求解拟五对角线性方程组的四参数法

李文强,马 民

河南师范大学数学与信息科学学院,河南新乡 453007

摘要 基于五对角线性方程组的追赶法,给出了拟五对角线性方程组的四参数求解方法。算法的基本思想是,将方程组的前 2 个未知量 x_1,x_2 和最后 2 个未知量 x_{n-1},x_n 看作参数,这 4 个未知量正好对应于拟五对角方程组边角位置上的非零元素。然后通过特殊的矩阵分解将方程组解向量中的其他 n–4 个未知量用 x_1,x_2,x_{n-1} 和 x_n 4 个参数表示,从而形成标准的五对角线性方程组,可以方便地利用求解标准五对角线性方程组的追赶法进行求解。被看作参数的 4 个未知量可以利用原方程组中的前后两个方程及中间变量求出。最后,将已经求出的 4 个参数再代入分解矩阵形成的方程组中求得其余分量。鉴此,本文给出了两种不同的实现方法,其主要区别在于求解 4 个参数的过程不同。一种方法是将解向量的全部分量用参数线性表出,然后取出前后各 2 个式子组成参数方程,求出 4 个参数。另一种方法是将 4 个参数作为已知量先代入第 3~n–2 个方程中,整理后得到一个 n–4 阶的方程组,解出第 3~n–2 个解分量的参数表达式,再将 x_3,x_4,x_{n-3},x_{n-2} 回代到前 2 个方程和最后 2 个方程中组成参数方程,求出 4 个参数。对于规模较大的拟五对角线性方程组而言,这两种算法的计算量几乎一样。该算法的数值稳定性分析结果表明,系数矩阵在满足严格对角占优的条件下,该算法是稳定的。数值实验结果表明,两种算法的实际计算时间与算法的理论分析相符合。

关键词 拟五对角线性方程组;追赶法;四参数法

中图分类号 O241.6 **文献标识码** A **文章编号** 1000-7857(2010)17-0046-04

Four Parameter Algorithm for Solving the Quasi–pentadiagonal Linear Equations

LI Wenqiang, MA Min

College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, Henan Province, China

Abstract Quasi–pentadiagonal linear equations are important in computational mathematics and scientific/engineering computing, which would arise during the solution of boundary value problems for elliptical or parabolic partial differential equation (s) with periodical boundary conditions, and the quintic interpolating splines with periodical boundary conditions. Based on the ideas of the forward elimination and backward substitution algorithm for pentadiagonal linear equations and the matrix decomposition, a four parameter algorithm for quasi–pentadiagonal linear equations is proposed in this paper. It involves four steps. In the first step, the first two unknowns x_1, x_2 and the last two unknowns x_{n-1}, x_n are taken as the four parameters, which are responsible for the non–zero elements at corners of the quasi–pentadiagonal matrix. In the second step, other unknowns of the equations are expressed explicitly by the four parameters. Then the standard pentadiagonal linear equations can be formed with the help of special matrix decomposition and solved conveniently with the help of the forward elimination and backward substitution algorithm. In the third step, the four parameters are solved with the help of the first two equations and the last two equations with decomposed matrixes. At last, all unknowns are solved efficiently when the four parameters are substituted into the equations with the decomposed matrix. With this algorithm, two methods of solving the four parameters are presented in this paper. One is that all other unknowns are expressed explicitly by the four parameters. Then the four parameters are solved with the help of the first two equations and the last two equations. The other is that the four parameters are regarded as known quantities and are substituted into the 3~n–2 equations, which are to be solved. Then the four parameters can be solved when x_3, x_4, x_{n-3}, x_{n-2} are substituted into the first two equations and the last two equations. The computation cost of the two methods is almost the same for

收稿日期:2010-04-01;**修回日期**:2010-07-01

基金项目:河南师范大学青年基金项目(2008qk01)

作者简介:李文强,副教授,研究方向为数值线性代数,电子信箱:liwenqiangxx@126.com

large scale pentadiagonal equations. The stability analysis shows that the four parameter algorithm is stable if the coefficient matrix is a strictly diagonally dominant matrix. The numerical example indicates that the computational time of the two algorithms is consistent with the theoretical result.

