

# 异结构超混沌系统的同步及电路实现

廖洪运, 王 玲, 张协衍

湖南大学电气与信息工程学院, 长沙 410082

**摘要** 为了实现两个不同结构超混沌系统间的同步, 采用自适应反馈同步的方法, 构建了混沌同步控制器。在控制器的作用下, 驱动系统和响应系统可以实现同步。通过对广义 Lorenz 系统与超混沌 Lü 系统的同步进行数值仿真和电路实现, 证实了自适应反馈法可以实现不同结构超混沌系统间的同步。该方法不仅有效、可靠, 而且对于具体的误差, 系统可通过调整控制器的参数来实现同步, 具有稳健、易于实现等优点。

**关键词** 广义 Lorenz 系统; 超混沌 Lü 系统; 同步; 自适应反馈控制; 电路实现

**中图分类号** O545

**文献标识码** A

**文章编号** 1000-7857(2010)10-0068-05

## Synchronization of Hyperchaotic Systems with Different Structures and Its Circuit Implementation

LIAO Hongyun, WANG Ling, ZHANG Xieyan

College of Electrical and Information Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China

**Abstract** To achieve synchronization of two different hyperchaotic systems, controllers with adaptive feedback control are designed. Results of simulation indicate that some variables in the generalized Lorenz system take values greater than  $\pm 15V$  and all output variables in the hyperchaotic Lü system are in the range of  $\pm 15V$ . However, the normal working voltage of analog circuit is  $\pm 15V$ . It is necessary to perform a linear transformation for the generalized Lorenz system, but it is not necessary for the hyperchaotic Lü system. The transformed generalized Lorenz system serves as a drive system, and the response system is the hyperchaotic Lü system. Based on the adaptive feedback principles, the controllers of their synchronization are designed. The simulation results show that the synchronization can be achieved between the transformed generalized Lorenz system and the hyperchaotic Lü system. On this basis, the master circuit, the slave circuit and their synchronous control circuit are designed. The transformed generalized Lorenz attractor and the hyperchaotic Lü attractor are observed through the oscilloscope. With the synchronous control circuit, the synchronization of the master and slave systems can be realized. Numerical simulation and circuit experiment results show that the synchronization between hyperchaotic systems of different structures can be reliably achieved by applying the proposed method. Furthermore, the synchronization can be achieved by adjusting parameters of the controllers, which is easy and makes a stable system.

**Keywords** generalized Lorenz system; hyperchaotic Lü system; synchronization; adaptive feedback control; analogue circuit

### 0 引言

20 世纪 90 年代初, Pecora 等<sup>[1]</sup>提出一种混沌同步方法, 用以实现相同系统的混沌同步, 之后混沌同步一直是研究非线性科学的热点课题之一。目前为止, 许多学者提出了多种方法用以实现混沌同步, 主要有驱动-响应同步法<sup>[1]</sup>、线性和非线性反馈控制同步法<sup>[2-3]</sup>、主动-被动同步法<sup>[4]</sup>、自适应同步法<sup>[5-6]</sup>、脉冲同步法<sup>[7-8]</sup>等。

国内外学者对混沌同步问题做了大量研究, 这些方法多数用于 2 个相同系统的不同初值的同步。但因为异结构(即不同系统)间存在不同结构以及参数失配问题, 对其同步问题的研究相对较少。在实际应用中, 特别是用于保密通信的混沌系统同步, 驱动系统与响应系统的结构有可能不同, 考虑异结构的同步更具有实际意义。与低维混沌系统相比, 超混沌系统具有更为复杂的动力学行为, 其特点是至少在四维及更高维的非线

收稿日期: 2010-03-29

基金项目: 湖南省教育厅资助科研项目(06C522)

作者简介: 廖洪运, 硕士研究生, 研究方向为混沌控制和同步, 电子信箱: liaohy76.student@sina.com; 王玲(通信作者), 教授, 研究方向为现代网络和通信技术, 电子信箱: wl\_hunu@163.com

