聚集数据线性模型参数聚集 Liu 估计的相对效率

周永正

景德镇陶瓷学院信息工程学院,江西景德镇 333403

摘要　当线性模型中的变量间存在复共线性时,常用有偏估计代替无偏估计。其中广义岭估计是研究较多的一种有偏估计。很多实际问题只能观测到聚集数据。本文给出了聚集数据线性模型聚集 Liu 估计的定义,提出了聚集 Liu 估计相对于最小二乘估计的两种相对效率,并得到这两种相对效率的上界;给出了聚集 Liu 估计相对于 Peter-Karsten 估计的 2 种相对效率及其上界。本文提出的聚集 Liu 估计,既能保证估计参数的稳定性,又能保证估计参数的近似无偏性,从这个意义上说,该估计在某种程度上优于聚集广义岭估计。

关键词　聚集数据;线性模型;聚集 Liu 估计;相对效率

中图分类号　O212.1　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1000-7857(2010)18-0064-04

Relative Efficiencies of the Aggregated Liu Estimators of the Parameters in a Linear Model with Aggregated Date

ZHOU Yongzheng

College of Information Engineering, Jingdezhen Ceramic Institute, Jingdezhen 333403, Jiangxi Province, China

Abstract　The least squares estimation is widely used in linear models. However, in the least squares estimation, the square error may be great, when there are a multiple collinearity between variables. To solve this problem, it is suggested that, instead of an unbiased estimate, a biased estimate is used. As a biased estimate, the generalized ridge estimate is an estimate in a wide use. In many practical problems, aggregated data can be observed. For a linear model with aggregated data, the definition of aggregated Liu estimates is given in this paper. The Liu estimates with respect to two relative efficiencies of the least squares estimation are proposed and the upper bounds for the two relative efficiencies are obtained. This paper also gives the aggregated Liu estimates relative to Peter-Karsten estimates for two relative efficiencies and their upper bounds. The aggregation of generalized ridge estimates was often said to reduce the mean square error, and the stability of estimated parameters was emphasized, ignoring the non-bias effect of the estimated parameters. Aggregated Liu estimates, presented in this paper, with the introduction of new parameters, can not only guarantee the stability of estimated parameters, but also ensure the approximate unbiasedness of the estimated parameters. In this sense, they are better than the aggregated generalized ridge estimates.

Keyworks　aggregated data; the linear model; aggregated Liu estimates; relative efficiencies

0　引言

考虑线性模型:

$$\begin{cases} Y=X\beta+e \\ E(e)=0,\ \mathrm{var}(e)=\sigma^2 I_n \end{cases} \tag{1}$$

其中,Y 为 $n\times1$ 观测向量,X 为 $n\times p$ 列满秩设计矩阵,β 为 $p\times1$ 未知参数向量,e 为 $n\times1$ 随机误差向量,$E(e)$为对 e 求数学期望;I_n 为 n 阶单位矩阵,σ^2 为误差方差,未知,$n\geqslant p$。

事实上,模型(1)中参数 β 的最小二乘估计为[1]

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y \tag{2}$$

$\hat{\beta}$是参数 β 的最佳线性无偏估计。当 $X'X$ 的一个特征根接近 0

收稿日期:2010-03-29;**修回日期**:2010-09-07

基金项目:国家自然科学基金项目(60940016);江西省教育厅科学技术研究项目(GJJ08321)

作者简介:周永正,教授,研究方向为统计建模及参数估计,电子信箱:zhyzh_ty@163.com

时,$\hat{\beta}$的均方误差将会很大。为此,提出了有偏估计的概念,如岭估计、广义岭估计[1]等,以减少均方误差。1993 年,Liu[2]提出了一个新的有偏估计,即 Liu 估计:

$$\hat{\beta}(d)=(X'X+I)^{-1}(X'X+dI)\hat{\beta} \tag{3}$$

其中 d 为(0,1)之间的常数。

岭估计方法片面强调估计参数的稳定性,忽视了估计参数的无偏性影响,有时使估计参数的均值较大地偏离实际值。Liu 估计通过引入新的参数,既能保证估计参数的稳定性,又能保证估计参数的近似无偏性。

