指标为 3 的单纯可迁三元系大集的三倍构作

范秉理

北京交通大学数学研究所,北京 100044

摘要 一个指标为 3 的可迁三元系 $DTS(v,3)$ 是一个对子 (X,B)(其中 X 为一个 v 元集,B 为 X 中可迁三元组(称作区组)的集合),满足 X 的每个有序对都恰包含于 B 中的 3 个区组。设 (X,B) 是一个没有重复区组的 $DTS(v,3)$,如果 $(x,y,z)\in B$,必有 (z,y,x),(z,x,y),(y,x,z),(y,z,x),$(x,z,y)\notin B$,则称 (X,B) 是单纯的,记为 $PDTS(v,3)$。不相交 $PDTS(v,3)$ 大集记为 $LPDTS(v,3)$,是一个集合 $\{(X,B_i)\}_i$,其中每个 (X,B_i) 都是 $PDTS(v,3)$,并且 $\cup_i B_i$ 构成 X 中所有可迁三元组的一个划分。本文给出了 $LPDTS(v,3)$ 的一种三倍构造方法,得到了其存在的一个无穷类:对于任意正整数 v,$v\equiv 8,14(\mathrm{mod}18)$,存在 $LPDTS(v,3)$。结论对构作常重码具有重要的参考价值和理论意义。

关键词 三元系;大集;单纯;可迁

中图分类号 O157.2 **文献标识码** A **文章编号** 1000-7857(2010)14-0067-03

Tripling Construction for Large Sets of Directed Triple Systems with Index 3

FAN Bingli

Institute of Mathematics, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China

Abstract There are two kinds of oriented triples on X: the cyclic triple and the transitive triple. A cyclic triple on X is a set of three ordered pairs (x, y), (y, z) and (z, x) of X, which is denoted by $<x, y, z>$ (or $<y, z, x>$, or $<z, x, y>$), and a transitive triple on X is a set of three ordered pairs (x, y), (y, z) and (x, z) of X, which is denoted by (x, y, z). An oriented triple system of order v with index λ is a pair $(X, B)$where X is a v-set and B is a collection of oriented triples on X, called blocks, such that every ordered pair of X belongs to exactly λ blocks of B. If B consists of transitive (or cyclic) triples only, the system is called a directed triple system (or Mendelsohn triple system) of order v with index λ and denoted by $DTS(v, \lambda)$ (or $MTS(v, \lambda)$). If B contains both cyclic triples and transitive triples, the system is called a hybrid triple system of order v with index λ and denoted by $HTS(v, \lambda)$. A triple system is called simple if there are no repeated blocks in B. A simple $DTS(v, \lambda)$ is called pure and denoted by $PDTS(v, \lambda)$ if $(x, y, z)\in B$ implies (z, y, x), (z, x, y), (y, x, z), (y, z, x), $(x, z, y)\notin B$. A large set of disjoint $PDTS(v, \lambda)$s, denoted by $LPDTS(v, \lambda)$, is a collection of $\{(X,B_i)\}_i$ where each (X,B_i) is a $PDTS(v, \lambda)$ and $\cup_i B_i$ is a partition of all transitive triples on X. In this paper, a tripling construction for $LPDTS(v, 3)$ is presented, and one infinite family for the existence of $LPDTS(v, 3)$ is obtained: for any positive integers v, $v\equiv 8,14(\mathrm{mod}18)$, there exists an $LPDTS(v, 3)$.

Keywords triple system; large set; pure; directed

0 引言

大集是组合设计中的经典问题之一。从第一个大集问题提出至今的一百多年里,各种各样的大集问题得到了广泛研究。第一个成功解决的大集问题是 Steiner 三元系大集。如果将 Steiner 三元系大集中的无序三元组改为可迁等有向三元组,就得到了有向三元系大集。常重码在编码理论中有重要

收稿日期:2010-06-03

基金项目:国家自然科学基金项目(10831002)