性系统中具有 2 个或 2 个以上正的 Lyapunov 指数, 具有更高的保密性, 超混沌系统的同步研究具有重要的价值。

文献[9]利用 2 种不同的方法实现超混沌 Chen 系统和超混沌 Rossler 系统的异结构同步, 文献 [10] 提出了实现超混沌 Rossler 系统与广义 Lorenz 系统的同步新方法, 文献[11]研究超混沌 Chen 系统与广义的 Lorenz 系统的异结构同步。上述研究大多是理论或数值方面的工作, 电路的实现比较少见。本文采用自适应反馈同步的方法, 构建了广义 Lorenz 系统与超混沌 Lü 系统的混沌同步控制器。通过 Matlab 仿真, 验证了该方法是可行的。在此基础上, 设计了广义 Lorenz 系统与超混沌 Lü 系统的同步模拟电路。数值仿真和电路实验结果表明, 自适应反馈同步法可以实现不同结构的超混沌系统间的同步。

## 1 同步方法

考虑由下面数学模型描述的混沌系统

$$\dot{x}=f(x) \quad (1)$$

其中,  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  为式(1)的状态向量,  $f(x)=(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T \in \mathbb{R}^n$  为非线性向量场。将式(1)作为驱动系统, 则响应系统为

$$\dot{y}=g(y)+u \quad (2)$$

其中,  $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$  为式(2)的状态向量,  $g(y)=(g_1(y), g_2(y), \dots, g_n(y))^T \in \mathbb{R}^n$  为非线性函数,  $u=(u_1, u_2, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$  为控制器。

设响应系统式(2)和驱动系统式(1)之间的状态误差为  $e=y-x$ , 误差向量  $e=(e_1, e_2, \dots, e_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , 式(2)与式(1)相减, 得到误差系统为

$$\dot{e}=g(x+e)-f(x)+u \quad (3)$$

同步目标为选取合适的  $u$ , 使  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$ , 其中,  $e(t)$  为误差向量  $e$  随时间变化的函数。

假定: 设式(1)的混沌吸引子为有界闭集  $\Omega$ ,  $f(x)$  是定义在  $\Omega$  上的连续函数;  $g(y)$  是定义在集合  $S$  上的有界函数且  $S \supset \Omega$ 。

引理<sup>[10]</sup> 设函数  $\rho(x)=(\rho_1(x), \rho_2(x), \dots, \rho_n(x))^T$  是定义在闭集  $\Omega$  上的有界函数, 对误差系统

$$\dot{e}_i = g_i(y) - f_i(x) + u_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

若取  $u_i = -\rho_i(x) + \varepsilon_i e_i$ ,  $\dot{e}_i = -\beta_i e_i^2$ ,  $\beta_i > 0$ , 则存在  $t_0 \geq 0$ ,  $c > 0$ , 使得当  $t \geq t_0$  时, 有  $|e_i| \leq c$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ 。

定理<sup>[10]</sup> 若存在连续函数  $\rho_i(x)$ ,  $m_{ij}(x)$  及多项式函数  $n_{ij}(e)$  使得

$$g_i(x+e) - f_i(x) = \rho_i(x) + \sum_{j=1}^n e_j m_{ij}(x) n_{ij}(e), \quad i=1, 2, \dots, n \quad (5)$$

则可以选取控制器  $u_i = -\rho_i(x) + \varepsilon_i e_i$ ,  $\dot{e}_i = -\beta_i e_i^2$ ,  $\beta_i > 0$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , 使  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$ 。

## 2 Matlab 验证

广义 Lorenz 系统的数学模型为

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1(y-x) + c_1 w \\ \dot{y} = d_1 x - xz - y \\ \dot{z} = xy - b_1 z \\ \dot{w} = -x - a_1 w \end{cases} \quad (6)$$