Keywords quasi-pentadiagonal equations; forward elimination and backward substitution algorithm; four parameters algorithm

0 引言

在研究椭圆型方程边值问题、抛物型方程的边初值问题数值解法,以及 5 次样条插值等问题时,在利用紧致型高精度差分格式求解流体力学方程中的对流项和黏性项时[1-4],经常将问题归结为求解五对角线性方程组或拟五对角线性方程组。如何准确、高效地求解五对角线性方程组一直是计算数学研究的重点之一,尤其是瞬态/时变问题,每推进一个时间步,都需对相应的空间导数和偏导数进行数值求解。因此,提高求解五对角线性方程组的算法效率,将很大地缩短整个问题的计算时间。虽然五对角线性方程组的求解是一个古老的问题,但随着计算数学在各个行业中得到越来越广泛的应用,对该问题的求解又引起广大学者的重视。

近年来已有学者针对此问题给出了一些新的算法[1-2]。文献[2]给出五参数法求解拟五对角线性方程组,算术运算量约为 $O(49n)$。本文给出的四参数法算术运算量也约为 $O(49n)$,虽然计算量没有提高,但本算法只利用 4 个参数,算法过程较为简单,便于编程实施。四参数法是在文献[5]给出的并行求解拟三对角线性方程组算法推广到求解拟五对角线性方程组中,因此也容易实现并行计算。

1 算法分析

拟五对角线性方程组可以写成如下的矩阵形式:

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{f} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{R}^n,x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}\in R^n$,拟五对角矩阵 $A\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$。有

$$A=\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & \beta_1 & & & \alpha_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \beta_2 & & & \alpha_2 \\ \alpha_3 & a_3 & b_3 & c_3 & \beta_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} & & & \alpha_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ c_n & \beta_n & & & \alpha_n & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

当 $\alpha_1=\alpha_2=c_n=\beta_{n-1}=\beta_n=0$ 时,方程组为普通五对角线性方程组。

将系数矩阵进行分裂,有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}+\alpha_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_{n-1}^{\mathrm{T}}+(a_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}+(\beta_{n-1}\boldsymbol{e}_{n-1}+c_n\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}+\beta_n\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}$$

这里,$\boldsymbol{T}=\mathrm{diag}(\alpha_i,a_i,b_i,c_i,\beta_i),\boldsymbol{T}\in R^{n\times n}$ 是普通的五对角矩阵,$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_{n-1},\boldsymbol{e}_n$ 为单位向量。原方程方程组等价于

$$\boldsymbol{Tx}+\alpha_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{x}_{n-1}+(a_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2)x_n+(\beta_{n-1}\boldsymbol{e}_{n-1}+c_n\boldsymbol{e}_n)x_1+\beta_n\boldsymbol{e}_nx_2=\boldsymbol{f} \tag{2}$$

设 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{y},z\in R^n$ 分别满足:

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{Tu}=\alpha_1\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{Tv}=a_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{Tw}=\boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{Ty}=\beta_{n-1}\boldsymbol{e}_{n-1}+c_n\boldsymbol{e}_n & \boldsymbol{Tz}=\beta_n\boldsymbol{e}_n & \end{array} \tag{3}$$

则有

$$\boldsymbol{x}+x_1\boldsymbol{y}+x_2\boldsymbol{z}+x_{n-1}\boldsymbol{u}+x_n\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w} \tag{4}$$

将 x_1,x_2,x_{n-1},x_n 看作参数,取式(4)的第 $1,2,n-1,n$ 个方程,有

$$\begin{cases} (1+y_1)x_1+z_1x_2+u_1x_{n-1}+v_1x_n=w_1 \\ y_2x_1+(1+z_2)x_2+u_2x_{n-1}+v_2x_n=w_2 \\ y_{n-1}x_1+z_{n-1}x_2+(1+u_{n-1})x_{n-1}+v_{n-1}x_n=w_{n-1} \\ y_nx_1+z_nx_2+u_nx_{n-1}+(1+v_n)x_n=w_n \end{cases} \tag{5}$$