作者简介:范秉理,讲师,研究方向为组合设计与编码,电子信箱:blfan@bjtu.edu.cn

作用。带有单纯性的有向三元系大集被应用于构作常重码后，该类大集引起了广泛关注。周君灵等[1]确定了指标为 1 的单纯可迁三元系大集的存在谱。

设 X 是一个有限集。本文中 X 的有序对总指一个对子 (x,y)，满足 $x\neq y\in X$。X 的可迁三元组是由 X 的 3 个有序对 (x,y)，(y,z)，(x,z) 组成的集合，记作 (x,y,z)。

指标为 λ 的可迁三元系，记为 $DTS(v,\lambda)$，是一个对子 (X,B)，其中 X 是 v 元集，B 是 X 中可迁三元组的集合(称作区组)，满足 X 的每个有序对都恰包含于 B 中 λ 个区组。设 (X,B) 是一个没有重复区组的 $DTS(v,\lambda)$，如果满足 $(x,y,z)\in B$，必有 (z,y,x)，(z,x,y)，(y,x,z)，(y,z,x)，$(x,z,y)\notin B$，则称 $DTS(v,\lambda)$ 是单纯的，记为 $PDTS(v,\lambda)$。

不相交 $DTS(v,\lambda)$ 大集，记为 $LDTS(v,\lambda)$，是一个集合 $\{(X,B_i)\}_i$，其中每个 (X,B_i) 都是 $DTS(v,\lambda)$，并且 $\cup_i B_i$ 构成了 X 中所有可迁三元组的一个划分。特别地，如果大集中的每个 (X,B) 都是 $PDTS(v,\lambda)$，则大集称为单纯 $DTS(v,\lambda)$ 大集，记作 $LPDTS(v,\lambda)$。

本文主要讨论 $\lambda=3$ 时，$LPDTS(v,3)$ 的存在性，并给出了 $LPDTS(v,3)$ 的一种构造方法，得到了其存在的一个无穷类。首先列举 $LDTS$ 和 $LPDTS$ 的已知结果。习惯上，当 $\lambda=1$ 时，$LPDTS(v,1)$ 记为 $LPDTS(v)$。

定理 1 (1) $LDTS(v,\lambda)$ 的存在谱是 $v-2\geqslant\lambda$。若 $\lambda\equiv 0\pmod 3$，则 $3(v-2)\equiv 0\pmod\lambda$；若 $\lambda\not\equiv 0\pmod 3$，则 $v\equiv\lambda+2,2\lambda+2\pmod{3\lambda}$[2]。

(2) 存在 $LPDTS(v)$ 当且仅当 $v\equiv 0,1\pmod 3$，$v\geqslant 4$[1]。

(3) $LPDTS(v,\lambda)$ 存在的必要条件是 $v\geqslant 2\lambda+2$，$3(v-2)\equiv 0\pmod\lambda$。若 $\lambda\equiv 1,2\pmod 3$，则 $v\equiv 0,1\pmod 3$[3]。

1 $LPDTS(v,3)$ 的三倍构作

I_u 为集合 $\{0,1,2,\cdots,u-1\}$，$I_u\times I_v$ 中的元素 (s,t) 简记为 s_t，I_v 中的加法在模 v 下进行。对于给定的可迁三元组 (x,y,z)，记 $P_0(x,y,z)=Q_0(x,y,z)=(x,y,z)$，$P_1(x,y,z)=Q_2(x,y,z)=(y,z,x)$，$P_2(x,y,z)=Q_1(x,y,z)=(z,x,y)$。

引理 1 当 $v>3$ 时，存在幂等拟群 $(I_v,\circ)$ 满足对于任意 $x\neq y\in I_v$，都有 $x\circ y\neq y\circ x$[4]。

引理 2 设 v 是偶数，$\alpha=(0,1,2,\cdots,v-1)$ 是 I_v 上的 v 阶置换，则对于任意 $x,y,r\in I_v$，$y=\alpha_r(x)$ 与 $x=\alpha_{r+1}(y)$ 不能同时成立。

证明 若 $y=\alpha_r(x)$ 和 $x=\alpha_{r+1}(y)$ 同时成立，则有 $y=\alpha_r(x)=\alpha_{2r+1}(y)$。此时必有 $2r+1=kv$ (k 为整数)。但 $2r+1$ 是奇数，而 kv 是偶数，$2r+1=kv$ 显然不成立。故假设错误，$y=\alpha_r(x)$ 与 $x=\alpha_{r+1}(y)$ 不同时成立。

