

最大差值极小化的响应面函数拟合方法

郑小龙, 叶红玲, 隋允康, 宇慧平

北京工业大学机械工程与应用电子技术学院工程数值模拟中心, 北京 100124

摘要 为了满足实际工程问题中响应函数与样本值最大距离极小化的需求, 本文提出一种新的响应面函数的拟合方法。该方法将样本点的响应面函数拟合问题转换为求解一类线性规划问题。建立数学模型, 采用数值方法拟合出一次和二次响应面函数的表达式。通过多个数值算例, 与 K-S 函数法实现最大差值极小化拟合的响应面函数结果以及最小二乘法拟合响应面结果进行比较, 本文方法均得到较小的最大离差值, 结果表明该方法的可行性和有效性, 丰富了响应面的构造方法。

关键词 响应面方法; 最大差值极小化; 线性规划; 响应面函数拟合

中图分类号 TH122

文献标识码 A

文章编号 1000-7857(2010)17-0036-06

The Fitting of Response Surface Function with Maximum Difference Minimization Method

ZHENG Xiaolong, YE Hongling, SUI Yunkang, YU Huiping

Numerical Simulation Center for Engineering, College of Mechanical Engineering and Applied Electronics Technology, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China

Abstract In order to meet the requirements of minimizing the maximum distance between the response function and the sample values in practical engineering problems, a new method of fitting the response surface function is proposed in this paper. The problem of fitting the response surface function with sample points is transformed into one of solving a linear programming problem in this method. A mathematical model about sample points is established. Linear and quadratic response surface function expressions are fitted by numerical methods. Comparing the fitted results of minimizing the maximum difference by the Kreisselmerier-Steinhauser (K-S) function method and those by the least squares method, the method used in this paper give results better agreed with those of the K-S function method, with the maximum differences smaller than that of the least squares method. Four numerical examples show that this method is reasonable and effective. In addition, this method provides a new constructing method for the response surface function.

Keywords response surface method; minimize the maximum difference; linear programming; fitting response surface function

0 引言

响应面方法(response surface methodology)是一种常用的优化算法,是数学方法和统计方法相结合的产物,可以对受多个变量影响的响应问题进行建模和分析,并优化该响应值^[1]。响应面法综合运用了多项式拟合、Rackwite-Fiessler法和重

点抽样 Monte-Carlo法,并与有限元方法相结合,在求解问题的能力、算法的精度、效率等方面具有优越性,可在大型复杂工程结构可靠性分析中推广应用^[2],如 Oudjene等^[3]运用移动最小二乘法建立的响应面进行形状优化。工程实际应用时,常要将实体实验或数值实验获得的数据点进行拟合,得到响

收稿日期:2010-05-06;修回日期:2010-08-17

基金项目:国家自然科学基金项目(10872012);北京自然科学基金项目(3093019);北京市教委项目(KM200910005005);大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室基金项目(GZ0819)

作者简介:郑小龙(中国科协所属全国学会个人会员登记号:S030105017),硕士研究生,研究方向为结构优化,电子信箱:zhengxiaolong@emails.bjut.edu.cn;隋允康(通信作者,中国科协所属全国学会个人会员登记号:S030000050S,S030105001M),教授,研究方向为结构与多学科优化、智能控制,电子信箱:ysui@bjut.edu.cn

应面函数, 响应面函数的形式将影响响应面方法的精度^[4]。Irfan 和 Chris^[5]提出了不含交叉项的二次加权响应面, 该响应面在设计点处有较好近似, 但由于没有加入交叉项, 精度降低; Henri 和 Siu^[6]提出了使用高阶极限状态方程的响应面, 但由于实际情况下的极限状态方程阶次未知, 采用高阶形式可能会导致结果完全错误。

能否为响应面方法提出更多的构造途径, 从而丰富响应面理论和方法的研究, 同时为工程增加更广泛的选择呢? 现有的响应面方法通常采用最小二乘法, 即拟合值与样本值在各点的残差平方和最小确定响应系数。文献[7]通过精确映射反演方法, 给出了处理最大值极小问题的统一方法。本文借助精确映射反演方法, 建立了数学模型, 将样本点的响应面函数拟合问题转换为求解一类线性规划问题, 采用数值方法研究了一次响应面函数和二次带交叉项响应面函数的拟合问题。通过多个数值算例进行比较, 结果发现, 本文方法实现的最大离差值极小化与利用 K-S 函数法的结果一致, 最大离差值较最小二乘法得到的结果更小, 表明了该方法的可行性与有效性, 丰富了响应面的构造方法。