解出 x_1,x_2,x_{n-1},x_n,代入式(4),有

$$x_i=w_i-x_1y_i-x_2z_i-x_{n-1}u_i-x_nv_i\ (i=3,4,\cdots,n-2) \tag{6}$$

至此,得出求解拟五对角线性方程组的四参数解法。

2 算法过程

求解拟五对角线性方程组的四参数法的主要步骤如下。

步骤 1 用追赶法[1]求解式(3)中的 5 个五对角线性方程组,即解出向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{y},z\in R^n$。

1) 对五对角矩阵 $\boldsymbol{T}=\mathrm{diag}(\alpha_i,a_i,b_i,c_i,\beta_i)$进行 $\boldsymbol{LU}$ 分解。即计算矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{U}$,使得

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{LU}$$

这里,$\boldsymbol{L}=\mathrm{diag}(\alpha_i,g_i,p_i,0,0),\boldsymbol{U}=\mathrm{diag}(0,0,1,q_i,h_i)$。其中,

$$\begin{array}{l} p_1=b_1\quad q_1=c_1/p_1\quad h_1=\beta_1/p_1 \\ g_2=a_2\quad p_2=b_2-g_2q_1\quad q_2=(c_2-g_2h_1)/p_2\quad h_2=\beta_2/p_2 \\ g_i=a_i-\alpha_iq_{i-2}\quad p_i=b_i-\alpha_ih_{i-2}-g_iq_{i-1} \\ q_i=(c_i-g_ih_{i-1})/p_i\quad h_i=\beta_i/p_i\ (i=3,4,\cdots,n-2) \\ g_{n-1}=a_{n-1}-\alpha_{n-1}q_{n-3}\quad p_{n-1}=b_{n-1}-\alpha_{n-1}h_{n-3}-g_{n-1}q_{n-2} \\ q_{n-1}=(c_{n-1}-g_{n-1}h_{n-2})/p_{n-1} \\ g_n=a_n-\alpha_nq_{n-2}\quad p_n=b_n-\alpha_nh_{n-2}-g_nq_{n-1} \end{array}$$

2) 分别求解 $\boldsymbol{Tu}=\alpha_1\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{Tv}=a_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{Tw}=\boldsymbol{f},\boldsymbol{Ty}=\beta_{n-1}\boldsymbol{e}_{n-1}+c_n\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{Tz}=\beta_n\boldsymbol{e}_n$,得到 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{y},z$。

$$\begin{cases} u_1=\alpha_1/p_1,u_2=-g_2u_1/p_2 \\ u_i=(-\alpha_iu_{i-2}-g_iu_{i-1})/p_i\ (i=3,4,\cdots,n) \\ u_{n-1}=u_{n-1}-q_{n-1}u_n \\ u_j=u_j-q_ju_{j+1}-h_ju_{j+2}\ (j=n-2,n-3,\cdots,1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1=a_1/p_1,v_2=(\alpha_2-g_2v_1)/p_2 \\ v_i=(-\alpha_iv_{i-2}-g_iv_{i-1})/p_i\ (i=3,4,\cdots,n) \\ v_{n-1}=v_{n-1}-q_{n-1}v_n \\ v_j=v_j-q_jv_{j+1}-h_jv_{j+2}(j=n-2,n-3,\cdots,1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1=f_1/p_1,w_2=(f_2-g_2w_1)/p_2 \\ w_i=(f_i-\alpha_iw_{i-2}-g_iw_{i-1})/p_i\ (i=3,4,\cdots,n) \\ w_{n-1}=w_{n-1}-q_{n-1}w_n \\ w_j=w_j-q_jw_{j+1}-h_jw_{j+2}\ (j=n-2,n-3,\cdots,1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{n-1}=\beta_{n-1}/p_{n-1},y_n=(c_n-g_ny_{n-1})/p_n \\ y_{n-1}=y_{n-1}-q_{n-1}y_n \\ y_j=-q_jy_{j+1}-h_jy_{j+2}\ (j=n-2,n-3,\cdots,1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{n-1}=\beta_n/p_n \\ z_{n-1}=z_{n-1}-q_{n-1}z_n \\ z_j=-q_jz_{j+1}-h_jz_{j+2}\ (j=n-2,\ n-3,\cdots,1) \end{cases}$$

