追赶法求解拟五对角线性方程组

李文强[1],马 民[1],李卫霞[2]

1. 河南师范大学数学与信息科学学院,河南新乡 453007
2. 河南师范大学附属中学,河南新乡 453007

摘要 根据拟五对角矩阵的特点,沿用追赶法的思想,首先将拟五对角系数矩阵分解成3个简单矩阵的乘积 $A=LUD$,其中 L 为下三角形矩阵,U 为单位上三角形矩阵,D 为拟对角矩阵。然后将拟五对角线性方程组的求解问题转化为求解以下3个简单的线性方程组:$Lz=f$,$Uy=z$,$Dx=y$。通常的 LU 分解仅求解2个方程,本算法虽然将问题转化为3个方程组的求解,复杂度却没有增加,总的运算量仅为 $O(39n)$。由于算法沿用追赶法矩阵分解的思想,对于严格对角占优的五对角线性方程组具有良好的数值稳定性。数值结果表明,算法的计算时间与方程组阶数 n 呈线性关系。

关键词 拟五对角矩阵;线性方程组;追赶法

中图分类号 O24 **文献标识码** A **文章编号** 1000-7857(2010)18-0060-04

Forward Elimination and Backward Substitution Algorithm for Solving the Quasi-pentadiagonal Linear Equations

LI Wenqiang[1], MA Min[1], LI Weixia[2]

1. *College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, Henan Province, China*
2. *The Affiliated Middle School of Henan Normal University, Xinxiang 453007, Henan Province, China*

Abstract Based on the features of quasi-pentadiagonal matrix and the idea of forward elimination and backward substitution algorithm, an algorithm for solving the quasi-pentadiagonal linear equations is proposed in this paper. This algorithm consists of the following two steps. First, the quasi-pentadiagonal matrix $\boldsymbol{A}$, as the coefficient matrix of the linear equations, is decomposed into three simple matrices $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{D}$ with $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LUD}$, where $\boldsymbol{L}$ is the lower triangular matrix, $\boldsymbol{U}$ is the upper triangular matrix, $\boldsymbol{D}$ is the unit quasi-diagonal matrix. Then, the quasi-pentadiagonal linear equations are decomposed into the following three simpler linear equations: $\boldsymbol{L}z=f$, $\boldsymbol{U}y=z$, $\boldsymbol{D}x=y$. Two equations are solved in the traditional $\boldsymbol{LU}$ decomposition algorithm, while three linear equations are solved in this algorithm, but without increasing the complexity. The total computational cost is only $O(39n)$, less than that of the traditional algorithm. The main idea of this algorithm is the same as that of the forward elimination and backward substitution algorithm, consequently, the algorithm proposed in this paper is stable if the coefficient matrix is a strictly diagonally dominant matrix. The stability analysis and the corresponding results are also presented in this paper. Numerical experiments indicate that a linear relation is preserved between the computational time and the order n of equations.

Keywords quasi-pentadiagonal matrix; linear equations; forward elimination and backward substitution algorithm

0 引言

在研究椭圆型方程边值问题、抛物型方程的边初值问题的数值解法,五次样条插值和高精度插值问题,利用紧致型高精度差分格式求解流体力学方程中的对流项和黏性项[1-2]时,经常将问题归结为求解五对角线性方程组或拟五对角线性方程组。如何准确、高效地求解五对角线性方程组一直是计算数学和计算流体力学的研究重点之一,尤其是瞬态/时变问题,每推进一个时间步,都需要对相应的空间导数进行数值求解。因此,提高拟五对角线性方程组算法的求解效率,将会大大缩短整个问题的计算时间。

收稿日期:2010-04-12;**修回日期**:2010-09-06

基金项目:河南师范大学青年科学基金项目(2008qk01)

作者简介:李文强,副教授,研究方向为数值线性代数,电子信箱:liwenqiangxx@126.com

五对角线性方程组的求解虽然是一个古老的问题，但随着计算数学在各个行业中的应用越来越广泛，该问题的求解又引起广大学者的重视。近年来已有学者针对此问题给出了一些新的算法[3-4]。本算法沿用解决拟三对角线性方程组[5]的思想，将问题转化为 3 个简单方程组的解法，看似将问题复杂化了，实际上却大大减少了运算量。文献[4]给出的五参数法总运算量约为 $O(49n)$，本文算法的总运算量约为 $O(39n)$，减少的运算量中乘除法为 $O(6n)$，加减法为 $O(4n)$。由于算法考虑了拟五对角矩阵的特点，采用追赶法分解矩阵，对于严格对角占优矩阵有着良好的数值稳定性。