在很多实际问题中,只能观测到 Y 的部分分量,或 Y 的某些线性组合,一般称因变量 Y 的这种数据为聚集数据。如抽样调查、生物统计及一般线性模型的缺失值等问题都可归结为这种情形。一般说来,可观测到向量 Z,

$$Z=TY \tag{4}$$

其中 T 为已知 n 阶方阵。Peter 和 Karsten[3]提出估计:

$$\tilde{\beta}=(X'T'TX)^{-1}X'T'TY \tag{5}$$

并在 $\mathrm{rank}(T)=q\geqslant p$ 且 T 对称幂等条件下,证明了式(5)具有某种优良性。易知$\tilde{\beta}$是 β 的无偏估计。黄养新、万仲平[4]研究了式(5)中$\tilde{\beta}$对于最小二乘估计$\hat{\beta}$的效率。

当设计矩阵呈病态,即 $X'T'TX$ 的一个特征根接近于零时,$\tilde{\beta}$的均方误差很大,不能认为$\tilde{\beta}$是 β 的良好估计。因此,需对$\tilde{\beta}$进行改进,以减少均方误差。本文提出聚集数据线性模型参数的聚集 Liu 估计 $\beta^*(d)$。用 $\beta^*(d)$代替 β 的最佳线性无偏估计$\hat{\beta}$,估计的精度会下降,为了度量精度损失大小,研究 β 的估计量$\tilde{\theta}$代替$\hat{\beta}$的两种相对效率:

$$e_1(\tilde{\theta},\hat{\beta})=\left[\frac{\mathrm{tr}(\mathrm{cov}\hat{\beta})^q}{\mathrm{tr}(M(\tilde{\theta}))^q}\right]^{1/q} \tag{6}$$

$$e_2(\tilde{\theta},\hat{\beta})=\sqrt{\mathrm{tr}[(\mathrm{cov}\hat{\beta})'H(\mathrm{cov}\hat{\beta})]/\mathrm{tr}[(M(\tilde{\theta}))'H(M(\tilde{\theta}))]} \tag{7}$$

式(6)为推广的欧氏模意义下的效率,式(7)为加权欧氏模意义下的效率,式中 $M(\tilde{\theta})$为$\tilde{\theta}$的均方误差矩阵。

本文记 $\lambda_i(A)$为方阵 A 的第 i 个顺序特征根,得到了利用 $\beta^*(d)$代替最佳线性无偏估计$\hat{\beta}$的效率上界。

1 定义与引理

定义 1 在模型(1)和条件(4)下,未知参数 β 的估计:

$$\beta^*(d)=(X'T'TX+I)^{-1}(X'T'TX+dI)(X'T'TX)^{-1}X'T'TY \tag{8}$$

式(8)称为聚集数据下线性模型参数 β 的聚集 Liu 估计,其中 d 为(0,1)之间的常数。

引理 1[5] 记 $\Delta=\mathrm{diag}(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)$,$\delta_1\geqslant\delta_2\geqslant\cdots\geqslant\delta_p>0$,$A_{n\times n}>0$,$U$ 为 $n\times p$ 矩阵,则

1) $$\max_{UU'=\Delta}\mathrm{tr}(U'AU)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i(A)\delta_i \tag{9}$$

2) $$\max_{UU'=\Delta}\mathrm{tr}(U'AU)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_{n-i+1}(A)\delta_i \tag{10}$$

证明见文献[5]。

引理 2[6] 设 A、B 为 n 阶实对称矩阵,且 $B\geqslant 0$,则有

$$\lambda_n(B)\lambda_i(A^2)\leqslant\lambda_i(ABA)\leqslant\lambda_1(B)\lambda_i(A^2)\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{11}$$

证明见文献[6]。

引理 3[7] 设 A 为 $p\times p$ 阶正定方阵,则有

$$p^{1-q}(\mathrm{tr}A)^q\leqslant\mathrm{tr}(A^q)\leqslant(\mathrm{tr}A)^q\qquad(q\geqslant 1) \tag{12}$$