步骤 2　运用高斯列主元消去法求解四阶线性方程组(5),**即解出参数** x_1,x_2,x_{n-1},x_n。

步骤 3　用式(6)**依次解出** $x_i=w_i-x_1y_i-x_2z_i-x_{n-1}u_i-x_nv_i\ (i=3,4,\cdots,n-2)$。

算法运算量统计:乘除运算 $O(29n)$、**加减运算** $O(20n)$;**文献**[2]**的五参数法运算量情况:乘除运算** $O(29n)$、**加减运算** $O(20n)$。**两种算法的复杂度相同,但该算法思路明确,容易理解,且更多地运用了追赶法,求解差分方程具有良好的数值稳定性。该算法运用了文献**[5]**中讨论拟三对角线性方程组并行算法的基本思想,很方便地实现并行计算。**

3　算法的改进

在上面的算法分析中,虽然以 x_1,x_2,x_{n-1},x_n **为参数,以其余的** $n-4$ **个解分量为求解对象,但在求解过程中,方程的个数并没有减少。如果将** x_1,x_2,x_{n-1},x_n **分别代入到第** $3\sim n-2$ **个方程中,即得到如下的算法 2。**

代入 $x_1,\ x_2,\ x_{n-1},x_n$,**得到如下** $n-4$ **阶方程组:**

$$\tilde{T}\tilde{\boldsymbol{x}}=\tilde{\boldsymbol{f}}-x_1\alpha_3\boldsymbol{e}_1-x_2(a_3\boldsymbol{e}_1+\alpha_4\boldsymbol{e}_2)-x_{n-1}(\beta_{n-3}\boldsymbol{e}_{n-5}+c_{n-2}\boldsymbol{e}_{n-4})-x_n\beta_{n-2}\boldsymbol{e}_{n-4} \quad (7)$$

其中,$\tilde{T}=\mathrm{diag}(\alpha_i,a_i,b_i,c_i,\beta_i)\in R^{(n-4)\times(n-4)}(i=3,4,\cdots,n-2)$,$\tilde{\boldsymbol{x}}=(x_3,x_4,\cdots,x_{n-2})^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_{n-5},\boldsymbol{e}_{n-4}$ **为** $R^{(n-4)}$ **的单位向量**,$\tilde{\boldsymbol{f}}=(f_3,f_4,\cdots,f_{n-2})^{\mathrm{T}}$。

利用追赶法分别求出 $n-4$ **阶五对角线性方程组:]**

$$\tilde{T}\tilde{\boldsymbol{w}}=\tilde{\boldsymbol{f}} \qquad \tilde{T}\tilde{\boldsymbol{u}}=\alpha_3\boldsymbol{e}_1 \qquad \tilde{T}\tilde{\boldsymbol{v}}=a_3\boldsymbol{e}_1+\alpha_4\boldsymbol{e}_2$$
$$\tilde{T}\tilde{\boldsymbol{y}}=\beta_{n-3}\boldsymbol{e}_{n-5}+c_{n-2}\boldsymbol{e}_{n-4} \qquad \tilde{T}\tilde{\boldsymbol{z}}=\beta_{n-2}\boldsymbol{e}_{n-4} \quad (8)$$

其中,$\tilde{\boldsymbol{w}}=(w_1,w_2,\cdots,w_{n-4})^{\mathrm{T}}$,$\tilde{\boldsymbol{u}}=(u_1,u_2,\cdots,u_{n-4})^{\mathrm{T}}$,$\tilde{\boldsymbol{v}}=(v_1,v_2,\cdots,v_{n-4})^{\mathrm{T}}$,$\tilde{\boldsymbol{y}}=(y_1,y_2,\cdots,y_{n-4})^{\mathrm{T}}$,$\tilde{\boldsymbol{z}}=(z_1,z_2,\cdots,z_{n-4})^{\mathrm{T}}$。

