

关于 Smarandache 幂函数的记

任 鹏¹, 王 阳², 邓书显¹

1. 河南工程学院数理系, 郑州 450007

2. 南阳师范学院数学与统计学院, 河南南阳 473061

摘要 对于正整数 n , Smarandache 幂函数 $SP(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 n 整除 m^m 。本文在研究数列 $\{SP(n)\}$ 性质的基础上, 通过对 $SP(n)$ 的一次均值及其渐近公式、无穷数列 $SP(n)$ 的收敛性及其相关的恒等式、方程 $SP(n^k)=\varphi(n)$ ($k=1, 2, 3$) 的可解性 ($\varphi(n)$ 为 Euler 函数) 及其所有的正整数解等相关问题的讨论, 应用解析方法研究了 $SP(n)$ 的 k 次方幂的分布性质。针对任意的实数 $x \geq 3$ 、给定的实数 k, l ($k > 0, l \geq 0$), 及对所有的素数 p 、任意的正数 ε 和 Riemann Zeta-函数, 给出并证明了其相应的渐近公式; 对于任意的实数 $x \geq 3$ 及给定的实数 $k' > 0$ 的情况, 也给出并证明了其相应的渐近公式; 对于任意的实数 $x \geq 3$ 及给定的实数 $l \geq 0$, 其相应的渐近公式也一并给出并加以证明。由此, 给出 $\sum_{n \leq x} n^l (SP(n))^k$ 及 $\sum_{n \leq x} \frac{(SP(n))^k}{n^l}$ ($k > 0, l \geq 0$) 的渐近公式。在 $l=0, k=1/k'$ 情况下, 以及 $k=1, 2, 3$ 且 $\zeta(2)=\pi^2/6$, $\zeta(4)=\pi^4/90$ 情况下, 可以看出该定理是对相关结论的进一步推广。

关键词 幂函数; k 次方幂; 渐近公式

中图分类号 O156.4

文献标识码 A

文章编号 1000-7857(2010)17-0050-04

Some Notes on the Smarandache Power Function

REN Peng¹, WANG Yang², DENG Shuxian¹

1. Henan Institute of Engineering, Zhengzhou 45000, China

2. College of Mathematics and Statistics, Nanyang Normal University, Nanyang, 473061, Henan Province, China

Abstract For any positive integern, the Smarandache power function $SP(n)$ is defined as the smallest positive integersuch that m^m is divisible by n . The main purpose of this paper is to study the solvability of equations $SP(n)=\phi(n)$, $k=1, 2, 3$ (for the Euler function) and all the positive integer solutions and other related issues, based on the nature of the series $\{SP(n)\}$, 1st mean, asymptotic formula, the convergence of infinite series $SP(n)$ and its related identity. The analytic methods are used to get the distribution properties of the k -th Powers of $SP(n)$. For any real number $x \geq 3$, given the real numbers k, l ($k > 0, l \geq 0$), and all the prime numbers p , any positive number ε and the Riemann Zeta-function, we give and prove the corresponding asymptotic formula. For any real number $x \geq 3$ and a given real number $k' > 0$, we also give and prove the corresponding asymptotic formula. For any given real numbers $x \geq 3$ and real numbers $l \geq 0$, the corresponding asymptotic formula is also given and proven together. Thus, the asymptotic formula of $\sum_{n \leq x} n^l (SP(n))^k$ and $\sum_{n \leq x} \frac{(SP(n))^k}{n^l}$ ($k > 0, l \geq 0$) is given, when $l=0, k=1/k', k=1, 2, 3$ and $\zeta(2)=\pi^2/6, \zeta(4)=\pi^4/90$, and it could be found that the theorem is a further extension of the related results.