证明见文献[7]。

2 聚集 Liu 估计相对于最小二乘估计的效率

模型(1)和条件(4)下,估计 $\beta^*(d)$代替 β 的最佳线性无偏估计$\hat{\beta}$在推广欧氏模意义下的效率上界见定理 1。

定理 1 设 n 阶矩阵 T 的秩 $\mathrm{rank}(T)=p$,$\delta_1\geqslant\delta_2\geqslant\cdots\geqslant\delta_p>0$ 为 $X'X$ 的特征根,$h_1\geqslant h_2\geqslant\cdots\geqslant h_p>0$ 为 TT' 的特征根,$r_1\geqslant r_2\geqslant\cdots\geqslant r_p>0$ 为 $X'T'TX$ 的特征根,$0<d<1$,则

$$e_1(\beta^*(d),\hat{\beta})\leqslant\frac{p^{1-\frac{1}{q}}\cdot r_1\cdot(r_1+1)^2\cdot\sum_{i=1}^{p}\delta_i^{-1}}{\sum_{i=1}^{p}h_{n-i+1}\cdot(r_i+d)^2} \tag{13}$$

证明 由于 $\beta^*(d)$是 β 的有偏估计,由 $e_1(\beta^*(d),\hat{\beta})$的定义,可得

$$\begin{aligned}e_1^q(\beta^*(d),\hat{\beta})=&\frac{\mathrm{tr}(\mathrm{cov}\hat{\beta})^q}{\mathrm{tr}[M(\beta^*(d))]^q}=\mathrm{tr}[(X'X)^{-1}]^q/\{\mathrm{tr}[(X'T'TX+I)^{-1}\cdot\\&(X'T'TX+dI)\cdot(X'T'TX)^{-1}\cdot X'T'TT'TX\cdot(X'T'TX)^{-1}\cdot\\&(X'T'TX+dI)\cdot(X'T'TX+I)^{-1}+\sigma^{-2}\varepsilon\varepsilon']^q\}\end{aligned}$$

其中,$M(\beta^*(d))$为 β 的估计 $\beta^*(d)$的均方误差矩阵,$\varepsilon=E\beta^*(d)-\beta$。

设 $B=(X'X)^{-1}$,

$$\begin{aligned}C=&(X'T'TX+I)^{-1}(X'T'TX+dI)(X'T'TX)^{-1}X'T'TT'TX(X'T'TX)^{-1}\cdot\\&(X'T'TX+dI)(X'T'TX+I)^{-1}\end{aligned}$$

由引理 3 可知,

$$\mathrm{tr}(B^q)\leqslant[\mathrm{tr}(B)]^q=[\mathrm{tr}(X'X)^{-1}]^q=\left(\sum_{i=1}^{p}\delta_i^{-1}\right)^q$$

$$\mathrm{tr}(C+\sigma^{-2}\varepsilon\varepsilon')^q\geqslant\mathrm{tr}C^q\geqslant p^{1-q}(\mathrm{tr}C)^q$$

又设 $V=TX(X'T'TX)^{-1}(X'T'TX+dI)(X'T'TX+I)^{-1}Q$,其中 Q 为正交矩阵,且 $Q'X'T'TXQ=\Lambda$,

$$\begin{aligned}V'V=&Q'(X'T'TX+I)^{-1}(X'T'TX+dI)(X'T'TX)^{-1}X'T'TX(X'T'TX)^{-1}\cdot\\&(X'T'TX+dI)(X'T'TX+I)^{-1}Q\\=&Q'(X'T'TX+I)^{-1}QQ'(X'T'TX+dI)QQ'(X'T'TX)^{-1}\cdot\\&QQ'(X'T'TX+dI)\cdot QQ'(X'T'TX+I)^{-1}Q\\=&(\Lambda+I)^{-1}(\Lambda+dI)^{-1}(\Lambda+dI)(\Lambda+I)^{-1}\\=&\mathrm{diag}[(r_1+1)^{-2}\cdot r_1^{-1}\cdot(r_1+d)^2,\cdots,(r_i+1)^{-2}\cdot r_i^{-1}\cdot(r_i+d)^2,\cdots,(r_p+1)^{-2}\cdot r_p^{-1}\cdot(r_p+d)^2]\end{aligned}$$