定理 2 设 $v\equiv 2,4\pmod 6$，$v\geqslant 2$。如果存在 $LPDTS(v+2)$，那么存在 $LPDTS(3v+2,3)$。

证明 设 $(I_v,\circ)$ 是一个幂等拟群，满足引理 1。α 是引理 2 中定义的 v 阶置换。根据定理 1，当 $v\equiv 2,4\pmod 6$，$v\geqslant 2$ 时，存在 $LPDTS(v+2)$。假设 $\{(I_v\cup\{a,b\},S_{kr}):k\in I_3,r\in I_v\}$ 是一个 $LPDTS(v+2)$。在集合 $Y=(I_v\times I_3)\cup\{a,b\}$ 上定义如下 $3v$ 个区组集 $T_{kr}(k\in I_3,r\in I_v)$，它由以下 4 部分组成。

(I) (x_i,y_i,z_i)，其中 $i\in I_3$，$x,y,z\in I_v$，$(x,y,z)\in S_{kr}$，当其分量上标是 a 或 b 时，省略相应分量的第 2 坐标。

(II) $P_k(x_i,\alpha_r(x)_{i+1},a)Q_k(a,x_i,\alpha_{r+1}(x)_{i-1})$，$P_k(b,\alpha_r(x)_{i+1},x_i)$，$Q_k(\alpha_{r+1}(x)_{i-1},x_i,b)$，其中 $i\in I_3$，$x\in I_v$。

(III) $P_k(y_i,\alpha_r(x\circ y)_{i+1},x_i)$，$P_k(y_i,\alpha_{r+1}(x\circ y)_{i-1},x_i)$，其中 $i\in I_3$，$x\neq y\in I_v$。

(IV) $P_k(x_0,y_1,\alpha_r(x\circ y)_2)$，$Q_k(\alpha_{r+1}(x\circ y)_2,y_1,x_0)$，其中 $x,y\in I_v$。

下面说明 $\{(Y,T_{kr}):k\in I_3,r\in I_v\}$ 是一个 $LPDTS(3v+2,3)$。

1.1 每个 (Y,T_{kr}) 是一个 $DTS(3v+2,3)$

由于 $|T_{kr}|=(v+2)(v+1)+12v+6v(v-1)+2v\cdot v=(3v+2)(3v+1)$，因此只需说明 Y 上的每个有序对 P 包含在 T_{kr} 的某 3 个区组中。只考虑 $k=0$，$r=0$ 情况，其他情况与此类似。

(a) $P=(a,b)$，(b,a)。由于 $(I_v\cup\{a,b\},S_{kr})$ 是一个 $DTS(v+2)$，故 P 属于(I)中的 3 个区组。

(b) $P=(a,x_i)$，(b,x_i)，(x_i,a)，(x_i,b)，其中 $i\in I_3$，$x\in I_v$。由于 $((I_v\cup\{a,b\},S_{kr})$，$(I_v\cup\{a,b\},S_{kr}))$ 是一个 $DTS(v+2)$，故 (a,x_i) 属于(I)中的 1 个区组。同时，(a,x_i) 也属于(II)中的 $(a,x_i,\alpha_{r+1}(x)_{i-1})$ 和 (a,y_{i+1},x_i)，其中 $x=\alpha_{r+1}(y)$。其他对与此类似。

(c) $P=(x_i,y_i)$，其中 $i\in I_3$，$x\neq y\in I_v$。由于 $(I_v\cup\{a,b\},S_{kr})$ 是一个 $DTS(v+2)$，故 P 属于(I)中的 1 个区组。同时 P 也属于(III)中的 $(x_i,\alpha_r(y\circ x)_{i+1},y_i)$ 和 $(x_i,\alpha_{r+1}(y\circ x)_{i-1},y_i)$。