Keywords power function; the k -th power; asymptotic formula

0 引言

对于正整数 n , Smarandache 幂函数 $SP(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 n 整除 m^m , 即

$$SP(n) = \min \left\{ m : n \mid m^m, m \in \mathbb{N}^+, \prod_{p|m} p = \prod_{p|n} p \right\}$$

由定义知, $SP(1)=1, SP(2)=2, SP(3)=3, SP(4)=2, SP(5)=5,$

收稿日期: 2010-01-17; 修回日期: 2010-07-09

基金项目: 山西省教育厅科研专项基金项目 (08JK433)

作者简介: 任鹏, 讲师, 研究方向为数论, 电子信箱: dshuxian@163.com

$SP(6)=6, SP(7)=7, SP(8)=4, \dots$ 。在文献[1]中, F. Smarandache 提出研究数列 $\{SP(n)\}$ 的性质。关于这个问题文献[2]~[4]已做了初步的研究, 获得一些重要结论。其中文献[2]研究了 $SP(n)$ 的一次均值, 得到了渐近公式

$$\sum_{n \leq x} SP(n) = \frac{1}{2} x^2 \prod_p \left(1 - \frac{1}{p(1+p)} \right) + O\left(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right)$$

文献[3]研究了无穷数列 $SP(n)$ 的收敛性, 给出了恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu(n)}}{(SP(n^k))^s} = \begin{cases} \frac{2^s+1}{(2^s-1)\zeta(s)} & k=1,2 \\ \frac{2^s+1}{(2^s-1)\zeta(s)} - \frac{2^s-1}{4^s} & k=3 \\ \frac{2^s+1}{(2^s-1)\zeta(s)} - \frac{2^s-1}{4^s} + \frac{3^s-1}{9^s} & k=4,5 \end{cases}$$

其中, $\text{Re}(s) > 1$ 。文献[4]研究了方程 $SP(n^k) = \phi(n)$, $k=1, 2, 3$ 的可解性, ($\phi(n)$ 为 Euler 函数), 并给出了所有的正整数解, 即方程 $SP(n) = \phi(n)$ 有且仅有 4 个正整数解, 即 $n=1, 4, 8, 18$; 方程 $SP(n^2) = \phi(n)$ 有且仅有 3 个正整数解 $n=1, 8, 18$; 方程 $SP(n^3) = \phi(n)$ 有且仅有 3 个正整数解。

本文主要目的是利用解析方法研究 $SP(n)$ 的 k 次方幂的分布性质, 给出了 $\sum_{n \leq x} n^l (SP(n))^k$ 及 $\sum_{n \leq x} \frac{(SP(n))^k}{n^l}$ ($k > 0, l \geq 0$) 的渐近公式, 推广了文献[2]的结论。具体过程如下。

定理 对任意的实数 $x \geq 3$ 及给定的实数 k, l ($k > 0, l \geq 0$), 有渐近公式

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} n^l (SP(n))^k &= \frac{\zeta(k+1)}{(k+l+1)\zeta(2)} x^{k+l+1} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^k(1+p)} \right) + O\left(x^{k+l+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \\ \sum_{n \leq x} \frac{(SP(n))^k}{n^l} &= \frac{\zeta(k+1)}{(k-l+1)\zeta(2)} x^{k-l+1} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^k(1+p)} \right) + O\left(x^{k-l+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

其中, $\prod_p$ 表示对所有素数 p 求积, ε 表示任意的正数, $\zeta(s)$ 表示 Riemann Zeta-函数。

推理 1 对任意的实数 $x \geq 3$ 及给定的实数 $k' > 0$, 有渐近公式

$$\sum_{n \leq x} (SP(n))^{\frac{1}{k'}} = \frac{6k'\zeta\left(\frac{1+k'}{k'}\right)}{(k'+1)\pi^2} x^{\frac{k'+1}{k'}} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{\frac{1}{k'}}(1+p)} \right) + O\left(x^{\frac{k'+2}{2k'}+\varepsilon}\right)$$

特别地,

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} (SP(n))^{\frac{1}{3}} &= \frac{9\zeta\left(\frac{4}{3}\right)}{2\pi^2} x^{\frac{4}{3}} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{\frac{1}{3}}(1+p)} \right) + O\left(x^{\frac{5}{6}+\varepsilon}\right) \\ \sum_{n \leq x} (SP(n))^{\frac{1}{2}} &= \frac{4\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\pi^2} x^{\frac{3}{2}} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{\frac{1}{2}}(1+p)} \right) + O\left(x^{1+\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