又由引理 1、引理 2 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(C)=&\mathrm{tr}(Q'CQ)\\=&\mathrm{tr}[Q'(X'T'TX+I)^{-1}(X'T'TX+dI)(X'T'TX)^{-1}X'T'TT'TX\cdot\\&(X'T'TX)^{-1}(X'T'TX+dI)(X'T'TX+I)^{-1}Q]\end{aligned}$$

$$\geqslant \min_{V'V=(\Lambda+I)^{-1}(\Lambda+dI)\Lambda^{-1}(\Lambda+dI)(\Lambda+I)^{-1}} \mathrm{tr}(V'TT'V)$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\lambda_{n-i+1}(TT')\cdot\lambda_i[(\Lambda+I)^{-1}(\Lambda+dI)\Lambda^{-1}(\Lambda+dI)(\Lambda+I)^{-1}]$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{p}\lambda_{n-i+1}(TT')\cdot\lambda_p(\Lambda^{-1})\cdot\lambda_i[(\Lambda+dI)(\Lambda+I)^{-2}(\Lambda+dI)]$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{p}\lambda_{n-i+1}(TT')\lambda_p(\Lambda^{-1})\lambda_p((\Lambda+I)^{-2})\lambda_i((\Lambda+dI)^2)$$

$$=\sum_{i=1}^{p}h_{n-i+1}\cdot r_1^{-1}(r_1+1)^{-2}\cdot(r_i+d)^2$$

$$=r_1^{-1}(r_1+1)^{-2}\cdot\sum_{i=1}^{p}h_{n-i+1}\cdot(r_i+d)^2$$

从而有

$$e_1^q(\boldsymbol{\beta}^*(d),\hat{\boldsymbol{\beta}})=\mathrm{tr}(B^q)/\mathrm{tr}(C+\sigma^{-2}\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')^q\leqslant\frac{p^{q-1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{p}\delta_i^{-1}\right)^q}{\left[r_1^{-1}(r_1+1)^{-2}\cdot\sum_{i=1}^{p}h_{n-i+1}\cdot(r_i+d)^2\right]^q}$$

故有

$$e_1(\boldsymbol{\beta}^*(d),\hat{\boldsymbol{\beta}})\leqslant\frac{p^{1-\frac{1}{q}}\cdot r_1\cdot(r_1+1)^2\cdot\sum_{i=1}^{p}\delta_i^{-1}}{\sum_{i=1}^{p}h_{n-i+1}\cdot(r_i+d)^2}$$

证毕。

在模型(1)和条件(4)下,估计$\boldsymbol{\beta}^*(d)$代替$\boldsymbol{\beta}$的最小二乘估计$\hat{\boldsymbol{\beta}}$在加权欧氏模意义下的效率上界见定理2。

定理2 设n阶矩阵T的秩$\mathrm{rank}(T)=p$, $\delta_1\geqslant\delta_2\geqslant\cdots\geqslant\delta_p>0$为$X'X$的特征根,$h_1\geqslant h_2\geqslant\cdots\geqslant h_p>0$为$TT'$的特征根,$r_1\geqslant r_2\geqslant\cdots\geqslant r_p>0$为$X'T'TX$的特征根,$q_1\geqslant q_2\geqslant\cdots\geqslant q_p>0$为$H$的特征根,$0<d<1$,则

$$e_2(\boldsymbol{\beta}^*(d),\hat{\boldsymbol{\beta}})\leqslant\frac{\sqrt{pq_1}\cdot r_1\cdot(r_1+1)^2\cdot\left(\sum_{i=1}^{p}\delta_i^{-1}\right)}{\sqrt{q_p}\cdot\sum_{i=1}^{p}h_{n-i+1}\cdot(r_i+d)^2}\tag{14}$$

证明 由$e_2(\boldsymbol{\beta}^*(d),\hat{\boldsymbol{\beta}})$的定义,可得

$$e_2(\boldsymbol{\beta}^*(d),\hat{\boldsymbol{\beta}})=\sqrt{\mathrm{tr}(\mathrm{cov}\hat{\boldsymbol{\beta}})'H(\mathrm{cov}\hat{\boldsymbol{\beta}})/\mathrm{tr}[(M(\boldsymbol{\beta}^*(d)))'H(M(\boldsymbol{\beta}^*(d)))]}$$

$$\mathrm{tr}[(\mathrm{cov}\hat{\boldsymbol{\beta}})'H(\mathrm{cov}\hat{\boldsymbol{\beta}})]=\sigma^4\mathrm{tr}[(X'X)^{-1}H(X'X)^{-1}]$$