1 最大差值极小化一次响应面函数的拟合

1.1 最大差值极小化一次拟合响应面函数原理

响应面方法是一种统计方法, 其基本思想是用一个具有明确表达形式的多项式近似表达隐藏的功能函数, 从而寻找到输入变量值的变异或者不确定性之后的最佳响应值。在某点附近构造响应面函数, 采用一次响应面函数逼近原函数。

对于未知函数 $f(x), x \in E^n$, 采用无穷模构造响应面。取 K 个样本点 $x^{(k)}$, 样本值为 $f^{(k)}=f(x^{(k)})(k=1, 2, \dots, K), K \geq n+1$ 。令 $\alpha \in E^{n+1}$, 线性响应面函数取为

$$\tilde{f}(x, \alpha) = \alpha_1 + \sum_{i=1}^n \alpha_{i+1} x_i \quad (1)$$

样本最大离差值可表示为

$$\delta = \max_k \left| \tilde{f}(x^{(k)}, \alpha) - f^{(k)} \right| \quad (2)$$

建立使得样本最大离差值极小化的数学模型, 其形式为

$$\begin{cases} \text{求} & \delta \in E^1, \alpha \in E^{n+1} \\ \text{使} & \delta \rightarrow \min \\ \text{st} & -\delta \leq \tilde{f}(x^{(k)}, \alpha) - f^{(k)} \leq \delta \\ & \delta \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

式(3)可化为

$$\begin{cases} \text{求} & \delta \in E^1, \alpha \in E^{n+1} \\ \text{使} & \delta \rightarrow \min \\ \text{st} & -\delta - \alpha_1 - \sum_{i=1}^n \alpha_{i+1} x_i^{(k)} \leq -f^{(k)} \\ & -\delta + \alpha_1 + \sum_{i=1}^n \alpha_{i+1} x_i^{(k)} \leq f^{(k)} \\ & \delta \geq 0 \quad (k=1, 2, \dots, K) \end{cases} \quad (4)$$

为了使线性规划的变量非负化, 引入

$$\alpha_i = \beta_i - \gamma_i \quad (\beta_i \geq 0, \gamma_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n+1) \quad (5)$$

将式(5)代入式(4), 得

$$\begin{cases} \text{求} & \delta \in E^1, \beta_i, \gamma_i \in E^{n+1} \\ \text{使} & \delta \rightarrow \min \\ \text{st} & -\delta - \beta_1 + \gamma_1 - \sum_{i=1}^n \beta_{i+1} x_i^{(k)} + \sum_{i=1}^n \gamma_{i+1} x_i^{(k)} \leq -f^{(k)} \\ & -\delta + \beta_1 - \gamma_1 + \sum_{i=1}^n \beta_{i+1} x_i^{(k)} - \sum_{i=1}^n \gamma_{i+1} x_i^{(k)} \leq f^{(k)} \\ & \delta \geq 0 \quad (k=1, 2, \dots, K) \end{cases} \quad (6)$$

将模型(6)中的两个约束条件写成分表表达式的形式:

$$\begin{cases} -\delta - \beta_1 - \beta_2 x_1^{(1)} - \dots - \beta_{n+1} x_n^{(1)} + \gamma_1 + \gamma_2 x_1^{(1)} + \dots + \gamma_{n+1} x_n^{(1)} \leq -f^{(1)} \\ -\delta - \beta_1 - \beta_2 x_1^{(2)} - \dots - \beta_{n+1} x_n^{(2)} + \gamma_1 + \gamma_2 x_1^{(2)} + \dots + \gamma_{n+1} x_n^{(2)} \leq -f^{(2)} \\ \vdots \\ -\delta - \beta_1 - \beta_2 x_1^{(K)} - \dots - \beta_{n+1} x_n^{(K)} + \gamma_1 + \gamma_2 x_1^{(K)} + \dots + \gamma_{n+1} x_n^{(K)} \leq -f^{(K)} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} -\delta + \beta_1 + \beta_2 x_1^{(1)} + \dots + \beta_{n+1} x_n^{(1)} - \gamma_1 - \gamma_2 x_1^{(1)} - \dots - \gamma_{n+1} x_n^{(1)} \leq f^{(1)} \\ -\delta + \beta_1 + \beta_2 x_1^{(2)} + \dots + \beta_{n+1} x_n^{(2)} - \gamma_1 - \gamma_2 x_1^{(2)} - \dots - \gamma_{n+1} x_n^{(2)} \leq f^{(2)} \\ \vdots \\ -\delta + \beta_1 + \beta_2 x_1^{(K)} + \dots + \beta_{n+1} x_n^{(K)} - \gamma_1 - \gamma_2 x_1^{(K)} - \dots - \gamma_{n+1} x_n^{(K)} \leq f^{(K)} \end{cases} \quad (8)$$

将式(7)和式(8)写成矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -x_1^{(1)} & \dots & -x_n^{(1)} & 1 & x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ -1 & -1 & -x_1^{(2)} & \dots & -x_n^{(2)} & 1 & x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -x_1^{(K)} & \dots & -x_n^{(K)} & 1 & x_1^{(K)} & \dots & x_n^{(K)} \\ -1 & 1 & x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & -1 & -x_1^{(1)} & \dots & -x_n^{(1)} \\ -1 & 1 & x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & -1 & -x_1^{(2)} & \dots & -x_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 1 & x_1^{(K)} & \dots & x_n^{(K)} & -1 & -x_1^{(K)} & \dots & -x_n^{(K)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n+1} \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n+1} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -f^{(1)} \\ \vdots \\ -f^{(K)} \\ f^{(1)} \\ \vdots \\ f^{(K)} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\text{令 } I = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]_{K \times 1}^T, X = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(K)} & \dots & x_n^{(K)} \end{bmatrix}_{K \times n}$$

$$\begin{aligned} U &= [\delta \quad \beta_1 \quad \dots \quad \beta_{n+1} \quad \gamma_1 \quad \dots \quad \gamma_{n+1}]_{(2n+3) \times 1}^T, \\ F &= [-f^{(1)} \quad \dots \quad -f^{(K)} \quad f^{(1)} \quad \dots \quad f^{(K)}]_{E \times 1}^T, \\ A &= \begin{bmatrix} -I & -I & -X & I & X \\ -I & I & -X & -I & -X \end{bmatrix}, \text{矩阵(9)可以简写为} \\ & \quad AU \leq F \end{aligned} \quad (10)$$

模型(6)转化为线性规划形式:

$$\begin{cases} \text{求 } \delta \in E^1, \beta, \gamma \in E^{n+1} \\ \text{使 } \delta \rightarrow \min \\ \text{st } AU \leq F \\ U \geq 0 \end{cases} \quad (11)$$

求待定系数 $\delta, \beta_1, \dots, \beta_{n+1}, \gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}$, 共有 $2n+3$ 个未知量。

1.2 最大差值极小化拟合一次响应面函数的算例

算例 1 一次响应面, 1 个因素, 10 个样本点。样本点及样本值如表 1 所示。

经过本文最大差值极小化方法运算, 拟合的函数表达式为

$$y=1.925370+2.462690x_1 \quad (12)$$

表 1 算例 1 样本点和样本值基本数据

Table 1 Sample points and basic data of sample values in example 1

样本点序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
样本点	0.2	1.2	2.3	3.1	4.3	5.1	5.9	7.1	8.3	9.0
样本值	4.2	6.7	10.5	11.0	12.0	12.5	15.2	16.5	25.0	27.0