由于广义 Lorenz 系统有的状态变量可能大于 15, 而模拟电路中运算放大器的输出仅为  $\pm 15V$ , 为保证电路的正常运行, 必须对式(6)进行线性变换。令  $x=20x_1, y=20x_2, z=20x_3, w=20x_4$ , 得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_2 - x_1) + c_1 x_4 \\ \dot{x}_2 = d_1 x_1 - 20x_1 x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 = 20x_1 x_2 - b_1 x_3 \\ \dot{x}_4 = -x_1 - a_1 x_4 \end{cases} \quad (7)$$

其中, 系统参数  $a_1=1, b_1=0.7, c_1=1.5, d_1=26.0$ 。

超混沌 Lü 系统<sup>[12]</sup>为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_2(y_2 - y_1) + y_4 \\ \dot{y}_2 = b_2 y_2 - 4y_1 y_3 \\ \dot{y}_3 = -c_2 y_3 + 4y_1^2 \\ \dot{y}_4 = d_2 y_2 \end{cases} \quad (8)$$

其中, 系统参数  $a_2=10, b_2=5, c_2=3, d_2=0.5$ 。

下面采用自适应反馈的方法来实现这 2 个系统间的同步。

以式(7)Lorenz 系统作为驱动系统, 受控的超混沌 Lü 系统为响应系统, 则

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_2(y_2 - y_1) + y_4 + u_1 \\ \dot{y}_2 = b_2 y_2 - 4y_1 y_3 + u_2 \\ \dot{y}_3 = -c_2 y_3 + 4y_1^2 + u_3 \\ \dot{y}_4 = d_2 y_2 + u_4 \end{cases} \quad (9)$$

设响应系统与驱动系统之间的状态误差为

$$e_i = y_i - x_i \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

由式(9)减去式(7)可得误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (-10e_1 + 10e_2 + e_4) + (-9x_1 + 9x_2 - 0.5x_4) + u_1 \\ \dot{e}_2 = 5e_2 + (-4x_1e_3 - 4x_3e_1 - 4e_1e_3) + (-26x_1 + 6x_2 + 16x_1x_3) + u_2 \\ \dot{e}_3 = -3e_3 + (8x_1e_1 + 4e_1^2) + (4x_1^2 - 20x_1x_2 - 2.3x_3) + u_3 \\ \dot{e}_4 = 0.5e_3 + (x_1 + 0.5x_2 + x_4) + u_4 \end{cases} \quad (10)$$

为实现式(7)与式(9)同步, 将式(10)与式(5)比较, 可知

$$\begin{cases} \rho_1(x) = -9x_1 + 9x_2 - 0.5x_4 \\ \rho_2(x) = -26x_1 + 6x_2 + 16x_1x_3 \\ \rho_3(x) = 4x_1^2 - 20x_1x_2 - 2.3x_3 \\ \rho_4(x) = x_1 + 0.5x_2 + x_4 \end{cases} \quad (11)$$

根据定理可以选取控制器  $A: u_i = -\rho_i(x) + \varepsilon_i e_i$ ,  $\dot{e}_i = -\beta_i e_i^2$ ,  $\beta_i > 0$ ,  $i=1, 2, 3, 4$ 。在数值仿真中选择  $\beta_1=10, \varepsilon_1(0)=0; \beta_2=10, \varepsilon_2(0)=0; \beta_3=1, \varepsilon_3(0)=0; \beta_4=1, \varepsilon_4(0)=0$ ; 初值分别为  $x_1(0)=0, x_2(0)=0, x_3(0)=-1, x_4(0)=1; y_1(0)=1, y_2(0)=1, y_3(0)=0, y_4(0)=0.5$ ; 得到驱动系统与响应系统的混沌吸引子在三维空间的投影如图 1 所示。

误差  $e_i$  及参数  $\varepsilon_i$  随时间的演化曲线如图 2 所示,随着时间的增加,误差  $e_i (i=1, 2, 3, 4)$  趋于零,而  $\varepsilon_i (i=1, 2, 3, 4)$  则趋于不同常值。这表明该方法能有效地实现异结构超混沌系统的同步。