又因

$$\begin{aligned}M(\boldsymbol{\beta}^*(d))&=\mathrm{cov}\boldsymbol{\beta}^*(d)+\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}'\\&=\sigma^2[(X'T'TX+I)^{-1}(X'T'TX+dI)(X'T'TX)^{-1}X'T'TT'TX\cdot\\&\quad(X'T'TX)^{-1}(X'T'TX+dI)(X'T'TX+I)^{-1}+\sigma^{-2}\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}']\cdot\\&\quad\mathrm{tr}[(M(\boldsymbol{\beta}^*(d)))'H(M(\boldsymbol{\beta}^*(d)))]\\&=\sigma^4\mathrm{tr}\{[(X'T'TX+I)^{-1}(X'T'TX+dI)(X'T'TX)^{-1}X'T'TT'TX\cdot\\&\quad(X'T'TX)^{-1}(X'T'TX+dI)(X'T'TX+I)^{-1}+\sigma^{-2}\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}']H\cdot\\&\quad[(X'T'TX+I)^{-1}(X'T'TX+dI)(X'T'TX)^{-1}X'T'TT'TX\cdot\\&\quad(X'T'TX)^{-1}(X'T'TX+dI)(X'T'TX+I)^{-1}+\sigma^{-2}\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}']\}\end{aligned}$$

令$B=(X'X)^{-1}$,

$$\begin{aligned}C=&(X'T'TX+I)^{-1}(X'T'TX+dI)(X'T'TX)^{-1}X'T'TT'TX\cdot\\&(X'T'TX)^{-1}(X'T'TX+dI)(X'T'TX+I)^{-1}\end{aligned}$$

$$e_2^2(\boldsymbol{\beta}^*(d),\hat{\boldsymbol{\beta}})=\frac{\mathrm{tr}(BHB)}{\mathrm{tr}[(C+\sigma^{-2}\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')H(C+\sigma^{-2}\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')]}$$

设P为正交矩阵,使$P\cdot\mathrm{diag}(q_1,q_2,\cdots,q_p)\cdot P'=H$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(BHB)&=\mathrm{tr}(B^2H)=\mathrm{tr}[B^2\cdot P\cdot\mathrm{diag}(q_1,q_2,\cdots,q_p)\cdot P']\\&=\mathrm{tr}[P'\cdot B^2\cdot P\cdot\mathrm{diag}(q_1,q_2,\cdots,q_p)]\\&=\sum_{i=1}^{p}b_{ii}\cdot q_i\leqslant q_1\cdot\sum_{i=1}^{p}b_{ii}=q_1\cdot\mathrm{tr}(P'\cdot B^2\cdot P)=q_1\cdot\mathrm{tr}(B^2)\leqslant q_1\cdot(\mathrm{tr}B)^2\end{aligned}$$

由于$\mathrm{tr}B=\mathrm{tr}(X'X)^{-1}=\sum_{i=1}^{p}\delta_i^{-1}$,故$\mathrm{tr}(BHB)\leqslant q_1\cdot\left(\sum_{i=1}^{p}\delta_i^{-1}\right)^2$。式中,$b_{11},b_{22},\cdots,b_{pp}$为$P'B^2P$的主对角线元素。

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}[(C+\sigma^{-2}\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')H(C+\sigma^{-2}\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')]=\mathrm{tr}[(C+\sigma^{-2}\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')^2H]\\&\geqslant\mathrm{tr}(C^2H)=\mathrm{tr}[C^2P\mathrm{diag}(q_1,q_2,\cdots,q_p)P']\\&=\sum_{i=1}^{p}c_{ii}q_i\geqslant q_p\sum_{i=1}^{p}c_{ii}=q_p\mathrm{tr}(C^2)\end{aligned}$$