利用 K-S 函数法实现最大差值极小化拟合^[8]的函数表达式为

$$y=1.9566+2.4593x_1 \quad (13)$$

利用最小二乘法拟合的函数表达式为

$$y=3.2157+2.3321x_1 \quad (14)$$

算例 1 中各方法拟合得到的函数表达式的比较如图 1 所示, 各拟合方法的最小的最大离差值比较如表 2 所示。表 2 中, 第 4, 5, 6 列对应样本点的行减去相应的样本值, 得到差值的绝对值, 从中找出各自差值绝对值的最大值, 该值即为最小的最大离差值, 取 3 个最大值中最小的为基准值, 其他最大值与基准值的差值的绝对值与基准值的比值为相对误差。可以看出, 采用本文方法、K-S 函数方法和最小二乘法拟合结果非常相似, 但是本文方法最大样本离差值最小, 更能满足工程要求。

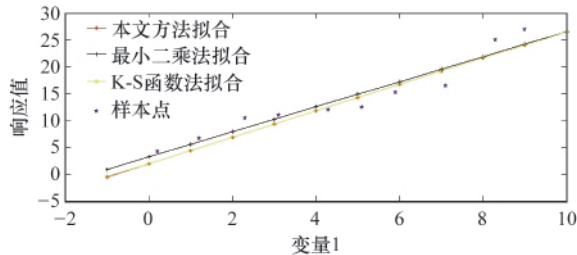


图 1 算例 1 中 3 种方法拟合结果比较

Fig. 1 Comparison of fitted results of the three response surface methods in example 1

算例 2 一次响应面, 2 个因素, 5 个样本点。样本点及样本值如表 3 所示。

利用本文方法拟合的函数表达式为

$$y=-0.150000+2.000000x_1+3.000000x_2 \quad (15)$$

利用 K-S 函数法实现最大差值极小化拟合^[8]的函数表达式为

$$y=-0.15013+2.000000x_1+3.0001x_2 \quad (16)$$

通过最小二乘法拟合的函数表达式为

$$y=-0.15525+2.0019x_1+3.004x_2 \quad (17)$$

算例 2 中各方法拟合的响应面函数的比较如图 2 所示, 从中可以看出, 本文方法、K-S 函数方法和最小二乘法的拟合

表 2 算例 1 中 3 种方法的最小的最大离差值比较

Table 2 Comparison of results of minimizing the maximum difference by three methods in example 1

序号	样本点	样本值	最小二乘法响应值	K-S 函数法响应值	本文方法响应值
1	0.2	4.2	3.6821	2.4485	2.4179
2	1.2	6.7	6.0142	4.9078	4.8806
3	2.3	10.5	8.5795	7.6130	7.5896
4	3.1	11.0	10.4452	9.5804	9.5597
5	4.3	12.0	13.2437	12.5316	12.5149
6	5.1	12.5	15.1094	14.4990	14.4851
7	5.9	15.2	16.9751	16.4665	16.4552
8	7.1	16.5	19.7736	19.4176	19.4105
9	8.3	25.0	22.5721	22.3688	22.3657
10	9.0	27.0	24.2046	24.0903	24.0896
最小的最大离差值			3.2736	2.9176	2.9105
最小的最大离差值相对误差			0.1248	0.0024	0

表 3 算例 2 样本点及样本值基本数据

Table 3 Sample points and basic data of sample values in example 2

样本点序号	1	2	3	4	5
样本点 x_1	1.1	1.0	2.1	3.0	3.1
样本点 x_2	1.0	2.1	2.0	1.1	2.0
样本值 f	5.1	8.1	10.1	9.1	12.1

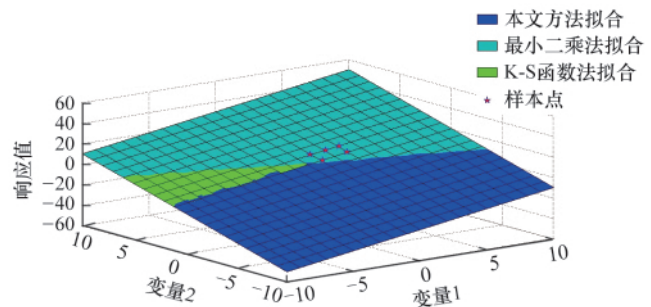


图 2 算例 2 中 3 种方法拟合结果的比较

Fig. 2 Comparison of fitted results by three response surface methods in example 2

