非牛顿幂律流体试井模型的一种简明解析解

李元媛[1,2],蔡睿贤[1]

1. 中国科学院工程热物理研究所,北京 100190
2. 中国科学院研究生院,北京 100049

摘要 在实际油藏的三元复合驱条件下,三元复合体系多表现出非牛顿幂律流体的渗流特征。将三元复合体系假定为非牛顿幂律流体所得到的均质试井模型是非线性的,难以求得解析解,通常只用数值方法求得其近似解。本文使用加法分离变量法,求解尚未有解析解的非定常非线性试井方程,导出了一系列简明(无特殊函数和无穷级数)的解析解,以发展非 Newton 幂律流体的理论;而且还可以作为标准解来检验相应的数值解的准确度、收敛性与稳定性,以发展数值方法。此外,应用常规分离变量法也得到了一些显式解析解。

关键词 非牛顿幂律流;试井模型;解析解;加法分离变量法

中图分类号 O193 **文献标识码** A **文章编号** 1000-7857(2010)18-0032-04

A Concise Analytical Solutions of Well Test Analysis: Non-Newtonian Power-law Fluids

LI Yuanyuan[1,2], CAI Ruixian[1]

1. *Institute of Engineering Thermophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*
2. *Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*

Abstract Among numerous tertiary technologies, Alkaline-Surfactant-Polymer (ASP) flooding is one of the most important enhanced oil recovery methods. In this method, the ASP solution system exhibits the characteristics of a non-Newtonian power-law fluid. A homogeneous well test model based on non-Newtonian power-law fluid is nonlinear and it is very difficult to obtain explicit exact analytical solutions. Generally, one can only obtain approximate solutions with numerical methods. Recently, an advanced method of separating variables with additions was proposed by the authors, which can be used to obtain exact analytical solutions . This method in this paper is used to solve the unsteady nonlinear well test equation. A series of exact analytical solutions (without using special functions or infinite series) are derived based on the theory of non-Newtonian power-law fluid. They can be used as the benchmark solutions to check the accuracy, convergence and stability of the numerical solutions and to develop the numerical computational approaches.

Keywords non-Newtonian; well test model; analytical solution; method of separating variables with addition

0 引言

碱-表面活性剂-聚合物(ASP)三元复合驱提高采收率技术在中国各油田进行了较大规模的现场试验。研究表明[1-3],三元复合体系表现出类似于聚合物溶液的流变特性,在中等剪切速率范围内,呈现剪切变稀的流变特征,符合非牛顿幂律流体的规律。

收稿日期:2010-08-20

基金项目:国家自然科学基金项目(50876106);国家重点基础研究发展计划(973 计划)项目(2010CB227306)

作者简介:李元媛,博士研究生,研究方向为能源系统与解析解,电子信箱:marryliyuanyuan@126.com;蔡睿贤(通信作者,中国科协所属全国学会个人会员登记号:E400100046M),中国科学院院士,研究方向为能源系统,电子信箱:crx@iet.cn

1979 年,Ikoku 等[4]研究了多孔介质中非牛顿幂律流体不稳定渗流特征;Vongvuthipornchai[5]在此基础上进一步考虑了井筒储集和表皮系数的影响,求得了均质无限大地层拉氏空间的解,并绘制了相应的图版。1996 年,刘泽俊等[6]研究了圆形有界地层均质油藏非牛顿幂律流体试井模型, 宋考平等[7]进一步研究了 3 种外边界条件下非牛顿–牛顿流体复合试井模型。梁光跃等[8]通过引用有效半径等无量纲量,求得 3 种外边界条件下均质试井模型的有效半径解及简化式。以上所得到的都是一般解,形式不够简洁直观,在物理应用上不够方便。为推进非 Newton 流的理论与实用,本文应用新的分离变量法[9–14]导出非牛顿幂律流体试井模型的简明严格解析解。它不但有理论价值,还可以作为标准解校验各种数值计算方法的准确度、收敛性与稳定性,以及用来改进其差分格式、网格生成方法等。