也可对上面选择的控制器进行简化,由式(9)右端可知,如

果  $u_3 = -p_3(x)$ , 且  $e_1 \rightarrow 0$ , 则  $e_3 \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$ , 因此选取控制器  $B: u_i = -p_i(x) + \varepsilon_i e_i, \dot{\varepsilon}_i = -\beta_i e_i^2, \beta_i > 0, i=1, 2, 4, u_3 = -p_3(x)$ 。在数值仿真中选择  $\beta_1=10, \varepsilon_1(0)=0; \beta_2=10, \varepsilon_2(0)=0; \beta_3=0, \varepsilon_3(0)=0; \beta_4=1, \varepsilon_4(0)=0$ ; 初值仍选取  $x_1(0)=0, x_2(0)=0, x_3(0)=-1, x_4(0)=1; y_1(0)=1, y_2(0)=1, y_3(0)=0, y_4(0)=0.5$ ; 此时误差  $e_i$  及参数  $\varepsilon_i$  随时间的演化曲线如图 3。

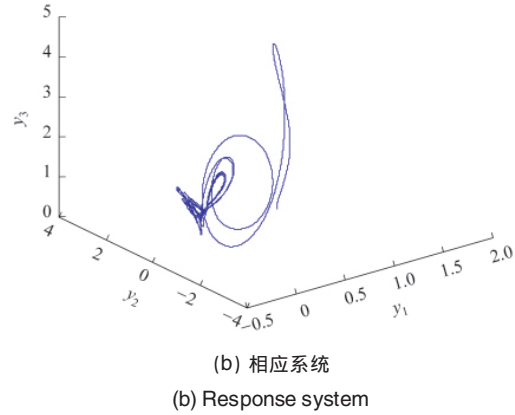
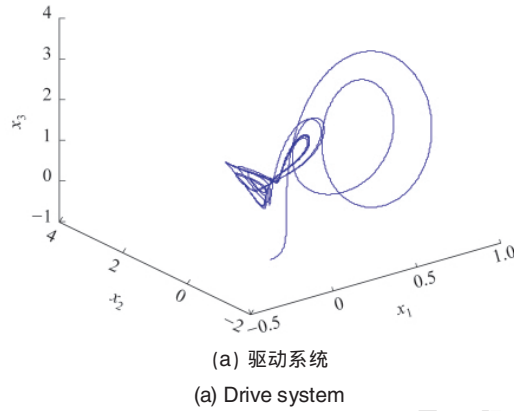


图 1 驱动系统和响应系统的吸引子

Fig. 1 Attractor of drive system and response system

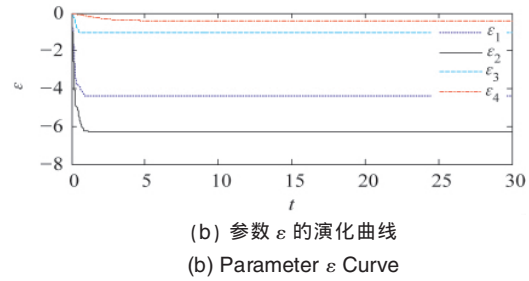
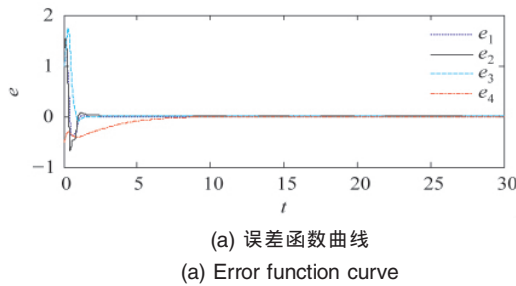