1 算法分析

拟五对角线性方程组可以写成如下矩阵形式：

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{f} \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^{\mathrm{T}}\in R^n$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in R^n$，$\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}$ 为拟五对角矩阵，

$$A=\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & \beta_1 & & & \alpha_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \beta_2 & & & \alpha_2 \\ \alpha_3 & a_3 & b_3 & c_3 & \beta_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} & & & \alpha_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ c_n & \beta_n & & & \alpha_n & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

将系数矩阵进行分解：

$$\boldsymbol{A=LUD} \tag{2}$$

其中，

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} p_1 & & & \\ g_2 & p_2 & & \\ \alpha_3 & g_3 & p_3 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \alpha_n & g_n & p_n \end{bmatrix},\ \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 1 & & & & s_1 & t_1 \\ & 1 & & & s_2 & t_2 \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & s_{n-2} & t_{n-2} \\ & & & & 1 & t_{n-1} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} 1 & q_1 & h_1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & 1 & q_{n-4} & h_{n-4} & & \\ & & & 1 & q_{n-3} & 0 & \\ & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

则拟五对角线性方程组的求解过程可以分为以下 3 个步骤：① 求解 $\boldsymbol{Lz=f}$；② 求解 $\boldsymbol{Uy=z}$；③ 求解 $\boldsymbol{Dx=y}$。

2 算法过程

根据算法分析，拟五对角矩阵的分解分为两步。首先将 $\boldsymbol{A}$ 分解成

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\widetilde{\boldsymbol{U}} \tag{3}$$

其中，

$$\widetilde{\boldsymbol{U}}=\begin{bmatrix} 1 & q_1 & h_1 & & & & \tilde{s}_1 & \tilde{t}_1 \\ & 1 & q_2 & h_2 & & & \tilde{s}_2 & \tilde{t}_2 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & q_{n-4} & h_{n-4} & \tilde{s}_{n-4} & \tilde{t}_{n-4} \\ & & & & 1 & q_{n-3} & \tilde{s}_{n-3} & \tilde{t}_{n-3} \\ & & & & & 1 & \tilde{s}_{n-2} & \tilde{t}_{n-2} \\ \tilde{s}_{n-1} & & & & & & 1 & \tilde{t}_{n-1} \\ \tilde{t}_n & \tilde{s}_n & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

由待定系数法容易推出

$$p_1=b_1\quad q_1=c_1/p_1\quad h_1=\beta_1/p_1\quad \tilde{s}_1=\alpha_1/p_1\quad \tilde{t}_1=a_1/p_1$$

$$g_2=a_2\quad p_2=b_2-g_2q_1\quad q_2=(c_2-g_2h_1)/p_2$$

$$h_2=\beta_2/p_2\quad \tilde{s}_2=-g_2\tilde{s}_1/p_2\quad \tilde{t}_2=(\alpha_2-g_2\tilde{t}_1)/p_2$$

$$g_i=a_i-\alpha_i q_{i-2}\quad p_i=b_i-\alpha_i h_{i-2}-g_i q_{i-1}$$

$$q_i=(c_i-g_i h_{i-1})/p_i\quad h_i=\beta_i/p_i$$

$$\tilde{s}_i=(-\alpha_i\tilde{s}_{i-2}-g_i\tilde{s}_{i-1})/p_i\quad \tilde{t}_i=(-\alpha_i\tilde{t}_{i-2}-g_i\tilde{t}_{i-1})/p_i\quad (i=3,4,\cdots,n-4)$$

$$g_{n-3}=a_{n-3}-\alpha_{n-3}q_{n-5}\quad p_{n-3}=b_{n-3}-\alpha_{n-3}h_{n-5}-g_{n-3}q_{n-4}\quad q_{n-3}=(c_{n-3}-g_{n-3}h_{n-4})/p_{n-3}$$

$$\tilde{s}_{n-3}=(\beta_{n-3}-\alpha_{n-3}\tilde{s}_{n-5}-g_{n-3}\tilde{s}_{n-4})/p_{n-3}\quad \tilde{t}_{n-3}=(-\alpha_{n-3}\tilde{t}_{n-5}-g_{n-3}\tilde{t}_{n-4})/p_{n-3}$$

$$g_{n-2}=a_{n-2}-\alpha_{n-2}q_{n-4}\quad p_{n-2}=b_{n-2}-\alpha_{n-2}h_{n-4}-g_{n-2}q_{n-3}$$