结果大致一样。各拟合方法最小的最大离差值比较如表 4 所示, 本文方法拟合得到最大样本离差值最小, K-S 函数法拟合结果次小, 最小二乘法拟合结果最大。本文最大差值极小化方法拟合响应面更能满足工程要求。

表 4 算例 2 中 3 种方法的最小的最大离差值比较

Table 4 Comparison of results of minimizing the maximum difference by three methods in example 2

序号	样本点	样本值	最小二乘法响应值	K-S 函数法响应值	本文方法响应值
1	1.1	1.0	5.1	5.0508	5.05
2	1.0	2.1	8.1	8.1551	8.15
3	2.1	2.0	10.1	10.0567	10.05
4	3.0	1.1	9.1	9.1548	9.15
5	3.1	2.0	12.1	12.0586	12.05
最小的最大离差值			0.0551	0.0501	0.05
最小的最大离差值相对误差			0.102	0.002	0

2 最大差值极小化二次响应面函数的拟合

2.1 最大差值极小化拟合二次响应面函数原理

为了使获得的响应面在某点附近比一次响应面更好地逼近原函数, 采用二次响应面函数逼近。假设对于任意 $x \in E^k$, 真实的响应函数为 $y=f(x)$, 则近似的二次函数为

$$\tilde{f}(x, \alpha) = \alpha_1 + \sum_{i=1}^n \alpha_{i+1} x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} x_i x_j \quad (18)$$

其中, α_1 为常数项待定系数, α_{i+1} 为一次项待定系数, α_{ij} 为二次项待定系数。为了区分完全二次项和交叉二次项, 式(18)写成如下形式:

$$\tilde{f}(x, \alpha) = \alpha_1 + \sum_{i=1}^n \alpha_{i+1} x_i + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \alpha_{ij} x_i x_j \quad (19)$$

为了拟合方便, 通过变量代换将近似的二次函数转化为增维的线性形式。做如下变量代换:

$$\begin{cases} x_0=1 \\ x_1=x_1, x_2=x_2, \dots, x_n=x_n \\ x_{n+1}=x_1^2, x_{n+2}=x_2^2, \dots, x_{2n}=x_n^2 \\ x_{2n+1}=x_1 x_2, x_{2n+2}=x_1 x_3, \dots, x_{n(n+3)/2}=x_{n-1} x_n \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \delta_1=\alpha_1 \\ \delta_2=\alpha_2, \delta_3=\alpha_3, \dots, \delta_n=\alpha_n \\ \delta_{n+1}=\alpha_{n+1}, \delta_{n+2}=\beta_1, \dots, \delta_{2n}=\beta_{n-1} \\ \delta_{2n+1}=\beta_n, \delta_{2n+2}=\alpha_{12}, \dots, \delta_{n(n+3)/2+1}=\alpha_{(n-1)n} \end{cases} \quad (21)$$

将式(20)、式(21)代入式(19), 增维的线性形式为

$$\tilde{f}(x, \delta) = \delta_1 + \sum_{i=1}^m \delta_{i+1} x_i \quad (22)$$

其中, δ_i 为待定系数; x_i 的个数 m 视近似函数的形式而定, $m=n(n+3)/2$ 。

为了使线性规划的变量非负化, 由此再引入

$$\delta_i = \eta_i - \gamma_i \quad (\eta_i \geq 0, \gamma_i \geq 0; i=1, 2, \dots, m+1) \quad (23)$$

令 $\psi = \max_k |\tilde{f}(x^{(k)}, \delta) - f^{(k)}| \rightarrow \min$, 构造模型如下:

$$\begin{cases} \text{求 } \psi \in E^1, \eta_i, \gamma_i \in E^{m+1} \\ \text{使 } \psi \rightarrow \min \\ \text{st } -\psi - \eta_1 + \gamma_1 - \sum_{i=1}^n \eta_{i+1} x_i^{(k)} + \sum_{i=1}^n \gamma_{i+1} x_i^{(k)} \leq -f^{(k)} \\ -\psi + \eta_1 - \gamma_1 + \sum_{i=1}^n \eta_{i+1} x_i^{(k)} - \sum_{i=1}^n \gamma_{i+1} x_i^{(k)} \leq f^{(k)} \\ \psi \geq 0 \quad (k=1, 2, \dots, K) \end{cases} \quad (24)$$