其中,$c_{11},c_{22},\cdots,c_{ii},\cdots,c_{pp}$为$P'C^2P$的主对角线元素。

由文献[8]的引理3可得:

$$\mathrm{tr}(C^2)\geqslant\frac{1}{p}(\mathrm{tr}C)^2$$

由定理1的证明过程可知,

$$\mathrm{tr}C\geqslant r_1^{-1}\cdot(r_1+1)^{-2}\cdot\sum_{i=1}^{p}h_{n-i+1}\cdot(r_i+d)^2$$

$$\mathrm{tr}(C+\sigma^{-2}\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')H(C+\sigma^{-2}\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')\geqslant\mathrm{tr}(CHC)=\mathrm{tr}(C^2H)\geqslant q_p\mathrm{tr}(C^2)\geqslant$$

$$\frac{q_p}{p}(\mathrm{tr}C)^2\geqslant\frac{q_p}{p}\cdot\left[r_1^{-1}\cdot(r_1+1)^{-2}\cdot\sum_{i=1}^{p}h_{n-i+1}\cdot(r_i+d)^2\right]^2$$

故有

$$e_2^2(\boldsymbol{\beta}^*(d),\hat{\boldsymbol{\beta}})=\frac{\mathrm{tr}(BHB)}{\mathrm{tr}[(C+\sigma^{-2}\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')H(C+\sigma^{-2}\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')]}\leqslant\frac{p\cdot q_1\cdot\left(\sum_{i=1}^{p}\delta_i^{-1}\right)^2}{q_p\cdot\left[r_1^{-1}\cdot(r_1+1)^{-2}\cdot\sum_{i=1}^{p}h_{n-i+1}\cdot(r_i+d)^2\right]^2}$$

即

$$e_2(\boldsymbol{\beta}^*(d),\hat{\boldsymbol{\beta}})\leqslant\frac{\sqrt{pq_1}\cdot r_1\cdot(r_1+1)^2\cdot\sum_{i=1}^{p}\delta_i^{-1}}{\sqrt{q_p}\cdot\sum_{i=1}^{p}h_{n-i+1}\cdot(r_i+d)^2}$$

证毕。

3 聚集Liu估计相对于Peter-Karsten估计的效率

模型(1)和条件(4)下,估计$\boldsymbol{\beta}^*(d)$代替$\boldsymbol{\beta}$的Peter-Karsten估计在推广欧氏模之比意义下的效率上界由定理3给出。

定理3 设n阶矩阵T的秩$\mathrm{rank}(T)=p$, $h_1\geqslant h_2\geqslant\cdots\geqslant h_p>0$为$T'T$的特征根,$r_1\geqslant r_2\geqslant\cdots\geqslant r_p>0$为$X'T'TX$的特征根,$0<d<1$,则

$$e_1(\boldsymbol{\beta}^*(d),\tilde{\boldsymbol{\beta}})\leqslant\frac{p^{1-\frac{1}{q}}\cdot r_1\cdot(r_1+1)^2\cdot\sum\limits_{i=1}^{p}r_i^{-1}}{\sum\limits_{i=1}^{p}h_{n-i+1}\cdot(r_i+d)^2}\tag{15}$$

证明过程与定理1类似,从略。

模型(1)和条件(4)下,估计$\boldsymbol{\beta}^*(d)$代替$\boldsymbol{\beta}$的Peter–Karsten估计在加权欧氏模之比意义下的效率上界见定理4。

定理4 设n阶矩阵$\boldsymbol{T}$的秩$\mathrm{rank}(\boldsymbol{T})=p$,$h_1\geqslant h_2\geqslant\cdots\geqslant h_p>0$为$\boldsymbol{T'T}$的特征根,$r_1\geqslant r_2\geqslant\cdots\geqslant r_p>0$为$\boldsymbol{X'T'TX}$的特征根,$q_1\geqslant q_2\geqslant\cdots\geqslant q_p>0$为$\boldsymbol{H}$的特征根,$0<d<1$,则

$$e_2(\boldsymbol{\beta}^*(d),\tilde{\boldsymbol{\beta}})\leqslant\frac{\sqrt{pq_1}\cdot r_1\cdot(r_1+1)^2\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^{p}r_i^{-1}\right)}{\sqrt{q_p}\cdot\sum\limits_{i=1}^{p}h_{n-i+1}\cdot(r_i+d)^2}\tag{16}$$