$$\tilde{s}_{n-2}=(c_{n-2}-\alpha_{n-2}\tilde{s}_{n-4}-g_{n-2}\tilde{s}_{n-3})/p_{n-2}\quad \tilde{t}_{n-2}=(\beta_{n-2}-\alpha_{n-2}\tilde{t}_{n-4}-g_{n-2}\tilde{t}_{n-3})/p_{n-2}$$

$$g_{n-1}=a_{n-1}-\alpha_{n-1}q_{n-3}\quad p_{n-1}=b_{n-1}-\alpha_{n-1}\tilde{s}_{n-3}-g_{n-1}\tilde{s}_{n-2}$$

$$\tilde{s}_{n-1}=\beta_{n-1}/p_{n-1}\quad \tilde{t}_{n-1}=(c_{n-1}-\alpha_{n-1}\tilde{t}_{n-3}-g_{n-1}\tilde{t}_{n-2})/p_{n-1}$$

$$g_n=a_n-\alpha_n\tilde{s}_{n-2}\quad p_n=b_n-\alpha_n\tilde{t}_{n-2}-g_n\tilde{t}_{n-1}$$

$$\tilde{t}_n=(c_n-g_n\tilde{s}_{n-1})/p_n\quad \tilde{s}_n=\beta_n/p_n$$

然后将 $\widetilde{U}$ 分解为

$$\widetilde{\boldsymbol{U}}=\boldsymbol{UD} \tag{4}$$

采用待定系数法：

$$s_i=\tilde{s}_i\quad t_i=\tilde{t}_i\quad (i=n-2,n-1,n)$$

$$s_{n-3}=\tilde{s}_{n-3}-q_{n-3}s_{n-2}\quad t_{n-3}=\tilde{t}_{n-3}-q_{n-3}t_{n-2}$$

$$s_i=\tilde{s}_i-h_i s_{i+2}-q_i s_{i+1}\quad t_i=\tilde{t}_i-h_i t_{i+2}-q_i t_{i+1}\quad (i=n-4,n-5,\cdots,1)$$

最后依次求解线性方程组：$\boldsymbol{Lz=f}$，$\boldsymbol{Uy=z}$，$\boldsymbol{Dx=y}$。

1）求解 $\boldsymbol{Lz=f}$。

$$z_1=f_1/p_1\quad z_2=(f_2-g_2z_1)/p_2$$

$$z_i=(f_i-\alpha_i z_{i-2}-g_i z_{i-1})/p_i\quad (i=3,4,\cdots,n)$$

2）求解 $\boldsymbol{Uy=z}$。

$$y_i=z_i\quad (i=n-2,n-1,n)$$

$$y_{n-3}=z_{n-3}-q_{n-3}y_{n-2}$$

$$y_i=z_i-q_i y_{i+1}-h_i y_{i+2}\quad (i=n-4,n-5,\cdots,1)$$

3）求解 $\boldsymbol{Dx=y}$。

先取其前两个方程和后两个方程：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & s_1 & t_1 \\ 0 & 1 & s_2 & t_2 \\ s_{n-1} & 0 & 1 & t_{n-1} \\ t_n & s_n & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

消元整理得

$$\begin{bmatrix}1-s_1s_{n-1} & t_{n-1}-t_1s_{n-1}\\ -s_1t_n-s_2s_n & 1-t_1t_n-t_2s_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_{n-1}-y_1s_{n-1}\\ y_n-y_1t_n-y_2s_n\end{bmatrix}$$

$$x_{n-1}=\frac{(y_{n-1}-y_1s_{n-1})(1-t_1t_n-t_2s_n)-(y_n-y_1t_n-y_2s_n)(t_{n-1}-t_1s_{n-1})}{(1-s_1s_{n-1})(1-t_1t_n-t_2s_n)+(s_1t_n+s_2s_n)(t_{n-1}-t_1s_{n-1})}$$

$$x_n=\frac{(1-s_1s_{n-1})(y_n-y_1t_n-y_2s_n)+(s_1t_n+s_2s_n)(y_{n-1}-y_1s_{n-1})}{(1-s_1s_{n-1})(1-t_1t_n-t_2s_n)+(s_1t_n+s_2s_n)(t_{n-1}-t_1s_{n-1})}$$