(d) $P=(x_i,y_{i+1})$，其中 $i\in I_3$，$x,y\in I_v$。P 属于(IV)中的 1 个区组。若 $i=0$，P 属于(IV)中的 (x_0,y_1,y_2')，其中 $y'=\alpha_r(x\circ y)$；若 $i=1$，P 属于(IV)中的 (x_0',x_1,y_2)，其中 $y=\alpha_r(x'\circ x)$；若 $i=2$，P 属于(IV)中的 (x_2,y_1',y_0)，其中 $x=\alpha_{r+1}(y\circ y')$。$P$ 还属于另外两个区组，有以下 3 种情况。

① $y=\alpha_r(x)$。P 属于(II)中的 $(x_i,\alpha_r(x)_{i+1},a)$。此外，对于任意 $x,y\in I_v$，一定存在 y' 满足 $x=\alpha_{r+1}(y\circ y')$。由引理 2 和 $(I_v,\circ)$ 是幂等拟群，可得 $y\neq y'$。此时，P 属于(III)中的 (y_{i+1}',x_i,y_{i+1})。

② $y\neq\alpha_r(x)$，$x=\alpha_{r+1}(y)$。P 属于(II)中的 (x_i,y_{i+1},b)。同时，P 还属于(III)中 (x_i,y_{i+1},x_i')，其中 $y=\alpha_r(x'\circ x)$。

③ $y\neq\alpha_r(x)$，$x\neq\alpha_{r+1}(y)$。P 属于(III)中的 (x_i,y_{i+1},x_i')，其中 $y=\alpha_r(x'\circ x)$，P 也属于(III)中的 (y_{i+1}',x_i,y_{i+1})，其中 $x=\alpha_{r+1}(y\circ y')$。

(e) $P=(x_i,y_{i-1})$，其中 $i\in I_3$，$x,y\in I_v$。这种情况与(d)类似，P 也属于 T_{kr} 中的某 3 个区组。

1.2 每个区组集 T_{kr} 都是单纯的

显然，只要验证每个部分的区组集满足单纯性即可。

(a) 由 S_{kr} 的单纯性，可得(I)中的区组集是单纯的。

(b) (II)中的区组集是单纯的。只需讨论区组 $(x_i,\alpha_r(x)_{i+1},a)$ 与 $(a,y_{i+1},\alpha_{r+1}(y)_i)$ 及区组 $(b,\alpha_r(x)_{i+1},x_i)$ 与 $(\alpha_{r+1}(y)_i,y_{i+1},b)$ 是否满足单纯性即可，其中 $i\in I_3$，$x,y\in I_v$。由引理 3，$y=\alpha_r(x)$ 与

$x=\alpha_{r+1}(y)$不能同时成立，故单纯性满足。

(c) (III)中的区组集是单纯的。对于任意的 $x\neq y\in I_v$，由引理 2，$x\circ y\neq y\circ x$，可得 $\alpha_r(x\circ y)$与 $\alpha_r(y\circ x)$不等，$\alpha_{r+1}(x\circ y)$与 $\alpha_{r+1}(y\circ x)$不等，所以该部分区组集是单纯的。

(d) (IV)中的区组集是单纯的。此时只需讨论$(x_0,y_1,\alpha_r(x\circ y)_2)$与$(\alpha_{r+1}(x\circ y)_2,y_1,x_0)$是否满足单纯性即可，其中 $x,y\in I_v$。由置换 α 的定义，$\alpha_r(x\circ y)\neq\alpha_{r+1}(x\circ y)$，所以该部分区组集是单纯的。

1.3 Y 中的任意三元组 T 都出现在某个 T_{kr} 中

(a) $T=(a,b,x_i)$，(b,x_i,a)，(x_i,a,b)，(b,a,x_i)，(a,x_i,b)，(x_i,b,a)，(a,x_i,y_i)，(x_i,y_i,a)，(y_i,a,x_i)，(b,x_i,y_i)，(x_i,y_i,b)，(y_i,b,x_i)，(x_i,y_i,z_i)，其中 $i\in I_3$，$x,y,z\in I_v$。由于$\{(I_v\cup\{a,b\},S_{kr}):k\in I_3,r\in I_v\}$是一个大集，存在 $k\in I_3,r\in I_v$ 满足$(a,b,x)\in S_{kr}$，因此(a,b,x_i)包含在 T_{kr} 的(I)中。其他三元组的情况与此类似。