推理 2 对任意的实数 $x \geq 3$ 及给定的实数, 有渐近公式

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} n^l (SP(n)) &= \frac{1}{(l+2)} x^{l+2} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p(1+p)} \right) + O\left(x^{l+\frac{3}{2}+\varepsilon}\right) \\ \sum_{n \leq x} n^l (SP(n))^2 &= \frac{6\zeta(3)}{(l+3)\pi^2} x^{l+3} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2(1+p)} \right) + O\left(x^{l+\frac{5}{2}+\varepsilon}\right) \\ \sum_{n \leq x} n^l (SP(n))^3 &= \frac{\pi^2}{15(l+4)} x^{l+4} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^3(1+p)} \right) + O\left(x^{l+\frac{7}{2}+\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

1 引理和证明

设 $s = \sigma + it$, $\zeta(s)$ 为 Riemann Zeta-函数, $k > 0, l \geq 0$ 为给定的两个实数, p 为素数。

令 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, $U(n) = \prod_{p|n} p$ 。为了完成定理的证明, 需要下列引理。

引理 1 对任意的实数 $x \geq 1$ 及给定的实数 $k \geq 1$, 有渐近公式:

$$\sum_{n \leq x} (U(n))^k = \frac{\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)} x^{k+1} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^k(1+p)} \right) + O\left(x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

证明 令 $A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(U(n))^k}{n^s}$, 由于 $U(n)$ 是积性函数, 根据文献[5]中的 Euler 积分式, 当 $\sigma > k+1$ 时, 可得

$$\begin{aligned} A(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(U(n))^k}{n^s} = \prod_p \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(U(p^m))^k}{p^{ms}} \right] \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{p^k}{p^s} + \frac{p^k}{p^{2s}} + \cdots \right) = \frac{\zeta(s)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^k(1+p^{s-k})} \right) \end{aligned}$$

令 $h(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^k(1+p^{s-k})} \right)$, 当 $\sigma > k+1$ 时, $|U(n)| \leq n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(U(n))^k}{n^{\sigma}} < \zeta(\sigma-k)$, 由文献[5]中的 Perron 公式知,

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{a(n)}{n} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} A(s+s_0) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^b B(b+s_0)}{T}\right) + \\ &\quad O\left[x^{1-\sigma_0} H(2x) \min\left(1, \frac{\lg x}{T}\right)\right] + \\ &\quad O\left[x^{-\sigma_0} H(N) \min\left(1, \frac{x}{T\|x\|}\right)\right] \end{aligned}$$

其中, N 为离 x 最近的整数, 当 x 为半奇数时, 取 $N = x - \frac{1}{2}$, $\|x\|$

$= |x - N|$ 。取 $a(n) = (U(n))^k$, $s_0 = 0$, $b = k + \frac{3}{2}$, $T = x^{\frac{k+1}{2}}$, $H(x) = x$,

$B(\sigma) = \zeta(\sigma-k)$, 则

$$\sum_{n \leq x} (U(n))^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{k+\frac{3}{2}-iT}^{k+\frac{3}{2}+iT} \frac{\zeta(s)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)} h(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

将积分线从 $s = k + \frac{3}{2} \pm iT$ 移到 $k + \frac{1}{2} \pm iT$, 此时函数

$\frac{\zeta(s)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)} h(s) \frac{x^s}{s}$ 在 $s = k+1$ 处有一个一阶极点, 其留数为

$$\begin{aligned} L(x) &= \operatorname{Re} s \left(\frac{\zeta(s)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)} h(s) \frac{x^s}{s} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow k+1} \left((s-k-1) \frac{\zeta(s)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)} h(s) \frac{x^s}{s} \right) \\ &= \frac{\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)} x^{k+1} h(k) \end{aligned}$$

其中, $h(k) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^k(1+p)} \right)$ 。容易估计,