再依次求出

$$x_i=y_i-s_ix_{n-1}-t_ix_n\quad i=1,2,\cdots,n-2$$

至此,得出求解拟五对角线性方程组的新算法。

该算法运算量统计:乘除法 $O(23n)$,加减法 $O(16n)$,总的计算量为 $O(39n)$。文献[4]的五参数法运算量情况:乘除运算 $O(29n)$,加减运算 $O(20n)$,总的计算量为 $O(49n)$。通过比较,本文提出的算法在减小计算量方面具有明显的优势。

3 算法的数值稳定性

算法的数值稳定性归结于矩阵 L,U,D 的对角元之模大于同行各元素之模。根据上述的分解过程,可以得到以下 3 个结论。

定理 1 如果系数矩阵 A 是严格对角占优的,则 $\widetilde{U}$ 也是严格对角占优的。

证明 首先用归纳法证明 $|q_i|+|h_i|+|\tilde{s}_i|+|\tilde{t}_i|<1\ (i=1,2,\cdots,n-4)$。

当 $i=1$ 时,$|q_1|+|h_1|+|\tilde{s}_1|+|\tilde{t}_1|=(|c_1|+|\beta_1|+|\alpha_1|+|a_1|)/|b_1|<1$,结论成立。

归纳假定当 $1\leqslant i\leqslant n-4$ 时,结论均成立。那么,

$$|q_{i+1}|+|h_{i+1}|+|\tilde{s}_{i+1}|+|\tilde{t}_{i+1}|=\frac{|c_{i+1}-g_{i+1}h_i|+|\beta_{i+1}|+|\alpha_{i+1}\tilde{s}_{i-1}+g_{i+1}\tilde{s}_i|+|\alpha_{i+1}\tilde{t}_{i-1}+g_{i+1}\tilde{t}_i|}{|p_{i+1}|}$$

$$\leqslant\frac{|c_{i+1}|+|\beta_{i+1}|+|g_{i+1}|(|h_i|+|\tilde{s}_i|+|\tilde{t}_i|)+|\alpha_{i+1}|(|\tilde{s}_{i-1}|+|\tilde{t}_{i-1}|)}{|b_{i+1}-\alpha_{i+1}h_{i-1}-g_{i+1}q_i|}$$

$$\leqslant\frac{|c_{i+1}|+|\beta_{i+1}|+(|a_{i+1}|+|\alpha_{i+1}||q_{i-1}|)(|h_i|+|\tilde{s}_i|+|\tilde{t}_i|)+|\alpha_{i+1}|(|\tilde{s}_{i-1}|+|\tilde{t}_{i-1}|)}{|b_{i+1}|-|\alpha_{i+1}|(|h_{i-1}|+|q_{i-1}||q_i|)-|a_{i+1}||q_i|}$$

$$=\frac{|c_{i+1}|+|\beta_{i+1}|+|a_{i+1}|(|h_i|+|\tilde{s}_i|+|\tilde{t}_i|)+|\alpha_{i+1}|(|\tilde{s}_{i-1}|+|\tilde{t}_{i-1}|+|q_{i-1}|(|h_i|+|\tilde{s}_i|+|\tilde{t}_i|))}{|b_{i+1}|-|a_{i+1}||q_i|-|\alpha_{i+1}|(|h_{i-1}|+|q_{i-1}||q_i|)}$$

$$<\frac{|c_{i+1}|+|\beta_{i+1}|+|a_{i+1}|(1-|q_i|)+|\alpha_{i+1}|(1-|h_{i-1}|-|q_{i-1}||q_i|)}{|c_{i+1}|+|\beta_{i+1}|+|a_{i+1}|(1-|q_i|)+|\alpha_{i+1}|(1-|h_{i-1}|-|q_{i-1}||q_i|)}=1$$

再单独证明 $|q_{n-3}|+|\tilde{s}_{n-3}|+|\tilde{t}_{n-3}|<1$,$|\tilde{s}_{n-2}|+|\tilde{t}_{n-2}|<1$,$|\tilde{s}_{n-1}|+|\tilde{t}_{n-1}|<1$,$|\tilde{s}_n|+|\tilde{t}_n|<1$。事实上,

$$|q_{n-3}|+|\tilde{s}_{n-3}|+|\tilde{t}_{n-3}|$$

$$=\frac{|c_{n-3}-g_{n-3}h_{n-4}|+|\beta_{n-3}-\alpha_{n-3}\tilde{s}_{n-5}-g_{n-3}\tilde{s}_{n-4}|+|\alpha_{n-3}\tilde{t}_{n-5}+g_{n-3}\tilde{t}_{n-4}|}{|b_{n-3}-\alpha_{n-3}h_{n-5}-g_{n-3}q_{n-4}|}$$