1 试井模型的基本方程和主要求解办法

按照文献[8],在此直接引用其非牛顿幂律流体均质油藏试井模型的无量纲有效半径形式,其渗流控制方程为

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2}+\frac{n}{r_D}\cdot\frac{\partial p_D}{\partial r_D}=C_{De}^{(n-3)/2}r_D^{1-n}\frac{\partial p_D}{\partial t_D} \tag{1}$$

其中,p_D 为无量纲压力,r_D 为无量纲有效半径,t_D 为无量纲时间坐标,C_{De} 为表皮系数组合参数,令其等于 $\frac{C_D}{\left|1-S(1-n)\right|^{2/(1-n)}}$,$C_D$ 为无量纲系数,S 为无因次表皮系数,n 为幂律指数。

幂律流体的渗流方程具有非线性的特点,不便进行解析求解。一些经典著作认为此类方程的求解需要经过线性处理或用数值方法求得数值解。这些解多是沿用经典的求数理方程解的办法——常规分离变量法而得到的结论。如果改用其他创新的方法[9–14],可找到式(1)的一些更为先进的解。

本文所用的新的分离变量法——加法分离变量法,非常简单,自启用以来,导出了很多以往未推出的解析解。其基本方法是将常规分离变量法 $F(x,y)=f(x)g(y)$ 改为 $F(x,y)=f(x)+g(y)$,就可导出很多前所未有的严格简明解析解。

2 应用加法分离变量法时的解析解

如果假设式(1)中的主要变量 p_D 用加法分离变量法求解,则有

$$p_D=p(r_D,t_D)=R_D(r_D)+T_D(t_D) \tag{2}$$

将式(2)代入式(1),并假定 n 可取任意正数,则式(1)可简化为

$$r_D^{n-1}\left(R_D''+\frac{n}{r_D}R_D'\right)=C_{De}^{(3-n)/2}T_D' \tag{3}$$

2.1 k_0=0 时的简明解析解

按照分离变量法的原则,式(3)等号两侧应为常数,可令其为 k_0(并令之后的 k_i 均为常数),则式(3)可简化为

$$R_D''+\frac{n}{r_D}R_D'=0=C_{De}^{(3-n)/2}T_D' \tag{4}$$

等号右侧可得

$$T_D=k_2 \tag{5}$$

等号左侧积分后可得

$$R_D=\frac{k_1}{1-n}r_D^{1-n} \tag{6}$$

最后,按加法分离变量法可以得出式(1)的简明解析解为

$$p_D=\frac{k_1}{1-n}r_D^{1-n}+k_2 \tag{7}$$

其中,n 为任意不等于 1 的正数。令 $k_1=k_2=1$,式(7)的典型曲线如图 1 所示。

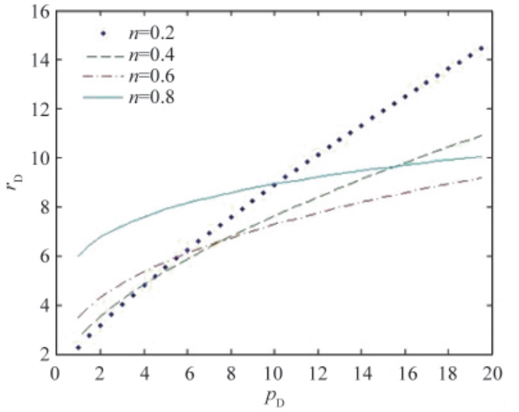

图 1 不同幂律指数 *n* 对压力的影响曲线

Fig. 1 Pressure curve for different values of *n*

对于牛顿流体,即当 n=1 时,式(3)可简化为

$$R_D''+\frac{1}{r_D}R_D'=0=\frac{1}{C_{De}}T_D' \tag{8}$$

等号两侧分别积分,可得

$$p_D=k_1\ln r_D+k_2 \tag{9}$$

可见,用加法分离变量法可以得到幂律流体试井模型的简明解析解。但式(7)和式(9)所表达的解是定常的,未表达出非定常的情况。

2.2 表达有非定常情况的简明解析解

非定常情况下,$k_0\neq0$,此时式(3)变为

$$r_D^{n-1}\cdot\left(R_D''+\frac{n}{r_D}R_D'\right)=k_0=C_{De}^{(n-3)/2}T_D' \tag{10}$$

