

# 时滞位移反馈 Duffing 方程的复杂吸引子及其吸引域

尚慧琳

上海应用技术学院机械工程学院, 上海 200235

**摘要** 对时滞线性位移反馈引起的一类单自由度非线性自激振动系统的复杂动力学行为进行研究。所考虑的数学模型为 van der Pol-Duffing 振子系统加入线性时滞位移反馈而得到的时滞 Duffing 方程。定性分析了时滞引起的系统 Hopf 分岔, 并通过定量研究发现时滞可引起系统的混沌运动与多种概周期运动共存现象。通过 4 阶 Runge-Kutta 法和 Monte Carlo 方法, 划分了不同时滞量下的时滞系统的概周期吸引子和混沌吸引子及其吸引域, 发现系统各吸引子吸引域的边界均光滑而不分形, 尽管系统出现了混沌运动。研究结果对进一步研究混沌运动机制存在着潜在的应用价值。

**关键词** 时滞反馈; 概周期解; 混沌; 吸引子; 吸引域

**中图分类号** O322, TB53

**文献标识码** A

**文章编号** 1000-7857(2010)17-0042-04

## Multiple Complex Attractors and Basins of Attraction in a Duffing System with Delayed Position Feedbacks

SHANG Huilin

School of Mechanical Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 200235, China

**Abstract** The main purpose of this paper is to investigate the complex dynamics that the time delay induces in a kind of single degree-of-freedom self exciting vibration systems with linear delayed position feedbacks. The mathematical model under consideration is a delayed Duffing system, which is obtained by applying linear time delayed position feedbacks to a van der Pol-Duffing oscillator. The Hopf bifurcation of the delayed system derived by time delay is studied qualitatively. And it is found quantitatively that the time delay can make the multiple quasi-periodic and chaotic motions coexisting in the controlled system. Then the quasi-periodic attractors and chaotic attractors and their basins of attraction under different values of time delay in the delayed system are also classified by the 4th Runge-Kutta approach and Monte Carlo method. It is shown that each boundary of the basin of attraction in the delayed system is smooth and not fractal even if the attractor is chaotic. This paper shows some potential applications for the further study of the mechanism of chaotic motions.

**Keywords** delayed feedback; quasi-periodic motion; chaos; attractor; basin of attraction

### 0 引言

时滞动力系统指存在时间滞后的系统, 即当前发展趋势明显地依赖于过去历史状况的系统。时滞产生的根源在于自然界、工程技术和生活中普遍存在的信号有线传输时间、转换速度和记忆效应等。例如, 远距离通讯信号传递过程中的信号传播时间、控制系统中信号反馈存在的时间差等。

在工程技术中的许多领域, 如机械<sup>[1-3]</sup>、保密通讯<sup>[4-5]</sup>、控制<sup>[6-9]</sup>等领域, 时滞动力系统得到广泛应用。在对时滞动力系统的研究中, 近年来的研究结果表明, 时滞的出现可以引起平衡点失稳, 导致多个同级分岔, 多级分岔, 从而使系统呈现多吸引子共存<sup>[1-2, 6, 8-9]</sup>、吸引域分形<sup>[6]</sup>和混沌<sup>[9]</sup>等复杂的动力学现象。多吸引子共存是时滞非线性系统的重要现象之一, 如数学中的

收稿日期: 2010-05-06; 修回日期: 2010-08-08

基金项目: 国家自然科学基金项目(10902071); 上海高校选拔培养优秀青年教师科研专项基金项目(YYY08004); 上海市教育委员会重点学科建设项目(J51501)