(b) $T=(a,x_i,y_j)$，(x_i,y_j,a)，(y_j,a,x_i)，(b,x_i,y_j)，(x_i,y_j,b)，(y_j,b,x_i)，其中 $i\neq j\in I_3$，$x,y\in I_v$。若 $j=i+1$，由置换 α 的定义，存在 $r\in I_v$，满足 $y=\alpha_r(x)$，因此(a,x_i,y_j)包含在 T_{2r} 的(II)中；若 $j=i-1$，由置换 α 的定义，存在 $r'\in I_v$，满足 $y=\alpha_{r'+1}(x)$，因此(a,x_i,y_j)包含在 $T_{0r'}$ 的(II)中。其他三元组与此类似。

(c) $T=(x_i,y_i,z_j)$，(x_i,z_j,y_i)，(z_j,x_i,y_i)，其中 $i\neq j\in I_3$，$x,y,z\in I_v$，$x\neq y$。若 $j=i+1$，由拟群$(I_v,\circ)$和置换 α 的定义，存在 $r\in I_v$，满足 $z=\alpha_r(x\circ y)$，因此(x_i,y_i,z_j)包含在 T_{2r} 的(III)中；若 $j=i-1$，由拟群$(I_v,\circ)$和置换 α 的定义，存在 $r'\in I_v$，满足 $z=\alpha_{r'+1}(x\circ y)$，故$(x_i,y_i,z_j)$包含在 $T_{2r'}$ 的(III)中。其他三元组情况类似。

(d) (x_0,y_1,z_2)，(x_1,y_2,z_0)，(x_2,y_0,z_1)，(x_2,y_1,z_0)，(x_1,y_0,z_2)，(x_0,y_2,z_1)，其中 $x,y,z\in I_v$。由拟群$(I_v,\circ)$和置换 α 的定义，存在 $r\in I_v$，满足 $z=\alpha_r(x\circ y)$，因此(x_0,y_1,z_2)包含在 T_{0r} 的(IV)中。由拟群$(I_v,\circ)$和置换 α 的定义，存在 $r'\in I_v$，满足 $x=\alpha_{r'+1}(z\circ y)$，因此$(x_2,y_1,z_0)$包含在 $T_{0r'}$ 的(IV)中。其他三元组的情况与此类似。

通过以上讨论得出，$\{(Y,T_{kr}):k\in I_3,r\in I_v\}$ 确实是一个 $LPDTS(3v+2,3)$。证毕。

由定理 1 和定理 2，得出 $LPDTS(v,3)$是存在的一个无穷类。

定理 3 对于任意正整数 $v\equiv 8,14 \pmod{18}$，存在 $LPDTS(v,3)$。

2 结论

本文给出了指标为 3 的单纯可迁三元系大集的一种三倍构作方法，得到了其存在的一个无穷类：对于任意正整数 $v\equiv 8,14 \pmod{18}$，存在 $LPDTS(v,3)$。常重码在编码理论中有重要作用。带有单纯性的有向三元系大集可用于构作常重码。本文给出的单纯有向三元系大集构作方法，以及所得到的单纯有向三元系大集的无穷类，对于构作常重码具有重要的参考价值和理论意义。

参考文献(References)

[1] 周君灵, 常彦勋, 季利均. 纯的可迁三元系大集的存在谱[J]. 中国科学 A 辑, 2006, 36(7): 764–788.
Zhou Junling, Chang Yanxun, Ji Lijun. *Science in China, Series A*, 2006, 36(7): 764–788.

[2] Chang Y. On large sets of directed triple systems [J]. *J Statist Plann Inference*, 1996, 51(2): 137–142.

[3] Fan B, Zhou J. Large sets of pure directed triple systems with index λ[J]. *Acta Math Sin, Engl Ser*, 2010, accepted.

[4] Bennett F, Kang Q, Lei J, *et al.* Large sets of disjoint pure Mendelsohn triple systems[J]. *J Statist Plann Inference*, 2001, 95(1): 89–115.

(责任编辑 朱宇)