

# 基于分层 Boussinesq 类模型的孤立波爬坡模拟

余向军, 张永刚

海军大连舰艇学院科研部, 辽宁大连 116018

**摘要** 波浪爬坡是自然界中普遍存在的现象, 是近岸防波堤等结构物设计需要考虑的因素。本文采用分层 Boussinesq 类方程对近海岸波浪爬坡开展数值模拟研究, 采用有限差分方法数值离散二层 Boussinesq 类方程, 建立数值波浪模型。根据 Synolakis 1986 年的物理实验, 数值模拟孤立波在梯形水道上的爬坡, 验证了分层 Boussinesq 方程波浪模型在该研究中具有很好的适用性和较高的精度。模型较好地预报了波浪爬高的变化趋势。预报的波浪爬坡高度大于实验测量值, 主要原因是实际的底摩擦大于模型中的底摩擦。

**关键词** 分层 Boussinesq 类模型; 孤立波爬坡; 数值模拟

**中图分类号** O353.2

**文献标识码** A

**文章编号** 1000-7857(2010)16-0063-04

## Numerical Simulation of Solitary Wave Runup and Rundown on a Planar Beach Using a Layered Boussinesq-type Equation

YU Xiangjun, ZHANG Yonggang

Department of Scientific Research, Dalian Naval Academy of the PLA, Dalian 116018, Liaoning Province, China

**Abstract** Wave runup and rundown is a ubiquitous phenomenon in the nature, which has to be taken into account in the design of offshore structures such as bulwark. Solitary wave runup and rundown is simulated by a two-layer, depth-integrated Boussinesq model in this paper. The proposed numerical model is verified by a comparison with the experimental results from Synolakis's experiment (1986). The numerical results shows that the layer, depth-integrated Boussinesq model can be applied to study the wave runup and rundown with high precision. The proposed numerical model can predict the solitary wave runup and rundown movement. The wave amplitude in the runup is smaller than those in the experiments. The inclusion of an accurate bottom friction parameterization seems to become increasingly important with increasing degree of wave breaking, probably due to the fact that as a broken wave runs up a mild slope, it travels up the slope as a fairly thin layer of water. The smaller the total water depth, the more important the bottom friction becomes.

**Keywords** layered Boussinesq-type equation; solitary wave runup and rundown; numerical simulation

### 0 引言

对于海岸和港口波浪变形问题, 目前广泛应用的数学模型是, 从三维势流模型出发, 通过在海底或静水面做小参数展开, 推导并沿深度方向对其做积分平均简化等处理, 从而推导出 Boussinesq 方程。

经典的 Boussinesq 方程仅适用于浅水, 但自 Boussinesq

推导以来已经有了很大的发展。Boussinesq 方程的一个重要发展趋势是, 将该方程的适用水深由浅水向深水扩展。Peregrine<sup>[1]</sup>首先将它推广到可应用在二维变水深的情况。Madsen 等<sup>[2]</sup>提出了改进色散性的新型 Boussinesq 方程, 随后 Madsen 等又将其方程推广到适用于缓变地形较为一般的地形。Nwogu<sup>[3]</sup>提出了以任意水深处速度表示的 Boussinesq 方

收稿日期: 2010-04-13; 修回日期: 2010-07-28

基金项目: 海洋公益性行业科研专项(200905002)

作者简介: 余向军, 博士研究生, 研究方向为海浪理论, 电子信箱: xiangjun\_yu@163.com; 张永刚(通信作者), 教授, 研究方向为军事海洋学, 电子信箱: zyg63@yahoo.com.cn

程,它与 Madsen 提出的方程是目前弱非线性 Boussinesq-type 方程的代表性方程,并被一些学者(如 Beji 和 Battjes, Wei 和 Kirby, Kaihatu 和 Kirby 等)用于研究比较复杂地形上的波浪变形问题。之后, Gobbi 和 Kirby<sup>[4]</sup>推导出了一个非线性的 4 阶 Boussinesq 方程,并采用高精度的数值格式进行了求解。

最近, Lynett 和 Liu<sup>[5]</sup>提出了基于 Boussinesq 方程的波浪分层数学模型,在传统的 Boussinesq 方程基础上再次对水柱面进行分层。同时,假定在每一层中的垂向流速按线性分布,分别在各层对垂向流速进行垂向积分求其平均流速,用此平均流速代替每一层的垂向流速。这样处理不仅在精度上比以前的 Boussinesq 方程模型有所提高,而且更重要的是提高了模型的色散性,使模型方程能够应用于更大的水深。