作者简介: 尚慧琳, 讲师, 研究方向为非线性动力学和振动控制, 电子信箱: suliner60@hotmail.com

解不唯一,联想记忆神经网络的多种样本存储模式,都可以用多解进行解释。

自激振动在工程科技领域具有非常广泛的应用,许多力学与数学工作者都对此做过深入研究<sup>[1-2,6-9]</sup>,特别是对单自由度自激振动非线性系统施加一些特殊形式的反馈控制,研究时滞反馈对典型单自由度自激振动系统的控制作用<sup>[6-9]</sup>。文献[2]利用多尺度法研究了单自由度自治时滞非线性系统的动力学行为,发现系统随时滞的变化会发生次临界 Hopf 分岔,从而产生多稳态共存现象。随着时滞量的增大,系统甚至出现多达 5 个周期吸引子共存,且各吸引子的吸引域边界为不稳定周期解的稳定流形。文献[6]利用多尺度法给出了如何确定一个单自由度自治时滞系统的分岔解的稳定性和振幅。文献[8]基于数值方法研究了强非线性时滞系统中存在的多稳态解。本文在这些研究结果基础上,以一般形式的 van der Pol-Duffing 方程

$$\ddot{x} - (\alpha - \gamma x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0 \quad (1)$$

为研究对象,对该系统引入线性时滞位移反馈

$$\ddot{x} - (\alpha - \gamma x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = A[x(t-\tau) - x] \quad (2)$$

其中,  $\tau$  为时滞量,  $A$  为反馈增益系数,研究线性位移反馈引起的一类 van der Pol-Duffing 系统的复杂吸引子及多吸引子共存等复杂动力学行为。

在研究系统动力学时,人们除了对吸引子外,也会对吸引子所对应的吸引域的形状发生兴趣,特别是当系统出现多吸引子共存现象(在参数空间同一点有多个稳定的稳态解)时,因为不同的初始条件可能会收敛到不同的吸引子,每个吸引子在初始空间都有各自的吸引域。只有研究了系统吸引子和吸引域的结构,系统的全局动力学行为才算真正被了解<sup>[6]</sup>。本文分析了时滞所引起的系统平衡点稳定性切换,并进一步研究时滞所引起的系统(1)的多个复杂吸引子共存现象及其吸引域问题,研究结果对进一步认识混沌运动及研究混沌运动机制有着潜在的应用价值。

## 1 时滞引起的平衡点稳定性切换

当  $\tau=0$  时,系统(1)为无时滞的一个 van der Pol-Duffing 方程,若系统参数  $\alpha < 0, \gamma \geq 0, \beta > 0$ , 系统为单平衡点稳定系统,其动力学行为简单<sup>[1]</sup>。以下令  $\alpha < 0$ , 讨论时滞位移反馈对一个平衡点稳定的系统动力学行为的影响。

系统(2)对应的线性系统的特征方程为

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + (\omega_0^2 + A) = A e^{-\lambda\tau} \quad (3)$$

令  $\lambda = a \pm \omega i$ , 其中,  $a, \omega$  为实数。当  $a=0$  时,由式(3),得到系统(2)发生 Hopf 分岔的必要条件:

$$\begin{cases} (\omega_0^2 + A) - \omega^2 = A \cos\omega\tau \\ \alpha\omega = A \sin\omega\tau \end{cases} \quad (4)$$

假设  $I$  为  $(\alpha, A)$  的集合,

$$I = \{(\alpha, A) | 2A + \omega_0^2 > 0, 2\omega_0^2 + 2A - \alpha^2 > 0, (2A - 2\alpha\omega_0 - \alpha^2)(2A + 2\alpha\omega_0 - \alpha^2) > 0\} \quad (5)$$

则当  $(\alpha, A) \in I$  时,式(4)有两不相等的正根  $\omega_+ > \omega_- > 0$ 。根据 Hopf 分岔定理,此时系统(2)发生 Hopf 分岔的时滞  $\tau$  的临界值为

$$\tau_{\pm}(j) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_{\pm}} \left[ (2j+2)\pi - \arccos\left(1 + \frac{\omega_0^2 - \omega_{\pm}^2}{A}\right) \right] & A > 0 \\ \frac{1}{\omega_{\pm}} \left[ 2j\pi + \arccos\left(1 + \frac{\omega_0^2 - \omega_{\pm}^2}{A}\right) \right] & A < 0 \end{cases} \quad (6)$$

