu.edu.cn>。