由左式,可得

$$R_D''+\frac{n}{r_D}R_D'=k_0r_D^{(1-n)} \tag{11}$$

积分,得

$$R_D=\frac{k_0}{2(3-n)}r_D^{3-n}+\frac{k_1}{1-n}r_D^{1-n} \tag{12}$$

式(10)等号右侧积分,可得

$$T_D=k_0C_{De}^{(3-n)/2}\cdot t_D+k_2 \tag{13}$$

由此得到式(1)的另一简明解析解为

$$p_D=\frac{k_0}{2(3-n)}r_D^{(3-n)}+\frac{k_1}{1-n}r_D^{(1-n)}+k_0C_{De}^{(3-n)/2}\cdot t_D+k_2 \tag{14}$$

其中,n 为任意不等于 1 和 3 的正数。

此解既是关于 r_D 的函数,又是关于 t_D 的函数,是二元的解;既反映了几何上的变化,又反映了时间上的非定常情况。

当 $n=1$ 时,式(10)变为

$$R''_D+\frac{1}{r_D}R'_D=k_0=\frac{1}{C_{De}}T'_D \tag{15}$$

等号两侧均可简单积分,得

$$p_D=k_1\ln r_D+\frac{1}{4}k_0r_D^2+k_0C_{De}\cdot t_D+k_2 \tag{16}$$

式(16)即为牛顿流均质油藏试井模型的解析解,压力与时间呈线性关系,但受组合参数 C_{De} 的影响。当 $k_0=4$,$k_1=k_2=1$ 时,压力与半径关系的典型曲线如图 2 所示。

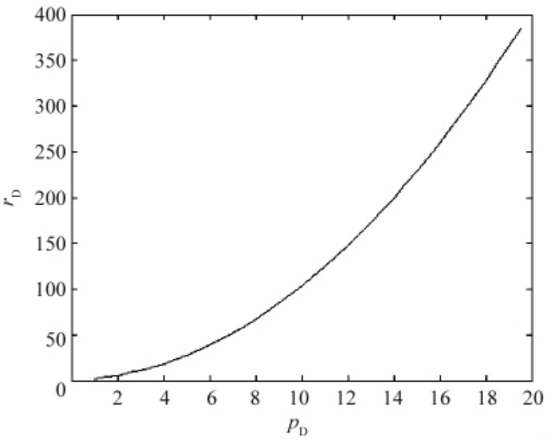

图 2 n=1 时压力曲线

Fig. 2 Pressure curve for n=1

当 $n=3$ 时,用同样的方法可得

$$p_D=\frac{1}{2}k_0\ln r_D+k_1\frac{1}{r_D^2}+k_0t_D+k_2 \tag{17}$$

式(14)、(16)、(17)即为用加法分离变量法得到的试井模型的代数显式解析解。此外,应用常规分离变量法也能得到一些解析解,下文将阐述之。

3 应用常规分离变量法时的解析解

假设式(1)中的主要变量 p_D 用常规分离变量法求解,有

$$p_D=p(r_D,t_D)=R_D(r_D)\cdot T_D(t_D) \tag{18}$$

代入式(1),假定 n 为任意正数,则式(1)简化为

$$r_D^{n-1}\cdot\left(\frac{R''_D}{R_D}+\frac{n}{r_D}\cdot\frac{R'_D}{R_D}\right)=C_{De}^{(n-3)/2}\frac{T'_D}{T_D} \tag{19}$$

3.1 k_0=0 时的简明解析解

按照分离变量法的原则,式(19)应为一常数,仍令其为 k_0(以后各 k_i 均为常数),式(19)可简化为

$$\frac{R''_D}{R_D}+\frac{n}{r_D}\cdot\frac{R'_D}{R_D}=0=C_{De}^{(n-3)/2}\frac{T'_D}{T_D} \tag{20}$$