$\alpha < 0$  和  $\tau=0$  时,系统(2)的平衡点是稳定的,而当时滞  $\tau$  从 0 增大到第一个临界值之前,系统(2)的平衡点始终保持稳定性。对于  $\alpha < 0$  和  $A > 0$  的情况,当时滞  $\tau$  达到临界值  $\tau_+$  时,特征方程(3)出现纯虚特征根,系统将产生 Hopf 分岔,平衡点稳定性切换的临界时滞量为  $\tau_-$  和  $\tau_+$ , 其中  $\tau_-(j) > \tau_+(j)$  ( $j=0, 1, 2, \dots$ )。则当  $0 < \tau < \tau_+(0)$  或  $\tau_-(j) < \tau < \tau_+(j+1)$  时,系统(2)平衡点稳定。在临界时滞  $\tau_+(j)$  和  $\tau_-(j)$  处平衡点发生 Hopf 分岔。

本文对系统(2)的各参数取值为

$$\alpha = -0.01 \quad \beta = 1 \quad \gamma = 0 \quad \omega_0 = 1 \quad A = 1 \quad (7)$$

因此系统(1)的平衡点稳定。同时根据式(7),时滞的增大会使得系统(1)平衡点发生 Hopf 分岔产生周期运动。而多解性正是时滞方程的一个特点,因此伴随时滞量的增大,系统会出现多周期解。对周期解的个数和稳定性研究见文献[2]和[8]。如系统参数取式(7)的值,当  $\tau=2$  时,系统(2)有 5 个周期解,其中 3 个是稳定的,2 个是不稳定的<sup>[8]</sup>。当周期运动失稳时,系统(1)动力学行为的变化有两种可能:一是周期运动振幅趋于无穷,无界解导致破坏;二是产生复杂运动,如倍周期运动、概周期运动、混沌等<sup>[9]</sup>。

## 2 时滞诱发的系统多复杂吸引子共存

通过数值仿真,研究系统参数  $A, \omega_0, \alpha, \beta$  和  $\gamma$  取值为式(7)时,系统平衡点发生 Hopf 分岔后时滞引起的系统的复杂动力学行为。在运用 4 阶 Runge-Kutta 法数值模拟时,取固定积分步长为 0.01,得到系统(1)的数值解。由于所研究系统为时滞位移反馈控制系统,可认为当  $t < 0$  时,系统无信号返回,因此设系统初始条件为

$$x(t) = 0.0 \quad \dot{x}(t) = 0.0 \quad (-\tau \leq t < 0) \quad (8)$$

运用 Poincaré 截面  $x_r=0$  判断系统的复杂运动。不同时滞量下系统运动的 Poincaré 截面如图 1 和图 2 所示。由图 1 知,  $\tau=5.5$  时,不同的初始条件则会导致不同的吸引子,由 Poincaré 截面图判断,系统存在 7 个吸引子均为概周期吸引子。当  $\tau=6$  时系统动力学行为又发生了定性的改变,时滞的进一步增大使得系统概周期环面破裂走向混沌(图 1(a)和图 2(a)),出现了混沌吸引子(图 2(a))与 6 个概周期吸引子(图 2(b)~2(g))共存现象。