因此,对于 $i=3,4,\cdots,n-2$,**有**

$$x_i=w_{i-2}-x_1u_{i-2}-x_2v_{i-2}-x_{n-1}y_{i-2}-x_nz_{i-2} \quad (9)$$

只需将式(9)**代入式**(1)**的前 2 个方程和最后 2 个方程中,即可得到** x_1,x_2,x_{n-1},x_n **为未知量的 4 阶方程组:**

$$\begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} & \xi_{14} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} & \xi_{24} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} & \xi_{34} \\ \xi_{41} & \xi_{42} & \xi_{43} & \xi_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{bmatrix} \quad (10)$$

这里,

$$\begin{cases} \xi_{11}=b_1-\beta_1u_1 \\ \xi_{21}=a_2-c_2u_1-\beta_2u_2 \\ \xi_{31}=\beta_{n-1}-\alpha_{n-1}u_{n-5}-a_{n-1}u_{n-4} \\ \xi_{41}=c_n-\alpha_nu_{n-4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi_{12}=c_1-\beta_1v_1 \\ \xi_{22}=b_2-c_2v_1-\beta_2v_2 \\ \xi_{32}=-\alpha_{n-1}v_{n-5}-a_{n-1}v_{n-4} \\ \xi_{42}=\beta_n-\alpha_nv_{n-4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_{13}=\alpha_1-\beta_1y_1 \\ \xi_{23}=-c_2y_1-\beta_2y_2 \\ \xi_{33}=b_{n-1}-\alpha_{n-1}y_{n-5}-a_{n-1}y_{n-4} \\ \xi_{43}=a_n-\alpha_ny_{n-4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi_{14}=a_1-\beta_1z_1 \\ \xi_{24}=\alpha_2-c_2z_1-\beta_2z_2 \\ \xi_{34}=c_{n-1}-\alpha_{n-1}z_{n-5}-a_{n-1}z_{n-4} \\ \xi_{44}=b_n-\alpha_nz_{n-4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \zeta_1=f_1-\beta_1w_1 \\ \zeta_2=f_2-c_2w_1-\beta_2w_2 \\ \zeta_3=f_{n-1}-\alpha_{n-1}w_{n-5}-a_{n-1}w_{n-4} \\ \zeta_4=f_n-\alpha_nw_{n-4} \end{cases}$$

当 n **充分大时,改进后的算法运算复杂性与未改进前没有区别。但当** n **较小时,将** n **阶方程组分成一个** $n-4$ **阶和一个 4 阶的方程组求解,对于手算而言较为方便。**

4　算法的数值稳定性

算法的主要运算源于五对角线性方程组的追赶法,因此算法的数值稳定性条件就是追赶法的稳定性条件。关于追赶法的数值稳定性,给出下列两个结论。

定理 1　如果 $T=\mathrm{diag}(\alpha_i,a_i,b_i,c_i,\beta_i)$ **是严格对角占优的,则** $U=\mathrm{diag}(0,0,1,q_i,h_i)$ **也是严格对角占优的。**

证明　因 $|b_1|>|c_1|+|\beta_1|$,$p_1=b_1$,**则** $|q_1|+|h_1|=(|c_1|+|\beta_1|)/|b_1|<1$。

因 $|b_2|>|a_2|+|c_2|+|\beta_2|$,$g_2=a_2$,$p_2=b_2-g_2q_1$,**则** $|q_2|+|h_2|<1$。**这是因**

$$|q_2|+|h_2|=\frac{|c_2-g_2h_1|+|\beta_2|}{|p_2|}\leqslant\frac{|c_2|+|a_2||h_1|+|\beta_2|}{|b_2|-|a_2||q_1|}<\frac{|b_2|-|a_2|+|a_2||h_1|}{|b_2|-|a_2||q_1|}<\frac{|b_2|-|a_2||q_1|}{|b_2|-|a_2||q_1|}=1。$$