### 1 物理模型

分层模型的理论体系如图 1 所示<sup>[6]</sup>。将水柱分解成多层 ( $N$  层),采用深度积分模型代替对垂直流场的高阶多项式近似,利用多重二次多项式并匹配用户定义的交界面。由于没有高阶的空间求导和高阶的多项式近似,这种方法能产生出一种精确的模型。利用任意  $N$  层,通过对原始运动方程进行分段积分,可以获得一系列模型方程。这样,将整个水柱流速断面分解成  $N$  层,每一层中都独立地确定一个流速断面,再加上层与层之间的交界面,方程的一系列解由  $2N-1$  个自由参数组成,这样可以对水波已知的解析解进行优化。通过对原始运动方程进行分段积分,形成一系列方程式。

如图 1 所示,  $\zeta'(x', y', t')$  表示在水深  $h'(x', y', t')$  处传播的波列的自由表面位移。层与层之间的边界定义为  $\eta'_n(x', y', t')$ 。水柱面被分成  $N$  层,上边界为  $\eta'_0 = \zeta'$ ,下边界为  $\eta'_N = -h'$ 。所有其他边界设定为  $\eta'_n = \beta_n h'$ ,其中  $\beta_n$  是任意的。由于  $h'$  是时间  $t'$  的函数,  $\eta'_n$  也是时间  $t'$  的函数。

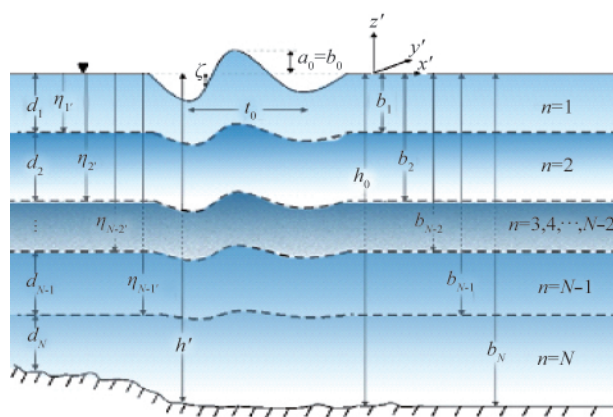


图 1 分层 Boussinesq 方程  $N$  层模型示意图

Fig. 1  $N$ -layer model of layered Boussinesq equation

每一层均有一个特定厚度  $d_n$ ,将  $d_n$  作为相应层的垂直尺度,  $h_0$  为特征水深,特征波长  $l_0 = l/k$  作为水平长度的尺度,  $l_0/\sqrt{gh_0}$  作为时间尺度,  $k$  为波数,  $a_0$  为波浪运动幅度,定义如下无量纲:

$$(x, y) = (x', y')/l_0 \quad z_n = z'/d_n \quad t = \sqrt{gh_0} t'/l_0$$

$$p_n = p'_n/\rho g a_0 \quad h = h'/h_0 \quad \zeta = \zeta'/a_0 \quad \eta_n = \eta'_n/b_n \quad (1)$$

$$(U_n, V_n) = (U'_n, V'_n)/(\varepsilon_0 \sqrt{gh_0}) \quad W_n = W'_n/(\varepsilon_0 \mu_0 \sqrt{gh_0})$$

式中,下标  $n$  代表层数;  $b_0 = a_0$ ;  $b_n = \sum_{m=1}^n d_m, n=1, 2, \dots, N$ ;  $(U_n, V_n)$  为不同层的水平流速;  $W_n$  为层中的垂向流速;  $p_n$  为压力。无量纲参数为

$$\varepsilon_0 = a_0/h_0 \quad \mu_0 = h_0/l_0 \quad (2)$$

假设黏性影响是可以忽略的,波浪运动可以用连续方程和欧拉方程描述为

$$\frac{d_n}{h_0} \nabla \cdot U_n + \frac{\partial W_n}{\partial z_n} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial U_n}{\partial t} + \varepsilon_0 U_n \cdot \nabla U_n + \varepsilon_n W_n \frac{\partial U_n}{\partial z_n} = -\nabla p_n \quad (4)$$

$$\mu_n^2 \left( \frac{\partial W_n}{\partial t} + \varepsilon_0 U_n \cdot \nabla W_n \right) + \varepsilon_0 \mu_0^2 W_n \frac{\partial W_n}{\partial z_n} = - \left( \frac{\partial p_n}{\partial z_n} + \frac{1}{\varepsilon_n} \right) \quad (5)$$