$$<\frac{|c_{n-3}|+|\beta_{n-3}|+|\alpha_{n-3}|(|\tilde{s}_{n-5}|+|\tilde{t}_{n-5}|)+|g_{n-3}|(1-|q_{n-4}|)}{|b_{n-3}|-|\alpha_{n-3}||h_{n-5}|-|g_{n-3}||q_{n-4}|}$$

$$\leqslant\frac{|c_{n-3}|+|\beta_{n-3}|+|\alpha_{n-3}|(|\tilde{s}_{n-5}|+|\tilde{t}_{n-5}|+|q_{n-5}|(1-|q_{n-4}|))+|a_{n-3}|(1-|q_{n-4}|)}{|b_{n-3}|-|\alpha_{n-3}|(|h_{n-5}|+|q_{n-5}||q_{n-4}|)-|a_{n-3}||q_{n-4}|}$$

$$<\frac{|c_{n-3}|+|\beta_{n-3}|+|\alpha_{n-3}|(1-|h_{n-5}|-|q_{n-5}||q_{n-4}|)+|a_{n-3}|(1-|q_{n-4}|)}{|c_{n-3}|+|\beta_{n-3}|+|\alpha_{n-3}|(1-|h_{n-5}|-|q_{n-5}||q_{n-4}|)+|a_{n-3}|(1-|q_{n-4}|)}=1$$

$$|\tilde{s}_{n-2}|+|\tilde{t}_{n-2}|=\frac{|c_{n-2}-\alpha_{n-2}\tilde{s}_{n-4}-g_{n-2}\tilde{s}_{n-3}|+|\beta_{n-2}-\alpha_{n-2}\tilde{t}_{n-4}-g_{n-2}\tilde{t}_{n-3}|}{|b_{n-2}-\alpha_{n-2}h_{n-4}-g_{n-2}q_{n-3}|}$$

$$<\frac{|c_{n-2}|+|\beta_{n-2}|+|\alpha_{n-2}|(|\tilde{s}_{n-4}|+|\tilde{t}_{n-4}|)+|g_{n-2}|(1-|q_{n-3}|)}{|b_{n-2}|-|\alpha_{n-2}||h_{n-4}|-|g_{n-2}||q_{n-3}|}$$

$$\leqslant\frac{|c_{n-2}|+|\beta_{n-2}|+|\alpha_{n-2}|(|\tilde{s}_{n-4}|+|\tilde{t}_{n-4}|+|q_{n-4}|-|q_{n-4}||q_{n-3}|)+|a_{n-2}|(1-|q_{n-3}|)}{|c_{n-2}|+|\beta_{n-2}|+|\alpha_{n-2}|(1-|h_{n-4}|-|q_{n-4}||q_{n-3}|)+|a_{n-2}|(1-|q_{n-3}|)}$$

$$<\frac{|c_{n-2}|+|\beta_{n-2}|+|\alpha_{n-2}|(1-|h_{n-4}|-|q_{n-4}||q_{n-3}|)+|a_{n-2}|(1-|q_{n-3}|)}{|c_{n-2}|+|\beta_{n-2}|+|\alpha_{n-2}|(1-|h_{n-4}|-|q_{n-4}||q_{n-3}|)+|a_{n-2}|(1-|q_{n-3}|)}=1$$

$$|\tilde{s}_{n-1}|+|\tilde{t}_{n-1}|=\frac{|\beta_{n-1}|+|c_{n-1}-\alpha_{n-1}\tilde{t}_{n-3}-g_{n-1}\tilde{t}_{n-2}|}{|b_{n-1}-\alpha_{n-1}\tilde{s}_{n-3}-g_{n-1}\tilde{s}_{n-2}|}$$

$$\leqslant\frac{|\beta_{n-1}|+|c_{n-1}|+|\alpha_{n-1}||\tilde{t}_{n-3}|+|g_{n-1}||\tilde{t}_{n-2}|}{|b_{n-1}|-|\alpha_{n-1}||\tilde{s}_{n-3}|-|g_{n-1}||\tilde{s}_{n-2}|}$$

$$\leqslant\frac{|\beta_{n-1}|+|c_{n-1}|+|\alpha_{n-1}|(|\tilde{t}_{n-3}|+|q_{n-3}||\tilde{t}_{n-2}|)+|a_{n-1}||\tilde{t}_{n-2}|}{|b_{n-1}|-|\alpha_{n-1}|(|\tilde{s}_{n-3}|+|q_{n-3}||\tilde{s}_{n-2}|)-|a_{n-1}||\tilde{s}_{n-2}|}$$