证明过程与定理2类似,从略。

4 聚集Liu估计与聚集广义岭估计的比较

本文提出的聚集Liu估计与文献[9]提出的聚集广义岭估计,均是针对聚集数据的线性模型提出的有偏估计,当变量之间存在复共线性时,即设计矩阵$\boldsymbol{X'T'TX}$的一个或多个特征根接近于零时,这两种有偏估计均减小了均方误差,改进了Peter–Karsten估计。

均方误差是线性模型中评价一个估计好坏的重要标准,综合反映了估计参数稳定性和无偏性,均方误差越小,估计效果越好。聚集广义岭估计由于片面强调估计参数的稳定性,忽视了估计参数的无偏性影响,使得估计参数的均值较大地偏离实际值。本文提出的聚集Liu估计,引入了新的参数,既能保证估计参数的稳定性,又能保证估计参数的近似无偏性。从这个意义上说,聚集Liu估计在某种程度上优于聚集广义岭估计。

文献[9]给出了聚集广义岭估计相对于最小二乘估计的两种相对效率,并得到了两种相对效率的上界。本文不仅给出了聚集Liu估计相对于最小二乘估计的两种相对效率,获得了这两种效率的上界,而且给出了该估计相对于Peter–Karsten估计的相对效率及其上界。

5 结论

研究了聚集数据线性模型的参数估计问题,给出了聚集Liu估计的概念,分析了聚集Liu估计相对于最小二乘估计及Peter–Karsten估计的相对效率,得到了相对效率的上界。将聚集Liu估计与聚集广义岭估计进行比较,结果表明,本文提出的聚集Liu估计在某种程度上优于聚集广义岭估计。

致谢:衷心感谢审稿人提出的宝贵意见。

参考文献(References)

[1] 王松桂. 线性模型的理论及其应用[M]. 合肥: 安微教育出版社, 1987.
Wang Songgui. Theory and application of linear models[M]. Hefei: Anhui Education Publishing House, 1987.

[2] Liu K J. A new class of biased estimate in linear regression [J]. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 1993, 61(2): 393–402.

[3] Peter S, Karsten S. On the least squares estimation with a particular linear function of the dependent Variable[J]. *Economics letters*, 1987, 23(1): 59–64.

[4] 黄养新, 万仲平. 聚集数据的Gauss–Markoff模型中参数估计的相对效率[J]. 数学研究, 1995, 28(2): 60–64.
Huang Yangxin, Wan Zhongping. *Mathematical Study*, 1995, 28(2): 60–64.

[5] 刘爱义, 王松桂. 一类相依回归系统参数的有偏估计 [J]. 应用概率统计, 1991, 7(3): 266–274.
Liu Aiyi, Wang Songgui. *Applied Probability and Statistics*, 1991, 7(3): 266–274.

[6] 黄元亮, 陈桂景, 韦来生. 广义G–M模型参数估计的相对效率 [J]. 数学研究与评论, 2000, 20(1): 103–108.
Huang Yuanliang, Chen Guijing, Wei Laisheng. *Mathematical Research and Exposition*, 2000, 20(1): 103–108.

[7] 陈孝新. 线性模型中参数估计的一个新的相对效率[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 1999, 23(4): 313–315.
Chen Xiaoxin. *Journal of Jiangxi Normal University: Natural Science Edition*, 1999, 23(4): 313–315.

[8] 周永正. 聚集数据线性模型参数估计的相对效率与广义相关系数[J]. 大学数学, 2009, 25(2): 90–96.
Zhou Yongzheng. *College Mathematics*, 2009, 25(2): 90–96.

[9] 周永正. 聚集数据线性模型参数的广义岭估计的相对效率[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(23): 90–96.
Zhou Yongzheng. *Mathematics in Practice and Theory*, 2009, 39(23): 90–96.

(责任编辑 代而)

本期完词填空答案

方	舟	子		寒			
		贡	嘎	山			
				寺		黔	
	晴	雯			夕	驴	
翡	翠		爱		阳	技	
	接	天	莲	叶	无	穷	碧
	荒		说	问	限		
围	城				好		