由等号右侧可得

$$T_D=k_2 \tag{21}$$

由等号左侧积分后可得

$$R_D=\frac{k_1}{1-n}r_D^{1-n} \tag{22}$$

最后,按常规分离变量法得到的式(1)的简明解析解为

$$p_D=\frac{k_1}{1-n}r_D^{1-n}\cdot k_2 \tag{23}$$

其中,n 为任意不等于 1 的正数。

当 $n=1$ 时,式(19)可简化为

$$\frac{R''_D}{R_D}+\frac{1}{r_D}\cdot\frac{R'_D}{R_D}=0=C_{De}^{-1}\cdot\frac{T'_D}{T_D} \tag{24}$$

等号两侧分别积分得

$$p_D=k_1\cdot k_2\ln r_D \tag{25}$$

式(23)、(25)与加法分离变量法得到的解类似,只是常系数略有差异,但仍表达了应用不同方法所得到的不同解:式(7)的形式为幂函数加常数项,是两项独立函数之和;式(23)的形式为幂函数与常数之积,实质上只是一个单一的幂函数。或者可以认为:对式(1)进行分离变量法求解,当 $k_0=0$ 时,应用加法分量变量法所得的解比常规(乘法)分离变量法所得的解会复杂些,但这仅是特例,也存在相反情况。

可见,用常规分离变量法仍可得到幂律流体试井模型的简明解析解。这些解是定常的,与加法分离变量法得到的解有相近之处。

3.2 表达有非定常情况的简明解析解

非定常情况下,$k_0\neq0$,式(19)为

$$r_D^{n-1}\cdot\left(\frac{R''_D}{R_D}+\frac{n}{r_D}\cdot\frac{R'_D}{R_D}\right)=k_0=C_{De}^{(n-3)/2}\frac{T'_D}{T_D} \tag{26}$$

等号左侧可得

$$R''_D+\frac{n}{r_D}R'_D-k_0r_D^{1-n}R_D=0 \tag{27}$$

仅当 $n=3$ 时,式(27)能够完成积分,由此可得

$$R''_D+\frac{3}{r_D}R'_D-\frac{k_0}{r_D^2}R_D=0 \tag{28}$$

积分后得

$$R_D=k_1r_D^{\pm\sqrt{k_0+1}-1}+\frac{k_2}{\pm2\sqrt{k_0+1}+2}r_D^{\pm\sqrt{k_0+1}+1} \tag{29}$$

式(26)等号右侧积分得

$$T_D=k_3e^{k_0t_D} \tag{30}$$

因此,得到式(1)的另一简明解析解为

$$p_D=\left(k_1r_D^{\pm\sqrt{k_0+1}-1}+\frac{k_2}{\pm2\sqrt{k_0+1}+2}r_D^{\pm\sqrt{k_0+1}+1}\right)\cdot k_3e^{k_0t_D} \tag{31}$$

式(31)既是 r_D 的函数,又是 t_D 的函数,是二元的解;既反映了几何上的变化,又反映了时间上的非定常情况。

4 结论

本文推导了非牛顿幂律流体均质模型的显式解析解,当 $n=1$ 时,得到了牛顿流均质试井模型的解析解。这些解,不仅具有理论价值,还可以作为原方程的标准解来校验、判断不同的数值计算程序的准确度、收敛性与稳定性,可以启发、改进并优化各种数值计算技术,如差分格式、网络生成技术等[15]。

在解析解的推导中,应用了常规分离变量法和加法分离变量法。并将在后续研究中继续发展加法分离变量法,力求为各种实际问题的分析提供理论基础。

参考文献(References)

[1] 陈铁龙, 董范, 尤冬青, 等. ASP三元复合体系宏观流变特征研究[J]. 西南石油学院学报, 1998, 20(1): 53–55.
Chen Tielong, Dong Fan, You Dongqing, *et al*. *Journal of Southwest Petroleum Institute*, 1998, 20(1): 53–55.

[2] 赵庆辉, 陈超, 岳湘安, 等. ASP体系的参数在多孔介质中的流变特性[J]. 油气采收率技术, 2000, 7(2): 9–11.
Zhao Qinghui, Chen Chao, Yue Xiang′an, *et al*. *Oil & Gas Recovery Technology*, 2000, 7(2): 9–11.

[3] 祝仰文, 张以根, 刘坤, 等. HPAM溶液驱油过程中弹性作用的探讨[J]. 西南石油学院学报, 2002, 24(6): 64–67.
Zhu Yangwen, Zhang Yigen, Liu Kun, *et al*. *Journal of Southwest Petroleum Institute*, 2002, 24(6): 64–67.