将上述模型约束展开, 有

$$\begin{cases} -\psi - \eta_1 - \eta_2 x_1^{(1)} - \dots - \eta_{n+1} x_n^{(1)} + \gamma_1 + \gamma_2 x_1^{(1)} + \dots + \gamma_{n+1} x_n^{(1)} \leq -f^{(1)} \\ -\psi - \eta_1 - \eta_2 x_1^{(2)} - \dots - \eta_{n+1} x_n^{(2)} + \gamma_1 + \gamma_2 x_1^{(2)} + \dots + \gamma_{n+1} x_n^{(2)} \leq -f^{(2)} \\ \vdots \\ -\psi - \eta_1 - \eta_2 x_1^{(K)} - \dots - \eta_{n+1} x_n^{(K)} + \gamma_1 + \gamma_2 x_1^{(K)} + \dots + \gamma_{n+1} x_n^{(K)} \leq -f^{(K)} \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} -\psi + \eta_1 + \eta_2 x_1^{(1)} + \dots + \eta_{n+1} x_n^{(1)} - \gamma_1 - \gamma_2 x_1^{(1)} - \dots - \gamma_{n+1} x_n^{(1)} \leq f^{(1)} \\ -\psi + \eta_1 + \eta_2 x_1^{(2)} + \dots + \eta_{n+1} x_n^{(2)} - \gamma_1 - \gamma_2 x_1^{(2)} - \dots - \gamma_{n+1} x_n^{(2)} \leq f^{(2)} \\ \vdots \\ -\psi + \eta_1 + \eta_2 x_1^{(K)} + \dots + \eta_{n+1} x_n^{(K)} - \gamma_1 - \gamma_2 x_1^{(K)} - \dots - \gamma_{n+1} x_n^{(K)} \leq f^{(K)} \end{cases} \quad (26)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -x_1^{(1)} & \dots & -x_n^{(1)} & 1 & x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ -1 & -1 & -x_1^{(2)} & \dots & -x_n^{(2)} & 1 & x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -x_1^{(K)} & \dots & -x_n^{(K)} & 1 & x_1^{(K)} & \dots & x_n^{(K)} \\ -1 & 1 & x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & -1 & -x_1^{(1)} & \dots & -x_n^{(1)} \\ -1 & 1 & x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & -1 & -x_1^{(2)} & \dots & -x_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 1 & x_1^{(K)} & \dots & x_n^{(K)} & -1 & -x_1^{(K)} & \dots & -x_n^{(K)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{n+1} \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{m+1} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -f^{(1)} \\ \vdots \\ -f^{(K)} \\ f^{(1)} \\ \vdots \\ f^{(K)} \end{bmatrix} \quad (27)$$

2.2 最大差值极小化拟合二次响应面函数的算例

算例 3 二次响应面, 1 个因素, 9 个样本点。样本点及样本值如表 5 所示。

经过计算, 本文方法拟合的函数表达式为

$$y = 1.301590 + 2.420630x_1 - 0.706349x_1^2 \quad (28)$$

利用 K-S 函数法实现最大差值极小化拟合^[8]的函数表达式为

$$y = 1.326 + 2.417x_1 - 0.7088x_1^2 \quad (29)$$

利用最小二乘法拟合的函数表达式为

表 5 算例 3 样本点及样本值基本数据

Table 5 Sample points and basic data of sample values in example 3

样本点 序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
样本点	-4.0	-3.0	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
样本值 f	-17.0	-15.0	-6.0	-1.3	1.0	5.0	6.0	3.0	-3.0

$$y=2.211+2.338x_1-0.7867x_1^2 \quad (30)$$

算例 3 中各方法拟合的响应面函数的比较如图 3 所示,从图中可以看出,本文方法、K-S 函数方法和最小二乘法拟合的结果非常接近。各拟合方法最小的最大离差值比较如表 6 所示,本文方法拟合得到最大样本离差值最小,K-S 函数法拟合的最大样本离差值与本文方法很接近,而最小二乘法拟合的最大样本离差值最大。