其中,  $\mu_n^2 = d_n h_0/l_0^2, \varepsilon_n = a_0/d_n$

利用假设:

$$O(\mu_n^2) \ll 1 \quad (6)$$

对连续方程和欧拉方程进行小参数展开,无量纲物理量可展开为

$$f = \sum_{M=0}^{+\infty} \mu_n^{2M} f^{(M)} \quad (f=U_n, W_n, \zeta, p_n) \quad (7)$$

通过推导,得到以下 3 个控制方程:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot \sum_{n=1}^N \left( \frac{b_{n-1}}{h_0} \eta_{n-1} - \frac{b_n}{h_0} \eta_n \right) \mathbf{u}_n \cdot \nabla \cdot \sum_{n=1}^N \mu_n^2 \frac{d_n}{h_0} \cdot \left[ \left( \frac{b_{n-1}}{d_n} \eta_{n-1} \right)^3 - \left( \frac{b_n}{d_n} \eta_n \right)^3 - \left( \frac{b_{n-1}}{d_n} \eta_{n-1} - \frac{b_n}{d_n} \eta_n \right) z_n \right] \cdot \nabla S_n + \left[ \left( \frac{b_{n-1}}{d_n} \eta_{n-1} \right)^2 - \left( \frac{b_n}{d_n} \eta_n \right)^2 - \left( \frac{b_{n-1}}{d_n} \eta_{n-1} - \frac{b_n}{d_n} \eta_n \right) z_n \right] \cdot \nabla T_n \right] = O(\mu_n^4) \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \frac{\varepsilon_0}{2} \nabla \cdot (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) + \nabla \zeta + \mu_1^2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\kappa_1^2}{2} \nabla S_1 + \kappa_1 \nabla T_1 \right) + \varepsilon_0 \mu_1^2 \cdot \left[ (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \kappa_1) \nabla T_1 + \kappa_1 \nabla (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla T_1) + \kappa_1 (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \kappa_1) \nabla S_1 + \frac{\kappa_1^2}{2} \nabla (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla S_1) \right] + \varepsilon_0 \mu_0^2 \left[ T_1 \nabla T_1 - \nabla \left( \zeta \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right] + \varepsilon_0^2 \mu_1^2 \nabla \left( \zeta S_1 T_1 - \frac{h_0}{d_1} \frac{\zeta^2}{2} \frac{\partial S_1}{\partial t} - \zeta \mathbf{u}_1 \cdot \nabla T_1 \right) + \varepsilon_0^2 \varepsilon_1 \mu_0^2 \nabla \left[ \frac{\zeta^2}{2} \left( S_1^2 - \frac{h_0}{d_1} \mathbf{u}_1 \cdot \nabla S_1 \right) \right] = O(\mu_0^2 \mu_1^2) \quad (9)$$

$$\mathbf{u}_n + \mu_n^2 \left\{ \left[ \frac{\kappa_n^2}{2} - \left( \frac{b_{n-1}}{d_n} \eta_{n-1} \right)^2 \right] \nabla S_n + \left( \kappa_n - \frac{b_{n-1}}{d_n} \eta_{n-1} \right) \nabla T_n \right\} = \mathbf{u}_{n-1} + \mu_{n-1}^2 \cdot \left\{ \left[ \frac{\kappa_{n-1}^2}{2} - \left( \frac{b_{n-1}}{d_{n-1}} \eta_{n-1} \right)^2 \right] \nabla S_{n-1} + \left( \kappa_{n-1} - \frac{b_{n-1}}{d_{n-1}} \eta_{n-1} \right) \nabla T_{n-1} \right\} + O(\mu_{n-1}^4, \mu_n^4) \quad (10)$$

其中,

$$U_n = \mathbf{u}_n - \mu_n^2 \left[ \frac{z_n - \kappa_n^2}{2} \nabla S_n + (z_n - \kappa_n) \nabla T_n \right] + O(\mu_n^4) \quad (11)$$



$$S_n = \frac{d_n}{h_0} \nabla \cdot U_n \quad (12)$$

$$T_n = \sum_{m=n}^{N-1} \eta_n \left( \frac{b_m}{d_{m+1}} S_{m+1} - \frac{b_m}{d_m} S_m \right) + \nabla \cdot (hU_n) + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (13)$$