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{k+\frac{1}{2}-iT}^{k+\frac{1}{2}+iT} + \int_{k+\frac{1}{2}-iT}^{k+\frac{1}{2}+iT} + \int_{k+\frac{1}{2}-iT}^{k+\frac{1}{2}+iT} \right) \frac{\zeta(s)\zeta(s-k)}{\zeta(2s-2k)} h(s) \frac{x^s}{s} < x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

所以,

$$\sum_{n \leq x} (U(n))^k = \frac{\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)} x^{k+1} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^k(1+p)} \right) + O\left(x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

引理 1 得证。

引理 2 对任意的实数 $x \geq 3$ 、给定的实数 $k > 0$ 及正整数 α , 有

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ \alpha > p}} (\alpha p)^k \ll \ln^{2k+1} x$$

证明 设 $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$, 由文献[5]~[8]知,

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$$

由 Able 等式, 可得

$$\sum_{p \leq x} p^k = \pi(x) x^k - k \int_2^x \pi(t) t^{k-1} dt$$

故

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq \ln x} p^k &= \frac{\ln^k x}{(k+1)} + O(\ln^{k-1} x) - k \int_2^{\ln x} \frac{t^k}{\ln t} dt + O\left(\int_2^{\ln x} \frac{t^k}{\ln^2 x} dt\right) \\ &= \frac{\ln^k x}{k+1} + O(\ln^{k-1} x) \end{aligned}$$

因为 $\alpha > p$, 所以 $p^p < p^\alpha \leq x$ 。那么

$$p < \frac{\ln x}{\ln p} < \ln x \quad \alpha \leq \frac{\ln x}{\ln p}$$

又

$$\sum_{n \leq x} n^k = \frac{x^{k+1}}{k+1} + O(x^k)$$

从而

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ \alpha > p}} (\alpha p)^k = \sum_{p \leq \ln x} p^k \sum_{\alpha \leq \frac{\ln x}{\ln p}} \alpha^k < \ln^{k+1} x \sum_{p \leq \ln x} \frac{p^k}{\ln^{k+1} p} < <$$

$$\ln^{k+1} x \sum_{p \leq \ln x} p^k < \ln^{2k+1} x$$

引理 2 得证。

2 定理的证明

令 $\mathcal{A} = \{n | n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}, \alpha_i \leq p_i, i=1, 2, \dots, r\}$, 当 $n \in \mathcal{A}$ 时, 有 $SP(n) = U(n)$, 当 $n \in \mathbb{N}^*$ 时, 有 $SP(n) \geq U(n)$, 从而

$$\sum_{n \leq x} (SP(n))^k - \sum_{n \leq x} (U(n))^k = \sum_{n \leq x} [(SP(n))^k - (U(n))^k] < <$$

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ SP(n) > U(n)}} (SP(n))^k$$

由文献[2]知, 存在正整数 α 及素数 p , 使得 $SP(n) < \alpha p$, 根据引理 2 可得

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ SP(n) > U(n)}} (SP(n))^k < \sum_{n \leq x} (\alpha p)^k < \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{p \leq x \\ \alpha > p}} (\alpha p)^k < x \ln^{2k+1} x$$

故

$$\sum_{n \leq x} (SP(n))^k - \sum_{n \leq x} (U(n))^k < x \ln^{2k+1} x$$

由引理 1 知,

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} (SP(n))^k &= \frac{\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)} x^{k+1} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^k(1+p)} \right) + \\ O(x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}) + O(x \ln^{2k+1} x) &= \frac{\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)} x^{k+1} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^k(1+p)} \right) + O(x^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}) \end{aligned}$$

设 $B(x) = \sum_{n \leq x} (SP(n))^k$, 利用 Able 求和公式[5-8], 可得

$$\sum_{n \leq x} n^l (SP(n))^k = x^l B(x) - l \int_1^x B(t) t^{l-1} dt = \frac{\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)} x^{k+l+1}.$$