下面用数学归纳法证明 $|q_i|+|h_i|<1\ (i=3,4,\cdots,n-2)$。

首先,由 $|b_3|>|\alpha_3|+|a_3|+|c_3|+|\beta_3|$,$g_3=a_3-\alpha_3q_1$,$p_3=b_3-\alpha_3h_1-g_3q_2$,**可以推导出:**

$$|q_3|+|h_3|=\frac{|c_3-g_3h_2|+|\beta_3|}{|p_3|}\leqslant\frac{|c_3|+|g_3||h_2|+|\beta_3|}{|b_3|-|\alpha_3||h_1|-|g_3||q_2|}$$
$$\leqslant\frac{|c_3|+|a_3||h_2|+|\alpha_3||q_1||h_2|+|\beta_3|}{|b_3|-|\alpha_3||h_1|-|a_3||q_2|-|\alpha_3||q_1||q_2|}$$
$$<\frac{|b_3|-|a_3|-|\alpha_3|+|a_3||h_2|+|\alpha_3||q_1||h_2|}{|b_3|-|\alpha_3||h_1|-|a_3||q_2|-|\alpha_3||q_1||q_2|}$$
$$<\frac{|b_3|-|a_3||q_2|-|\alpha_3|+|\alpha_3||q_1|-|\alpha_3||q_1||q_2|}{|b_3|-|\alpha_3||h_1|-|a_3||q_2|-|\alpha_3||q_1||q_2|}$$
$$<\frac{|b_3|-|a_3||q_2|-|\alpha_3||h_1|-|\alpha_3||q_1||q_2|}{|b_3|-|\alpha_3||h_1|-|a_3||q_2|-|\alpha_3||q_1||q_2|}=1$$

归纳假设对于 $3<i\leqslant n-2$,**有** $|q_{i-1}|+|h_{i-1}|<1$,**则**

$$|q_i|+|h_i|=\frac{|c_i-g_ih_{i-1}|+|\beta_i|}{|p_i|}\leqslant\frac{|c_i|+|g_i||h_{i-1}|+|\beta_i|}{|b_i|-|\alpha_i||h_{i-2}|-|g_i||q_{i-1}|}$$
$$\leqslant\frac{|c_i|+|a_i||h_{i-1}|+|\alpha_i||q_{i-2}||h_{i-1}|+|\beta_i|}{|b_i|-|\alpha_i||h_{i-2}|-|a_i||q_{i-1}|-|\alpha_i||q_{i-2}||q_{i-1}|}$$
$$<\frac{|b_i|-|a_i|-|\alpha_i|+|a_i||h_{i-1}|+|\alpha_i||q_{i-2}||h_{i-1}|}{|b_i|-|\alpha_i||h_{i-2}|-|a_i||q_{i-1}|-|\alpha_i||q_{i-2}||q_{i-1}|}$$
$$<\frac{|b_i|-|a_i||q_{i-1}|-|\alpha_i|+|\alpha_i||q_{i-2}|-|\alpha_i||q_{i-2}||q_{i-1}|}{|b_i|-|\alpha_i||h_{i-2}|-|a_i||q_{i-1}|-|\alpha_i||q_{i-2}||q_{i-1}|}$$
$$<\frac{|b_i|-|a_i||q_{i-1}|-|\alpha_i||h_{i-2}|-|\alpha_i||q_{i-2}||q_{i-1}|}{|b_i|-|\alpha_i||h_{i-2}|-|a_i||q_{i-1}|-|\alpha_i||q_{i-2}||q_{i-1}|}=1$$