算例 4 二次响应面,2 个因素,9 个样本点。样本点及样

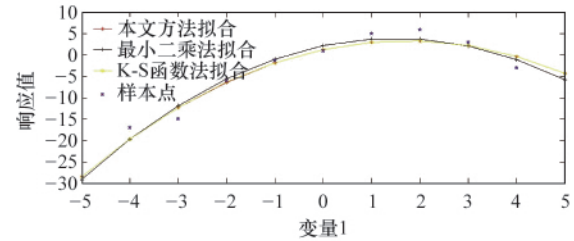


图 3 算例 3 中 3 种方法拟合结果比较

Fig. 3 Comparison of fitted results of the three response surface methods in example 3

本值如表 7 所示。

利用本文方法计算拟合的曲面形状如图 4 所示,拟合函数表达式为

$$y=1.44836+1.99922x_1-2.78239x_2+1.01361x_1^2+0.33072x_2^2-0.66230x_1x_2 \quad (31)$$

利用 K-S 函数法实现最大差值极小化拟合^[8]的函数表达式为

表 6 算例 3 中 3 种方法最小的最大离差值比较

Table 6 Comparison of results of minimizing the maximum difference by three methods in example 3

序号	样本点	样本值	最小二乘法响应值	K-S 函数法响应值	本文方法响应值
1	-4	-17.0	-19.7282	-19.6828	-19.6825
2	-3	-15.0	-11.8833	-12.3042	-12.3174
3	-2	-6.0	-5.6118	-6.3432	-6.3651
4	-1	-1.3	-0.9137	-1.7998	-1.8254
5	0	1.0	2.2110	1.3260	1.3016
6	1	5.0	3.7623	3.0342	3.0159
7	2	6.0	3.7402	3.3248	3.3175
8	3	3.0	2.1447	2.1978	2.2063
9	4	-3.0	-1.0242	-0.3468	-0.3175
最小的最大离差值			3.1167	2.6958	2.6826
最小的最大离差值相对误差			0.1618	0.0049	0

表 7 算例 4 样本点及样本值基本数据

Table 7 Sample points and basic data of sample values in example 4

样本点序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
样本点 x_1	0.1	1.1	2.0	3.1	4.1	4.9	-1.05	-2.1	-3.2
样本点 x_2	0.1	-1.0	-2.1	-3.1	-4.1	1.0	2.0	3.1	4.4
样本值 f	1.0	8.3	20.0	35.8	55.2	30.3	-2.8	1.0	8.5

$$y=1.44811+1.99967x_1-2.78204x_2+1.01364x_1^2+0.33059x_2^2-0.66246x_1x_2 \quad (32)$$

通过最小二乘法拟合的函数表达式为

$$y=1.06732+2.31050x_1-2.77456x_2+0.93190x_1^2+0.58280x_2^2-0.46371x_1x_2 \quad (33)$$

图 5 给出了各方法拟合的响应面函数的比较结果,从图中可以看出,本文方法、K-S 函数方法和最小二乘法拟合结果非常接近。各拟合方法最小的最大离差值比较如表 8 所示,本文方法拟合得到最大样本离差值最小,K-S 函数法拟合的最大样本离差值跟本文方法很接近,而最小二乘法拟合的最

大样本离差值最大。

3 结论

本文采用线性规划问题的求解方法,对最大差值极小化方法的响应面拟合方法进行了研究,拟合出一次和二次响应面函数的表达式。该方法既适用于一次多变量响应面函数的确定,也适用于二次多变量响应面函数的确定,通过算例与 K-S 函数法以及最小二乘法的拟合结果进行比较,表明本文方法获得的响应面函数能够达到很好的精度,同时也提高了工程实际中求解复杂模型的计算效率,为响应面函数的构造