低层速度可以通过上层速度直接计算。方程(8)~(10)是一组以  $u_n$  和  $\zeta$  形式给出的强非线性频散波的控制方程。

### 2 数值方法

求解波浪模型时,广泛采用的数值方法有交替方向隐式(ADI)法和预测-校正(P-C)法。本文使用的是P-C法。为了消除比非线性项和色散项更高阶的不平衡保留误差,本文将采用复合4阶ABM(Adams-Bashforth-Moulten)格式,即在预测阶段采用3阶AB(Adams-Bashforth)格式,在校正阶段采用4阶AM(Adams-Moulten)格式。本文采用二层 Boussinesq 类方程进行数值离散。

在无量纲的动量方程中,速度时间导数表示为

$$U = u_{1t} + \left[ \frac{\kappa_1^2 - 2\kappa_1\eta - \zeta^2 + 2\zeta\eta}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \left( \eta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \zeta \frac{\partial \eta}{\partial x} - \kappa_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} - \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] \quad (14)$$

$$V = v_{1t} + \left[ \frac{\kappa_1^2 - 2\kappa_1\eta - \zeta^2 + 2\zeta\eta}{2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \left( \eta \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \eta}{\partial y} - \kappa_1 \frac{\partial \eta}{\partial y} - \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \frac{\partial v_1}{\partial y} \right] \quad (15)$$

预报方程为

$$\zeta_{ij}^{n+1} = \zeta_{ij}^n + \frac{\Delta t}{12} (23E_{ij}^n - 16E_{ij}^{n-1} + 5E_{ij}^{n-2}) \quad (16)$$

$$U_{ij}^{n+1} = U_{ij}^n + \frac{\Delta t}{12} (23F_{ij}^n - 16F_{ij}^{n-1} + 5F_{ij}^{n-2}) + 2(F_{ij}^n)^2 - 3(F_{ij}^{n-1})^2 + (F_{ij}^{n-2})^2 \quad (17)$$

$$V_{ij}^{n+1} = V_{ij}^n + \frac{\Delta t}{12} (23G_{ij}^n - 16G_{ij}^{n-1} + 5G_{ij}^{n-2}) + 2(G_{ij}^n)^2 - 3(G_{ij}^{n-1})^2 + (G_{ij}^{n-2})^2 \quad (18)$$

其中,

$$E = -h_t - [(\zeta - \eta)u_1 + (\eta + h)u_2]_x - [(\zeta - \eta)v_1 + (\eta + h)v_2]_y + \left\{ \left[ \frac{\zeta^3 - \eta^3}{6} - \frac{(\zeta - \eta)\kappa_1^2}{2} \right] S_1 + \left[ \frac{\zeta^2 - \eta^2}{2} - (\zeta - \eta)\kappa_1 \right] T_1 \right\}_x + \left\{ \left[ \frac{\eta^3 + h^3}{6} - \frac{(\eta + h)\kappa_2^2}{2} \right] S_2 + \left[ \frac{\eta^2 + h^2}{2} - (\eta + h)\kappa_2 \right] T_2 \right\}_y + \left\{ \left[ \frac{\zeta^3 - \eta^3}{6} - \frac{(\zeta - \eta)\kappa_1^2}{2} \right] S_1 + \left[ \frac{\zeta^2 - \eta^2}{2} - (\zeta - \eta)\kappa_1 \right] T_1 \right\}_y + \left\{ \left[ \frac{\eta^3 + h^3}{6} - \frac{(\eta + h)\kappa_2^2}{2} \right] S_2 + \left[ \frac{\eta^2 + h^2}{2} - (\eta + h)\kappa_2 \right] T_2 \right\}_x$$

$$F = -\frac{1}{2} [(u_1^2)_x + (v_1^2)_x] - g\zeta_x - [E(\zeta S_1 + T_1)]_x - \left[ \frac{1}{2} (\kappa_1^2 - \zeta^2) (u_1 S_1 + v_1 S_1) \right]_x - [(\kappa_1 - \zeta) (u_1 T_1 + v_1 T_1)]_x - \frac{1}{2} [(\zeta S_1 + T_1)^2]_x$$