## 3 复杂吸引子的吸引域

对于多吸引子运动,不同的初始条件将会导致不同的运动,这就有必要划分各吸引子的吸引域。根据式(8),时滞反

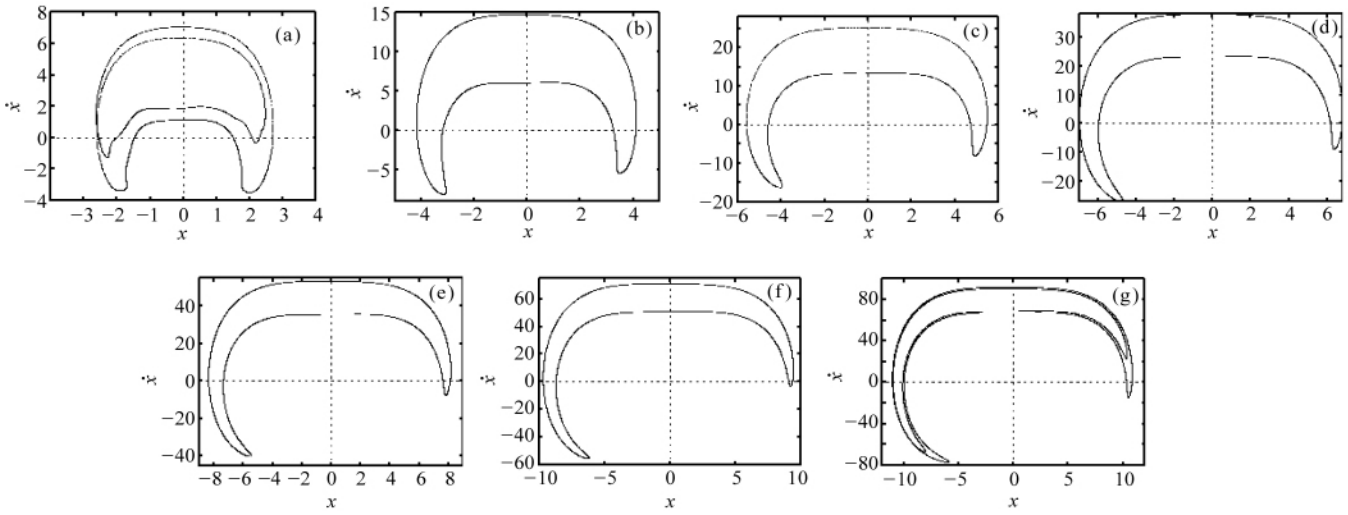


图 1  $\tau=5.5$  时不同初始值对应的吸引子的 Poincaré 截面图

Fig. 1 Poincaré maps of different attractors induced by different initial conditions when  $\tau=5.5$