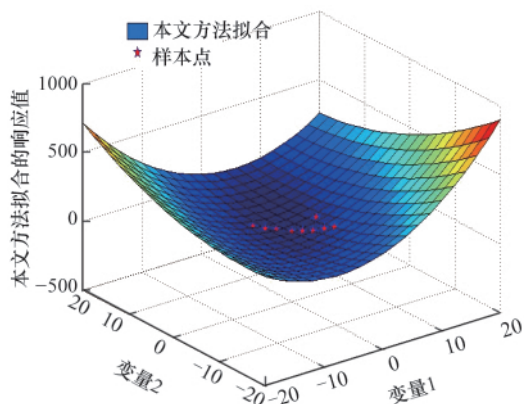


图4 算例4 本文方法拟合结果

Fig. 4 Fitted results by the method used in this paper in example 4

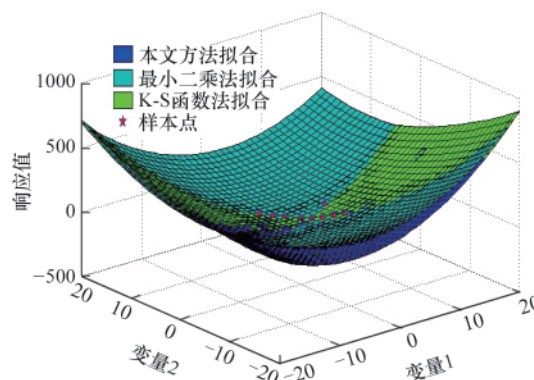


图5 算例4 中3种方法拟合结果的比较

Fig. 5 Comparison of fitted results by the three response surface methods in example 4

表8 算例4 中3种方法的最小的最大离差值比较

Table 8 Comparison of results of minimizing the maximum difference by three methods in example 4

序号	样本点	样本值	最小二乘法响应	K-S函数法响应值	本文方法响应值
1	0.1	0.1	1.0314	1.3769	1.3767
2	1.1	-1.0	8.3	8.6039	8.7156
3	2.0	-2.1	20.0	19.7602	19.5844
4	3.1	-3.1	35.8	35.8435	35.5551
5	4.1	-4.1	55.2	55.1731	54.7844
6	4.9	1.0	30.3	30.2998	29.8844
7	-1.05	2.0	-2.8	-2.5754	-2.3844
8	-2.1	3.1	1.0	0.3433	0.5844
9	-3.2	4.4	8.5	8.8204	8.9156
最小的最大离差值			0.6567	0.4158	0.4156
最小的最大离差值相对误差			0.5801	0.00048123	0

提供了新的方法和途径。

参考文献 (References)

[1] 汪仁官. 试验设计与分析[M]. 北京: 中国统计出版社, 1998.
Wang Renguan. Experimental design and analysis [M]. Beijing: China Statistics Press, 1998.

[2] 朱静, 郭军, 陆鑫森. 一种新的结构可靠性计算方法——响应面法[J]. 上海交通大学学报, 1995, 29(2): 26-31.
Zhu Jing, Guo Jun, Lu Xinsen. Journal of Shanghai Jiaotong University, 1995, 29(2): 26-31.

[3] Oudjene M, Ben-Ayed L, Delamézière A, et al. Shape optimization of clinching tools using the response surface methodology with moving least-square approximation[J]. Journal of Materials Processing Technology, 2009, 209(1): 289-296.

[4] 吕震宙, 杨子政, 赵洁. 基于加权线性响应面法的神经网络可靠性分析方法[J]. 航空学报, 2006, 27(6): 1063-1067.

Lu Zhenzhou, Yang Zizheng, Zhao Jie. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2006, 27(6): 1063-1067.

[5] Kaymaz I, McMahon C A. A response surface method based on weighted regression for structural reliability analysis [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2005, 20(1): 11-17.

[6] Gavin H P, Yau S C. High-order limit state functions in the response surface method for structural reliability analysis [J]. Structural Safety, 2008, 30(2): 162-179.

[7] 隋允康. 建模·变换·优化结构综合方法新进展[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1996.
Sui Yunkang. Modeling, transformation and optimization: New developments of structural synthesis method [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1996.

[8] 宇慧平, 隋允康, 丁力, 等. 最大离差值极小响应面及按 Kreisselmerier-Steinhauser 函数的拟合[J]. 科技导报, 2010, 28(1): 63-68.
Yu Huiping, Sui Yunkang, Ding Li, et al. Science & Technology Review, 2010, 28(1): 63-68.

(责任编辑 代丽)

本期好玩的数学——巧妙填数答案