最后,

$$|q_{n-1}|\leqslant\frac{|c_{n-1}|+|g_{n-1}||h_{n-2}|}{|p_{n-1}|}$$
$$\leqslant\frac{|c_{n-1}|+|a_{n-1}||h_{n-2}|+|\alpha_{n-1}||q_{n-3}||h_{n-2}|}{|b_{n-1}|-|\alpha_{n-1}||h_{n-3}|-|a_{n-1}||q_{n-2}|-|\alpha_{n-1}||q_{n-3}||q_{n-2}|}$$

$$<\frac{|b_{n-1}|-|\alpha_{n-1}|-|a_{n-1}|+|a_{n-1}|}{|b_{n-1}|-|\alpha_{n-1}|}\frac{|h_{n-2}|+|\alpha_{n-1}|}{|h_{n-3}|-|a_{n-1}|}\frac{|q_{n-3}|}{|q_{n-2}|-|\alpha_{n-1}|}\frac{|h_{n-2}|}{|q_{n-3}|}\frac{}{|q_{n-2}|}$$

$$<\frac{|b_{n-1}|-|a_{n-1}|}{|b_{n-1}|-|\alpha_{n-1}|}\frac{|q_{n-2}|-|\alpha_{n-1}|}{|h_{n-3}|-|a_{n-1}|}\frac{|h_{n-3}|-|\alpha_{n-1}|}{|q_{n-2}|-|\alpha_{n-1}|}\frac{|q_{n-3}|}{|q_{n-3}|}\frac{|q_{n-2}|}{|q_{n-2}|}=1$$

证毕。

定理 2 如果 $T=\mathrm{diag}(\alpha_i,a_i,b_i,c_i,\beta_i)$是严格对角占优且 $|\alpha_i|+|a_i|\leqslant|b_i|/2(i=3,4,\cdots,n)$,则 $L=\mathrm{diag}(\alpha_i,g_i,p_i,0,0)$满足$|g_i|<|p_i|$。

证明 当 $i=2$ 时,$g_2=a_2$,T 是严格对角占优的,故有$|g_2|<|p_2|$。对于 $i=3,4,\cdots,n$,由定理条件假设和定理 1 结论,有

$$|g_i|=|a_i-\alpha_i q_{i-2}|\leqslant|a_i|+|\alpha_i|\quad(i=3,4,\cdots,n)$$

从而有

$$|p_i|-|g_i|=|b_i-\alpha_i h_{i-2}-g_i q_{i-1}|-|a_i-\alpha_i q_{i-2}|$$
$$\geqslant|b_i|-|\alpha_i|(|h_{i-2}|+|q_{i-2}|)-|g_i||q_{i-1}|-|a_i|$$

由定理 1 知,对于 $i=3,4,\cdots,n$,$|h_{i-2}|+|q_{i-2}|<1$,$|q_{i-1}|<1$。注意到$|\alpha_i|+|a_i|\leqslant|b_i|/2$ 和$|g_i|=|a_i-\alpha_i q_{i-2}|\leqslant|a_i|+|\alpha_i|$,得出

$$|p_i|-|g_i|>|b_i|-|\alpha_i|-|g_i|-|a_i|>|b_i|-2(|\alpha_i|+|a_i|)\geqslant0$$

证毕。

5 数值实验

利用紧致差分格式对一阶导数进行差分离散,一般可以写成如下形式[3-4]:

$$\beta f'_{i-2}+\alpha f'_{i-1}+f'_i+\alpha f'_{i+1}+\beta f'_{i+2}=c\frac{f_{i+3}-f_{i-3}}{6h}+b\frac{f_{i+2}-f_{i-2}}{4h}+a\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h}$$

当系数 $\beta=1/20$,$\alpha=1/2$,$a=17/12$,$b=101/150$,$c=1/100$ 时,精度可达 10 阶。

例 设函数 $f(x)=\sin x$,等距剖分区间$[0,2\pi]$:$h=2\pi/n$,$x_i=ih\ (i=0,1,2,\cdots,n)$。对应函数值为 $f_i=f(x_i)(i=0,1,2,\cdots,n)$。利用紧致差分格式计算导函数值 $f'_i=f'(x_i)(i=0,1,2,\cdots,n)$。