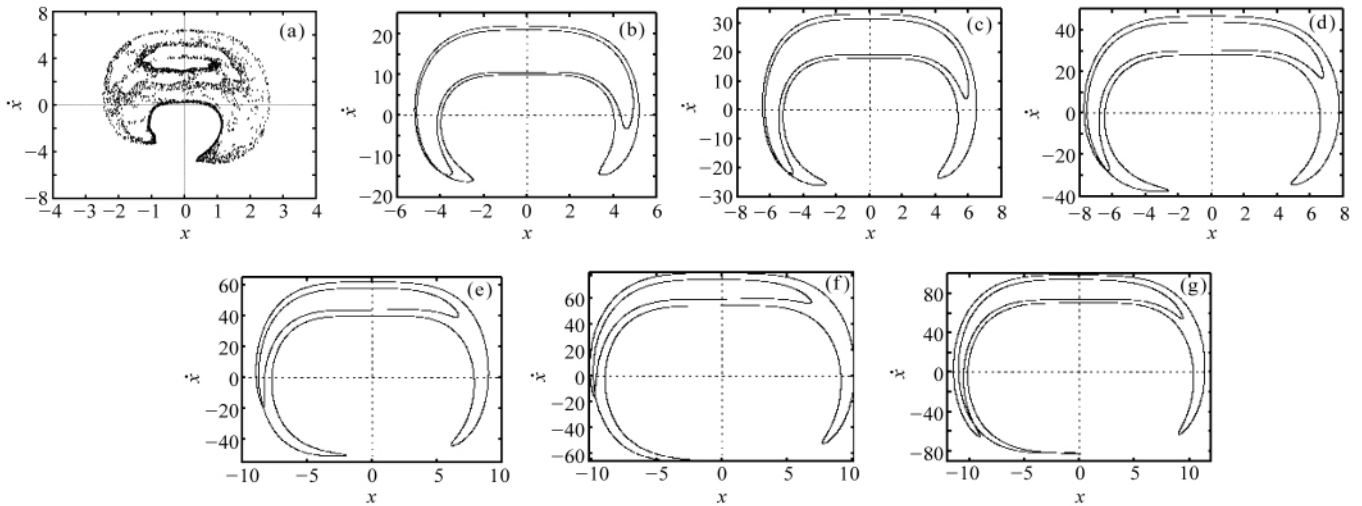


图 2  $\tau=6.0$  时不同初始值对应的吸引子的 Poincaré 截面图

Fig. 2 Poincaré maps of different attractors induced by different initial conditions when  $\tau=6.0$

馈系统的吸引域问题就转化为  $t=0$  时刻的  $x(0)-\dot{x}(0)$  两维平面上。给定初值取值范围为  $-10 \leq x(0) \leq 10, -35 \leq \dot{x}(0) \leq 35$ ,

初值点个数为  $480 \times 640$ 。系统(2)  $\tau=5.5$  和  $\tau=6$  时的吸引域通过点映射方法绘制, 分别如图 3(a)和 3(b)所示, 其中图 3(a)

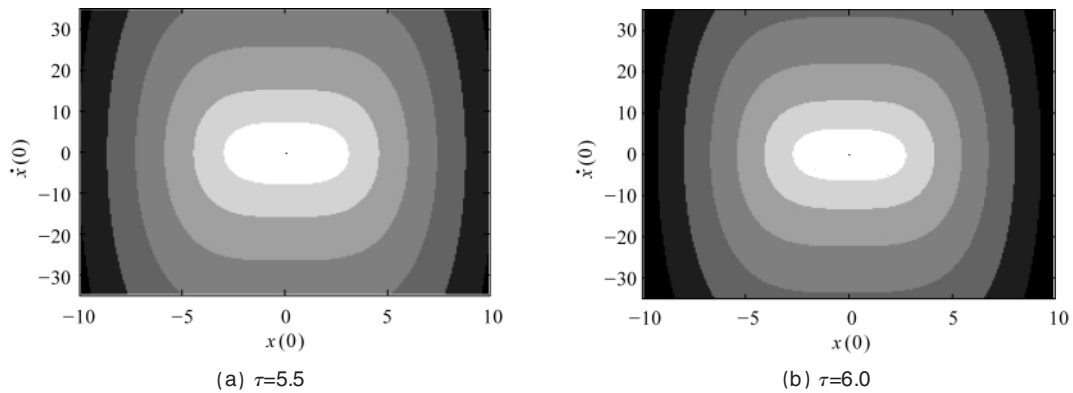


图 3 系统(2)不同吸引子的吸引域

Fig. 3 Basins of attractor of different attractors in the system (2)



中吸引域从内到外分别对应图 1(a)~1(f)中各概周期吸引子的吸引域,图 3(b)中吸引域从内到外分别对应图 2(a)~2(f)中各吸引子的吸引域。由图 3 可知,吸引域的边界光滑而不分形,特别是,混沌吸引子的吸引域边界也呈光滑的椭圆形(图 3(b))。吸引域边界常常为不稳定解的稳定流形,因此可以预测,当  $\tau=5.5$  和  $\tau=6$  时,系统(1)不仅存在 7 个吸引子,还存在 6 个不稳定的周期解。由于当  $\tau=0$  时系统(2)只有一个平衡点,因此系统出现多周期解运动是由于时滞的出现产生的。