$$G = -(\kappa_1 - \zeta) [\eta (S_2 - v_1)_y + T_2]_y - \frac{\kappa_1^2 - \zeta^2}{2} v_{1y} + \zeta \zeta_y v_1 + \zeta_x [\eta (S_2 - v_1)_y + T_2]$$

$$G = -\frac{1}{2} [(u_1^2)_y + (v_1^2)_y] - g\zeta_y - [E(\zeta S_1 + T_1)]_y - \left[ \frac{1}{2} (\kappa_1^2 - \zeta^2) (u_1 S_1 + v_1 S_1) \right]_y - [(\kappa_1 - \zeta) (u_1 T_1 + v_1 T_1)]_y - \frac{1}{2} [(\zeta S_1 + T_1)^2]_y$$

$$G_1 = -(\kappa_1 - \zeta) [\eta (S_2 - u_1)_y + T_2]_y - \frac{\kappa_1^2 - \zeta^2}{2} u_{1y} + \zeta \zeta_y u_1 + \zeta_x [\eta (S_2 - u_1)_y + T_2]$$

4阶校正方程为

$$\zeta_{ij}^{n+1} = \zeta_{ij}^n + \frac{\Delta t}{24} (9E_{ij}^{n+1} - 19E_{ij}^n - 5E_{ij}^{n-1} + E_{ij}^{n-2}) \quad (19)$$

$$U_{ij}^{n+1} = U_{ij}^n + \frac{\Delta t}{24} (9E_{ij}^{n+1} - 19E_{ij}^n - 5E_{ij}^{n-1} + E_{ij}^{n-2}) + (F_{ij}^n)^2 - (F_{ij}^{n-1})^2 \quad (20)$$

$$V_{ij}^{n+1} = V_{ij}^n + \frac{\Delta t}{24} (9G_{ij}^{n+1} - 19G_{ij}^n - 5G_{ij}^{n-1} + G_{ij}^{n-2}) + (G_{ij}^n)^2 - (G_{ij}^{n-1})^2 \quad (21)$$

对于边界条件,动边界方案对于干-湿边界的导数不进行特殊处理,将更加有利于数值模型中导数的计算。因此在任何位置(包括海岸边界点),均采用五点中心有限差分进行计算。动边界方案采用线性外推法,海表起伏、速度分量将从湿区域通过干-湿边界外推到干区域。通过干-湿边界的外推准许边界存在各个节点内或者节点之间。在干区域的海表起伏、速度分量的外推值可通过求解湿节点的模型方程得到。当求解模型方程时,采用五点中心有限差分近似空间导数。尽管在干节点不计算导数,但这些点的海表起伏、速度分量的物理值均可通过相邻湿节点的导数进行评估。在每一时间步长内均对干-湿边界进行判断。这一动边界方案在数值上是稳定的,不需要额外的耗散机制。

### 3 数值模拟与比较

波浪爬坡是在自然界中普遍存在的现象,是近岸防波堤等结构物设计需要考虑的因素。

1986和1987年, Synolakis开展了研究孤立波的爬坡实验<sup>[7-8]</sup>,并提供了大量的实验数据。实验将孤立波作为入射波,采用的坡度为1:19.85,波高为  $\varepsilon = 0.28$ ,底摩擦  $f = 10^{-3}$ 。本文采用二层 Boussinesq 方程模型进行数值模拟。

图2给出了针对算例的波浪爬高的数值结果。从图2(a)、(b)可以看出,波浪开始破碎;从图2(c)、(d)可以看出,波浪爬坡。与 Synolakis(1986年)的物理实验结果比较,本模型数值结果较好地预报了波浪爬高的变化趋势。预报的波浪爬坡高度大于实验测量值,分析原因是实际的底摩擦大于模型的底摩擦。

### 4 结论

本文采用分层 Boussinesq 类方程对近海岸波浪爬坡开展数值模拟研究,采用有限差分的预测-校正方法数值离散二层 Boussinesq 类方程,建立数值波浪模型。根据 Synolakis