$$<\frac{|\beta_{n-1}|+|c_{n-1}|+|\alpha_{n-1}|(1-|\tilde{s}_{n-3}|-|q_{n-3}||\tilde{s}_{n-2}|)+|a_{n-1}|(1-|\tilde{s}_{n-2}|)}{|\beta_{n-1}|+|c_{n-1}|+|\alpha_{n-1}|(1-|\tilde{s}_{n-3}|-|q_{n-3}||\tilde{s}_{n-2}|)+|a_{n-1}|(1-|\tilde{s}_{n-2}|)}=1$$

$$|\tilde{t}_n|+|\tilde{s}_n|=\frac{|c_n-g_n\tilde{s}_{n-1}|+|\beta_n|}{|b_n-\alpha_n\tilde{t}_{n-2}-g_n\tilde{t}_{n-1}|}\leqslant\frac{|c_n|+|\beta_n|+|a_n||\tilde{s}_{n-1}|+|\alpha_n||\tilde{s}_{n-2}||\tilde{s}_{n-1}|}{|b_n|-|\alpha_n|(|\tilde{t}_{n-2}|+|\tilde{s}_{n-2}||\tilde{t}_{n-1}|)-|a_n||\tilde{t}_{n-1}|}$$

$$<\frac{|c_n|+|\beta_n|+|a_n|(1-|\tilde{t}_{n-1}|)+|\alpha_n|(1-|\tilde{t}_{n-2}|-|\tilde{s}_{n-2}||\tilde{t}_{n-1}|)}{|c_n|+|\beta_n|+|\alpha_n|(1-|\tilde{t}_{n-2}|-|\tilde{s}_{n-2}||\tilde{t}_{n-1}|)+|a_n|(1-|\tilde{t}_{n-1}|)}=1$$

证毕。

定理 1 的结论不仅保证了 $Uy=z$ 求解的数值稳定性,同时也是证明以下两个定理结论的重要依据。

定理 2 如果系数矩阵 A 是严格对角占优的,且 $2(|\alpha_i|+|a_i|)\leqslant|b_i|$,则

1) $|\alpha_i|\leqslant|p_i|\ (i=3,4,\cdots,n)$;

2) $|g_i|\leqslant|p_i|\ (i=2,3,\cdots,n)$。

证明 由于 $|b_2|-|g_2|=|b_2-g_2q_1|-|g_2|\geqslant|b_2|-|a_2|(1+|q_1|)>|b_2|-2|a_2|\geqslant0$,有 $|g_2|<|p_2|$。

根据定理的条件假设和定理 1 的结论,对于 $3\leqslant i\leqslant n-2$,有

$$|p_i|-|\alpha_i|=|b_i-\alpha_ih_{i-2}-g_iq_{i-1}|-|\alpha_i|=|b_i-\alpha_ih_{i-2}-a_iq_{i-1}+\alpha_iq_{i-2}q_{i-1}|-|\alpha_i|$$
$$\geqslant|b_i|-|a_i||q_{i-1}|-|\alpha_i|(1+|h_{i-2}|+|q_{i-2}||q_{i-1}|)>|b_3|-|a_3|-2|\alpha_3|\geqslant0$$

$$|p_i|-|g_i|=|b_i-\alpha_ih_{i-2}-g_iq_{i-1}|-|g_i|=|b_i-\alpha_ih_{i-2}-a_iq_{i-1}+\alpha_iq_{i-2}q_{i-1}|-|a_i-\alpha_iq_{i-2}|$$
$$\geqslant|b_i|-|\alpha_i|(|h_{i-2}|+|q_{i-2}q_{i-1}|+|q_{i-2}|)-|a_i|(1+|q_{i-1}|)>|b_i|-|\alpha_i|-2|a_i|\geqslant0$$