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^k(1+p)} \right) + O(x^{k+l+\frac{1}{2}+\varepsilon}) - \frac{l\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)}.$$

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^k(1+p)} \right) \int_1^x t^{k+l} dt + O\left(\int_1^x t^{k+l-\frac{1}{2}+\varepsilon} dt\right).$$

$$= \frac{\zeta(k+1)}{(k+l+1)\zeta(2)} x^{k+l+1} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^k(1+p)} \right) + O(x^{k+l+\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

$$\sum_{n \leq x} \frac{(SP(n))^k}{n^l} = x^{-l} B(x) - l \int_1^x B(t) t^{-l-1} dt = \frac{\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)} x^{k-l+1}.$$

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^k(1+p)} \right) + O(x^{k-l+\frac{1}{2}+\varepsilon}) + \frac{l\zeta(k+1)}{(k+1)\zeta(2)}.$$

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^k(1+p)} \right) \int_1^x t^{k-l} dt + O\left(\int_1^x t^{k-l-\frac{1}{2}+\varepsilon} dt\right).$$

$$= \frac{\zeta(k+1)}{(k-l+1)\zeta(2)} x^{k-l+1} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^k(1+p)} \right) + O(x^{k-l+\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

定理得证。

3 推理的证明

根据定理, 取 $l=0, k=\frac{1}{k'}$, 即可得到推理 1; 取 $k=1, 2, 3$, 考

虑到 $\zeta(2)=\pi^2/6, \zeta(4)=\pi^4/90$, 即可证得推理 2。可以看出, 该定理是对文献[2]的推广。

4 结论

本文利用解析方法研究了 $SP(n)$ 的 k 次方幂的分布性质, 根据引理 1 和引理 2 证明了文中的定理, 又根据该定理

证明了相关两个推论,给出了 $\sum_{n \leq x} n^l (SP(n))^k$ 及 $\sum_{n \leq x} \frac{(SP(n))^k}{n^l}$ ($k > 0, l \geq 0$) 的渐近公式,在 $l=0, k=1/k'$, 以及 $k=1, 2, 3$ 且 $\zeta(2) = \pi^2/6, \zeta(4) = \pi^4/90$ 的情况下,可以看出该定理推广了文献[2]的结论。

参考文献 (References)

- [1] Smarandache F. Only problems not solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.
- [2] 徐哲峰. Smarandache 幂函数的均值[J]. 数学学报, 2006, 49(1): 77-80.
Xu Zhefeng. Smarandache power function of the mean [J]. *Journal of Mathematic*, 2006, 49(1): 77-80.
- [3] Zhou Huanqin. An infinite series involving the Smarandache power function $SP(n)$ [J]. *Scientia Magna*, 2006, 3(2): 109-112.

- [4] Tian C, Li X. On the Smarandache power function and Euler totient function[J]. *Scientia Magna*, 2008, 4(1): 35-38.
- [5] 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
Pan Chengdong, Pan Chengbiao. Analytic number theory [M]. Beijing: Science Press, 1999.
- [6] Qin Y, Rivera J M. Universal attractors for a nonlinear one-dimensional heat-conductive viscous real gas [J]. *Pro Roy Society Edinburgh: Section A Mathematics*, 2002, 132: 685-709.
- [7] Qin Y, Rivera J M. Exponential stability and universal attractors for the Navier-Stokes equations of compressible fluids between two horizontal parallel plates in R^3 [J]. *Appl Numer Math*, 2003, 47(2): 209-235.
- [8] Qin Y, Wang X, Cui G. Remarks on maximal attractors for the compressible Navier-Stokes equations of viscous and heat-conductive fluid[J]. *Chin Quart J Math*, 2004, 19(4): 338-345.

(责任编辑 杨书春)



第三届 全国应用地球化学学术讨论会

2010年12月·广州

主办单位: 中国地质学会
中国矿物岩石地球化学学会
中国地质调查局

电 话: 020-84111255
电子信箱: aahuxiaoqiong@126.com, zhouyongzhang2005@163.com
网 址: <http://www.csmg.org.cn>