#### 4 结论

本文将 van der Pol-Duffing 系统通过引入时滞位移反馈,讨论时滞引起的复杂动力学行为。通过解析分析研究了时滞所引起的系统 Hopf 分岔,并通过 4 阶 Runge-Kutta 法数值验证了时滞反馈可导致 Duffing 方程出现多种稳定的复杂运动,并划分了各复杂吸引子的吸引域,定性预测了时滞反馈导致 Duffing 方程出现多个不稳定的周期解。研究发现,时滞反馈可导致单平衡点稳定系统出现多复杂吸引子共存的现象,同时这些复杂吸引子的吸引域边界并不分形。由于混沌的出现往往伴随着分形,而一般情况下,混沌吸引域也常常具备分形边界,说明分形是有别于混沌运动的另一种初值敏感性,有助于进一步研究混沌运动和认识分形。

#### 参考文献 (References)

[1] Reddy D V R, Sen A, Johnston G L. Dynamics of a limit cycle oscillator

under time delayed linear and nonlinear feedbacks [J]. *Physica D*, 2000, 144: 335-357.

[2] Shang H L, Xu J. Delay induced multiple attractors and basins in a controlled system [J]. *Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems Series B: Application & Algorithms*, 2007, 14(S5): 117-122.

[3] Stepan G, Insperger T, Szalai R. Delay, parametric excitation, and the nonlinear dynamics of cutting processes [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2005, 15(9): 2783-2798.

[4] Cruz-Hernandez C. Synchronization of time-delay Chua's oscillator with application to secure communication [J]. *Nonlinear Dynamics of System Theory*, 2004, 4(1): 1-13.

[5] Huang H, Li H X, Zhong J. Master-slave synchronization of general Lur'e systems with time-varying delay and parameter uncertainty[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2006, 16(2): 281-294.

[6] Wang H L, Hu H Y, Wang Z H. Global dynamics of a Duffing oscillator with delayed displacement feedback [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2004, 14(8): 2753-2775.

[7] Wang Z H, Hu H Y. Stability switches of time-delayed dynamics systems with unknown parameters [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 233(2): 215-233.

[8] 尚慧琳, 徐鉴. 时滞 Duffing 方程的多周期解 [J]. 太原理工大学学报, 2005, 36(6): 749-751.  
Shang Huilin, Xu Jian. *Journal of Taiyuan University of Technology*, 2005, 36(6): 749-751.

[9] 徐鉴, 黄羽. 一类平面自治非线性时滞控制系统的多稳态和混沌[J]. 力学季刊, 2005, 26(4): 669-672.  
Xu Jian, Huang Yu. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2005, 26(4): 669-672.

(责任编辑 代丽)

·学术动态·



## “第七届中国植物病害化学防治学术研讨会”征稿

中国植物病理学会将于 2010 年 11 月 20 日在海口市召开“第七届中国植物病害化学防治学术研讨会”。会议主题为“杀菌剂与作物健康和食品安全”。

征文内容: 反映我国植物病害化学防治领域的最新成果,以研究论文为主。

征文截止时间: 2010 年 9 月 20 日。

联系方式: 南京市卫岗南京农业大学植物保护学院(210095)陈长军,电话: 025-84395641, 传真: 025-84395641, 电子信箱: ccj100cn@yahoo.com.cn。

·学术动态·



## “第四届国际光电子探测与成像技术学术交流会”征稿

中国宇航学会、国际光学工程学会(SPIE)将于 2011 年 5 月 1 日在北京召开“第四届国际光电子探测与成像技术学术交流会”。

征文内容: 传感器与微机械光器件技术, 激光探测和成像技术, 红外成像技术及应用, 成像探测器技术与应用, 太赫兹技术与应用, 空间探测技术与应用, 生物激光及其医学应用。

征文截止时间: 2011 年 4 月 30 日。

电话: 022-23669275, 022-23613813; 联系人: 李瑾, 吴迪, 刘艳, 邓伟, 周志远; 电子信箱: conf@cnoenet.com。

会议网址: www.ispdiconf.org。