同样地,

$$|p_{n-1}|-|\alpha_{n-1}|=|b_{n-1}-\alpha_{n-1}(\tilde{s}_{n-3}-q_{n-3}\tilde{s}_{n-2})-a_{n-1}\tilde{s}_{n-2}|-|\alpha_{n-1}|$$
$$\geqslant|b_{n-1}|-|\alpha_{n-1}|(1+|\tilde{s}_{n-3}|+|q_{n-3}||\tilde{s}_{n-2}|)-|a_{n-1}||\tilde{s}_{n-2}|$$
$$>|b_{n-1}|-2|\alpha_{n-1}|-|a_{n-1}|\geqslant0$$

$$|p_{n-1}|-|g_{n-1}|\geqslant|b_{n-1}|-|\alpha_{n-1}||\tilde{s}_{n-3}|-|g_{n-1}|(1+|\tilde{s}_{n-2}|)$$
$$\geqslant|b_{n-1}|-|\alpha_{n-1}|(|\tilde{s}_{n-3}|+|q_{n-3}|+|q_{n-3}||\tilde{s}_{n-2}|)-|a_{n-1}|(1+|\tilde{s}_{n-2}|)$$
$$>|b_{n-1}|-2|\alpha_{n-1}|-2|a_{n-1}|\geqslant0$$

$$|p_n|-|\alpha_n|=|b_n-\alpha_n\tilde{t}_{n-2}-a_n\tilde{t}_{n-1}+\alpha_n\tilde{s}_{n-2}\tilde{t}_{n-1}|-|\alpha_n|$$
$$\geqslant|b_n|-|\alpha_n|(1+|\tilde{t}_{n-2}|+|\tilde{s}_{n-2}||\tilde{t}_{n-1}|)-|a_n||\tilde{t}_{n-1}|$$
$$>|b_n|-2|\alpha_n|-|a_n|\geqslant0$$

$$|p_n|-|g_n|\geqslant|b_n|-|\alpha_n||\tilde{t}_{n-2}|-|g_n|(1+|\tilde{t}_{n-1}|)\geqslant|b_n|-|\alpha_n||\tilde{t}_{n-2}|-|a_n-\alpha_n\tilde{s}_{n-2}|(1+|\tilde{t}_{n-1}|)$$
$$\geqslant|b_n|-|\alpha_n|(|\tilde{t}_{n-2}|+|\tilde{s}_{n-2}|+|\tilde{s}_{n-2}||\tilde{t}_{n-1}|)-|a_n|(1+|\tilde{t}_{n-1}|)>|b_n|-2|\alpha_n|-2|a_n|\geqslant0$$

证毕。

定理 2 保证了求解 $Lz=f$ 的数值稳定性。

定理 3 如果拟五对角矩阵 A 是严格对角占优的，则拟对角矩阵 D 也是对角占优的。

证明 根据式(4)的分解计算过程和定理 1 的结论，可用归纳法证明拟对角矩阵 D 是严格对角占优的。由于 $s_i=\tilde{s}_i, t_i=\tilde{t}_i$ $(i=n-2, n-1, n)$，有

$$|s_i|+|t_i|=|\tilde{s}_i|+|\tilde{t}_i|<1 \quad (i=n-2, n-1, n)$$

则当 $n-2\geqslant i>1$ 时，

$$\begin{aligned}|s_{i-1}|+|t_{i-1}|&=|\tilde{s}_{i-1}-h_{i-1}s_{i+1}-q_{i-1}s_i|+|\tilde{t}_{i-1}-h_{i-1}t_{i+1}-q_{i-1}t_i|\\&\leqslant|\tilde{s}_{i-1}|+|\tilde{t}_{i-1}|+|h_{i-1}|(|s_{i+1}|+|t_{i+1}|)+|q_{i-1}|(|s_i|+|t_i|)\\&<|\tilde{s}_{i-1}|+|\tilde{t}_{i-1}|+|h_{i-1}|+|q_{i-1}|<1\end{aligned}$$

证毕。

定理 3 保证了求解 $Dx=y$ 的数值稳定性。

4 数值实验

利用紧致差分格式对一阶导数进行差分离散[3]，一般公式可以写成如下形式[1-2]:

$$\beta f'_{i-2}+\alpha f'_{i-1}+f'_i+\alpha f'_{i+1}+\beta f'_{i+2}=c\frac{f_{i+3}-f_{i-3}}{6h}+b\frac{f_{i+2}-f_{i-2}}{4h}+a\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h}$$

当系数 $\beta=1/20, \alpha=1/2, a=17/12, b=101/150, c=1/100$ 时，精度可达到 10 阶。

例 设 $f(x)=\sin x$，等距剖分区间 $[0, 2\pi]$: $h=2\pi/n, x_i=ih$ $(i=0, 1, 2, \cdots, n)$。对应函数值为 $f_i=f(x_i)$ $(i=0, 1, \cdots, n)$，用紧致差分格式计算导函数值 $f'_i=f'(x_i)$ $(i=0, 1, 2, \cdots, n)$。