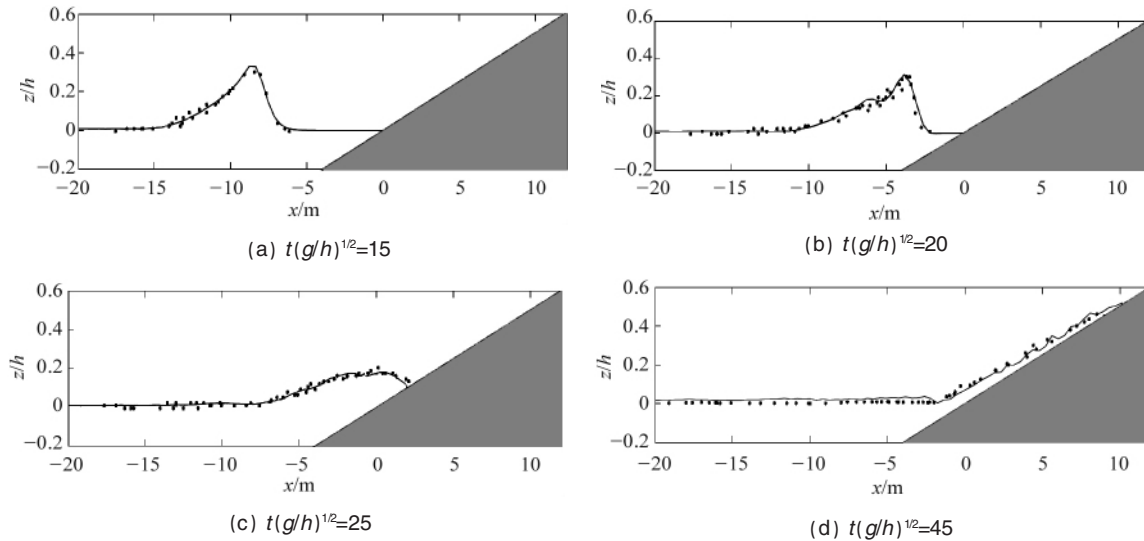


图2 破碎缓坡上孤立波爬坡数值结果

Fig. 2 Numerical simulation of breaking solitary wave runup and rundown on a planar beach

(1986年)的物理实验,数值模拟孤立波在梯形水道上的爬坡,验证了分层 Boussinesq 方程波浪模型在该研究中具有很好的适用性和较高的精度。模型较好地预报了波浪爬高的变化趋势。预报的波浪的爬坡高度大于实验测量值。分析原因是实际的底摩擦要大于模型中底摩擦。因此在数值模拟波浪爬坡中,不同的摩擦参数对于爬坡高度影响显著,水深越浅,影响越显著。

#### 参考文献 (References)

- [1] Peregrine D H. Long waves on a beach [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, 27(4): 815-827.
- [2] Madsen P A, Sørensen O R. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics: Part 2 A slowly varying bathymetry[J]. *Coastal Engineering*, 1992, 18(3-4): 183-204.

- [3] Nwogu O. Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation[J]. *Journal of Waterway Port Coastal and Ocean Engineering*, 1993, 119(6): 618-638.
- [4] Gobbi M F, Kirby J T. Wave evolution over submerged sills: Tests of a high-order Boussinesq model[J]. *Coastal Engineering*, 1999, 37: 57-96.
- [5] Lynett P, Liu P. A two-dimensional, depth-integrated model for internal wave propagation over variable bathymetry[J]. *Wave Motion*, 2002, 36(3): 221-240.
- [6] Lynett P. A multi-layer approach to modeling generation propagation and interaction of water waves[D]. Ithaca, NY: Cornell University, 2002.
- [7] Synolakis C E. The runup of long waves [D]. Pasadena, CA: California Institute of Technology, 1986.
- [8] Synolakis C E. The runup of solitary waves [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1987, 185: 523-545.

(责任编辑 朱宇)

#### ·学术动态·



## “第三届全国微生物基因组学学术研讨会”征文

微生物基因组研究是近年来取得了巨大成就,成为当前微生物学的热点领域。中国微生物学会主办、国家海洋局第三海洋研究所和农业微生物学国家重点实验室承办的“第三届全国微生物基因组学学术研讨会”将于2010年11月26—29日在福建省厦门市召开。会议主题:“中国微生物基因组研究的展望”。

征文内容:微生物基因组学和比较基因组,微生物新功能基因的发掘,微生物蛋白组,微生物转录组,微生物代谢组。

征文截止时间:2010年10月15日。

联系方式:武汉市洪山区狮子山街1号华中农业大学微生物农药国家工程研究中心(430070)周萍,电话/传真:027-87287254,13343476116,电子信箱:zhouping71\_@163.com;厦门市大学路178号国家海洋局第三海洋研究所(361006)周娟,电话:0592-2195608,传真:0592-2085376,电子信箱:skidu@21cn.com。