[4] Ikoku C U, Ramey H J Jr. Wellbore storage and skin effects during the transient flow of non–Newtonian power–law fluids in porous media [J]. *SPE Journal*, 1980, 20(1): 25–38.

[5] Vongvuthipornchai S, Raghavan R. Well test analysis of data dominated by storage and skin: Non–Newtonian power–law fluids [J]. *SPE Formation Evaluation*, 1987, 2(4): 618–628.

[6] 刘泽俊, 孙智, 宋考平. 有界地层非牛顿渗流试井解释模型[J]. 大庆石油地质与开发, 1996, 15(3): 63–66.
Liu Zejun, Sun Zhi, Song Kaoping. *Petroleum Geology & Oilfield Development in Daqing*, 1996, 15(3): 63–66.

[7] 宋考平, 王雷, 计秉玉. 非牛顿–牛顿复合油藏渗流试井解释方法[J]. 石油学报, 1996, 17(1): 82–85.
Song Kaoping, Wang Lei, Ji Bingyu. *Acta Petrolei Sinica*, 1996, 17(1): 82–85.

[8] 梁光跃, 廖新维, 万光芬, 等. 非牛顿幂律流体试井模型的有效半径解及其曲线特征[J]. 科技导报, 2010, 28(13): 58–61.
Liang Guangyue, Liao Xinwei, Wan Guangfen, *et al*. *Science & Technology Review*, 2010, 28(13): 58–61.

[9] Cai R X, Gou C H. Algebraically explicit analytical solutions for the unsteady non–Newtonian swirling flow in an annular pipe [J]. *Science in China Series G: Physics Mechanics & Astronomy*, 2006, 49(4): 396–340.

[10] Cai R X. Some Explicit analytical solutions of unsteady compressible flow[J]. *Journal Fluids Engineering*, 1998, 120(4): 760–764.

[11] 蔡睿贤, 张娜. 生物导热基本方程的一维不定常解析解[J]. 自然科学进展, 1998, 8(3): 331–336.
Cai Ruixian, Zhang Na. *Process in Natural Science*, 1998, 8(3): 331–336.

[12] Cai R X, Zhang N. Explicit analytical solutions of incompressible unsteady 2–D laminar flow with heat transfer [J]. *International Journal Heat Mass Transfer*, 2002, 45: 2623–2627.

[13] Cai R X, Zhang N. Explicit analytical solutions of linear and non–linear interior heat and mass transfer equation sets for drying process [J]. *ASME Journal Heat Transfer*, 2003, 125(1): 175–178.

[14] Cai R X, Liu Q B. A new method for deriving analytical solutions of partial differential equations– Algebraically explicit analytical solutions of two–buoyancy natural convection in porous medial [J]. *Science in China Series G: Physics Mechanics & Astronomy*, 2008, 51(11): 1733–1744.

[15] Patankar S. Numerical heat transfer and fluid flow[M]. New York: McGraw–Hill, 1980.

(责任编辑　刘志远)

·学术动态·

“人–机–环境系统工程创立30周年纪念大会暨第十一届人–机–环境系统工程大会”征文

中国系统工程学会将于2011年10月21日在北京召开“人–机–环境系统工程创立30周年纪念大会暨第十一届人–机–环境系统工程大会”。会议主题为“纪念人–机–环境系统工程创立30周年并极大推动人–机–环境系统工程研究及应用的进一步繁荣和发展”。

征文内容:人的特性的研究——人的工作能力研究,环境特性的研究——环境检测技术的研究,人–机关系的研究——静态人–机关系研究;人–环关系的研究——环境对人影响的研究等;人–机–环境系统总体性能的研究——人–机–环境系统总体数学模型的研究,人–机–环境系统工程理论及应用研究——人–机–环境系统工程理论研究等。

征文截止时间:2011年3月30日。

联系方式:北京市海淀区圆明园西路1号 中国航天员科研训练中心四室(100193)龙升照,电话:010–66362271,电子信箱:mmese@sina.com。

会议网站:www.mmese.com。