显然,存在周期性边界条件:$f_i=f_{n+i}\ (i=-2,-1,0,1,2,3)$,$f'_i=f'_{n+i}\ (i=-1,0,1,2)$,从而差分方程写为

$$\begin{bmatrix}1&\alpha&\beta&&&\beta&\alpha\\ \alpha&1&\alpha&\beta&&&\beta\\ \beta&\alpha&1&\alpha&\beta&&\\ &\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\\ &&\beta&\alpha&1&\alpha&\beta\\ \beta&&&\beta&\alpha&1&\alpha\\ \alpha&\beta&&&\beta&\alpha&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f'_1\\ f'_2\\ f'_3\\ \vdots\\ f'_{n-2}\\ f'_{n-1}\\ f'_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\\ \vdots\\ d_{n-2}\\ d_{n-1}\\ d_n\end{bmatrix}$$

其中,$d_i=c\frac{f_{i+3}-f_{i-3}}{6h}+b\frac{f_{i+2}-f_{i-2}}{4h}+a\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h}\ (i=1,2,\cdots,n)$。

同时,用上述两个算法分别计算此算例。数值试验平台是曙光天阔 W560I 工作站(Intel Xeron 2.33GHz CPU,4GB 内存),操作系统为 Windows Server 2003,使用 Fortran 语言编程,数据类型为双精度浮点型。计算结果如表 1 所示。

根据算法对不同阶数的方程组求解所用的时间,也充分说明了算法的计算时间与方程组阶数 n 是线性的关系,与理论分析的算术计算量 $O(49n)$完全吻合。

表 1 拟五对角方程组的求解时间

Table 1 Computational time for solving the quasi-pentadiagonal equations

方程组阶数/10^6	1	2	4	6
算法 1 时间 t_1/s	3.4688	6.9688	13.922	20.906
算法 2 时间 t_2/s	3.4844	6.9688	13.922	20.891
方程组阶数/10^6	8	10	12	
算法 1 时间 t_1/s	27.859	34.844	41.844	
算法 2 时间 t_2/s	27.844	34.797	41.766	

6 结论

拟五对角线性方程组是科学与工程计算中的一个常见问题,通常采用传统的高斯消元法或迭代算法进行求解,针对五对角线性方程组的特点设计的专门算法还不是很多。本文给出了求解拟五对角线性方程组的四参数法,同时对算法的数值稳定性进行了较详细的分析论证。在求解拟五对角线性方程组时,总的算数运算量为 $O(49n)$。数值试验结果也表明,对于百万阶的拟五对角线性方程组,本算法都可以在几秒内给出准确结果。还需要指出的是,该算法基本思想是并行求解三对角线性方程组算法的推广。因此,极容易转换成并行算法,实现五对角或拟五对角线性方程组的并行计算。

参考文献(References)

[1] 王礼广, 蔡放, 熊岳山. 五对角线性方程组追赶法 [J]. 南华大学学报: 自然科学版, 2008, 22(1): 1–4.

Wang Liguang, Cai Fang, Xiong Yueshan. *Journal of University of South China: Science and Technology Edition*, 2008, 22(1): 1–4.

[2] 王晶昕, 薛静. 用五参数法求解拟五对角方程组 [J]. 吉林师范大学学报: 自然科学版, 2008, 29(2): 5–8.

Wang Jingxin, Xue Jing. *Jilin Normal University Journal: Natural Science Edition*, 2008, 29(2): 5–8.

[3] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution [J]. *J Comp Phys*, 1992, 103: 16–42.

[4] Santhanam N, Lele S K, Ferziger J H. A robust high-order compact method for large eddy simulation[J]. *J Comp Phys*, 2003, 191: 392–419.

[5] 李文强, 刘晓. 追赶法并行求解循环三对角方程组[J]. 科技导报, 2009, 27(18): 90–93.

Li Wenqiang, Liu Xiao. *Science & Technology Review*, 2009, 27(18): 90–93.

(责任编辑 代而)

本期推理小游戏答案

聪明的俘虏回答:我来这里是为了服毒死去。听了俘虏的回答,执法官顿时傻了眼,不知道如何是好。因为如果真的毒死这个俘虏,那么这个俘虏说的是真话,而说了真话是要被烧死的。可是如果把这人烧死,那他的话就是假话,而说假话的是要被毒死的。执法官不好处理,只好上报国王判决。国王苦思冥想了半天也没想出办法,最后只好把这个俘虏放了。