显然函数具有周期性边界条件: $f_i=f_{n+i}$ $(i=-2, -1, 0, 1, 2, 3)$，$f'_i=f'_{n+i}$ $(i=-1, 0, 1, 2)$，差分方程可写为

$$\begin{bmatrix}1&\alpha&\beta&&&\beta&\alpha\\\alpha&1&\alpha&\beta&&&\beta\\\beta&\alpha&1&\alpha&\beta&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&\beta&\alpha&1&\alpha&\beta\\\beta&&&\beta&\alpha&1&\alpha\\\alpha&\beta&&&\beta&\alpha&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f'_1\\f'_2\\f'_3\\\vdots\\f'_{n-2}\\f'_{n-1}\\f'_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\d_3\\\vdots\\d_{N-2}\\d_{N-1}\\d_N\end{bmatrix}$$

其中，$d_i=c\frac{f_{i+3}-f_{i-3}}{6h}+b\frac{f_{i+2}-f_{i-2}}{4h}+a\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$。

数值试验的平台是曙光天阔 W560I 工作站(CPU 为 Intel Xeron 2.33GHz，内存 4GB)，操作系统为 Windows Server 2003，使用 Fortran 语言编程，数据类型为双精度浮点型。计算结果如表 1 所示。

表 1 拟五对角方程组的求解时间

Table 1 Computational time of sovleing quasi-pentadiagonal linear equations

方程组阶数/10^6	1	2	4	6	8	10	12
本算法时间 t_1/s	2.2813	4.5781	9.1875	13.750	18.375	22.938	27.516

采用该算法对不同阶数的方程组进行求解，计算时间如图 1 所示。由图 1 可清楚地看出，算法的计算时间与方程组阶数 n 呈线性关系，与理论分析的算术运算量 $O(39n)$ 完全吻合。

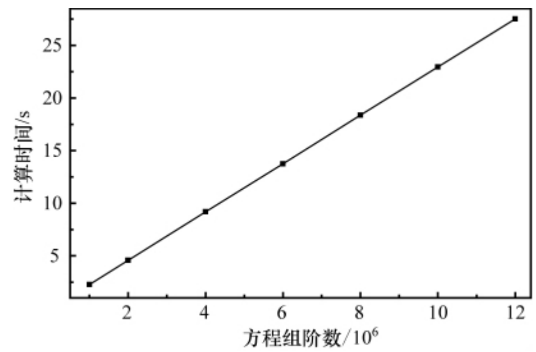

图 1 计算时间(CPU time)随方程组阶数的变化情况

Fig. 1 Computational time (CPU time) as a function of the equations order

5 结论

本文针对科学与工程计算中经常出现的拟五对角线性方程组，沿用传统的 LU 分解的基本思想，将拟五对角线性方程组的系数矩阵 A 分解成 3 个矩阵的乘积 LUD，从而将求解拟五对角线性方程组的问题转化成求解 3 个简单线性方程组的问题。与传统的 LU 算法相比，虽然本文算法分解后增加了一个矩阵 D，但恰恰简化了分解过程的复杂度，同时矩阵 D 非常简单，使求解拟五对角线性方程组的过程只需要先"追"后"赶"再回代。本算法总的运算量仅为 $O(39n)$，是目前已有算法中运算量比较小的。数值实验结果表明，在普通计算机上，在几秒或几十秒的时间内，可以快速求解一个百万阶的拟五对角线性方程组。

参考文献(References)

[1] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution [J]. *Journal of Computational Physics*, 103: 16-42.

[2] Santhanam N, Lele S K, Ferziger J H. A robust high-order compact method for large eddy simulation [J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, 191: 392-419

[3] 王礼广, 蔡放, 熊岳山. 五对角线性方程组追赶法 [J]. 南华大学学报: 自然科学版, 2008, 22(1): 1-4.
Wang Liguang, Cai Fang, Xiong Yueshan. *Journal of University of South China: Natural Science Edition*, 2008, 22(1): 1-4.

[4] 王晶昕, 薛静. 用五参数法求解拟五对角方程组 [J]. 吉林师范大学学报: 自然科学版, 2008, 29(2): 5-9.
Wang Jingxin, Xue Jing. *Jilin Normal University Journal: Natural Science Edition*, 2008, 29(2): 5-9.

[5] 李文强, 刘晓. 追赶法并行求解循环三对角方程组[J]. 科技导报, 2009, 27(18): 90-93.
Li Wenqiang, Liu Xiao. *Science & Technology Review*, 2009, 27(18): 90-93.

(责任编辑 代丽)