图 2 系统在控制器 A 的同步情形

Fig. 2 Synchronization in the controller case A

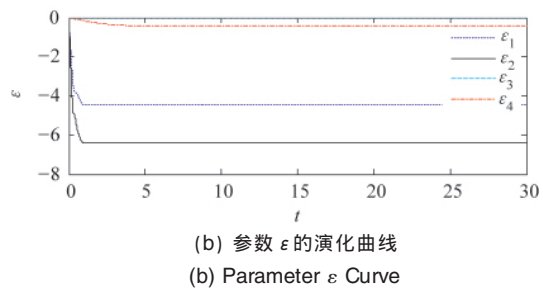
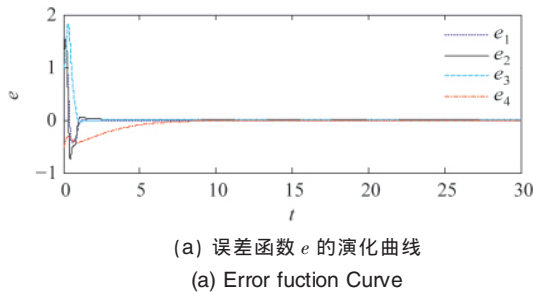


图 3 系统在控制器 B 的同步情形

Fig. 3 Synchronization in the controller case B

对比图 2、图 3 中的误差函数发现,图 2 同步效果更好,这是因为控制器 A 的控制项比控制器 B 的多,同时也增加了系统的复杂性。

若仍采用控制器 B,取  $\beta_4=20$ ,其他系统参数和初始值均不变,此时误差函数曲线如图 4。

对比图 3、图 4 发现,图 4 的  $e_4$  能较快地趋于零,这是由于在图 4 中  $\beta_4=20$ ,而在图 3 中  $\beta_4=1$ 。由此可知,通过调节参数  $\beta$  可以达到较好的同步效果。

通过大量的仿真可看出简化后的控制器只要参数合适仍可以同步,满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$ 。  $e_i$  之间存在的耦合关系使得在对

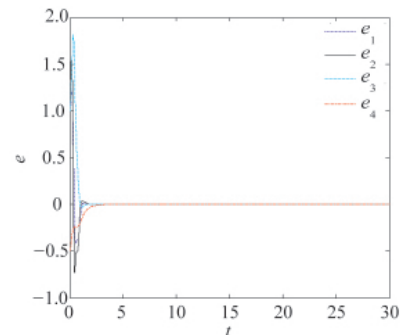


图 4  $\beta_4=20$  时误差函数曲线

Fig. 4 Error function curve when  $\beta_4=20$

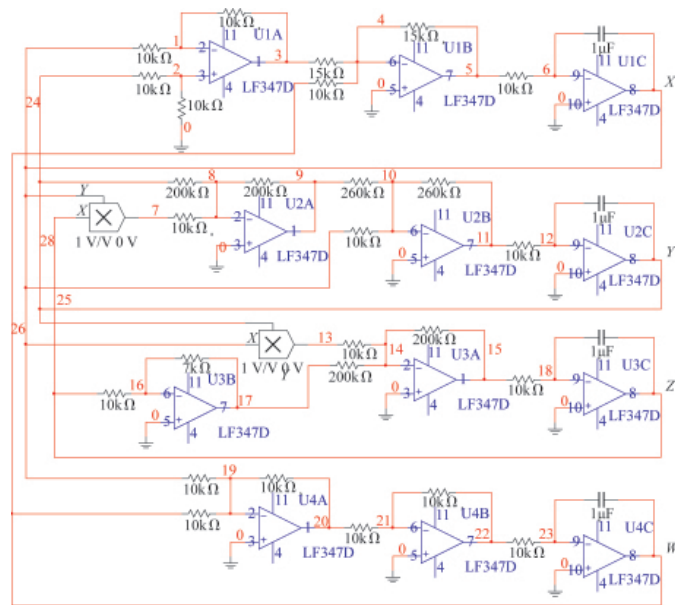
某个  $e_i$  调控时,相应地带动其他误差项趋于零。

### 3 电路实现

根据系统方程设计了实现广义 Lorenz 系统与超混沌 Lü 系统的同步电路,如图 5 所示。整个电路由 3 部分组成:驱动电

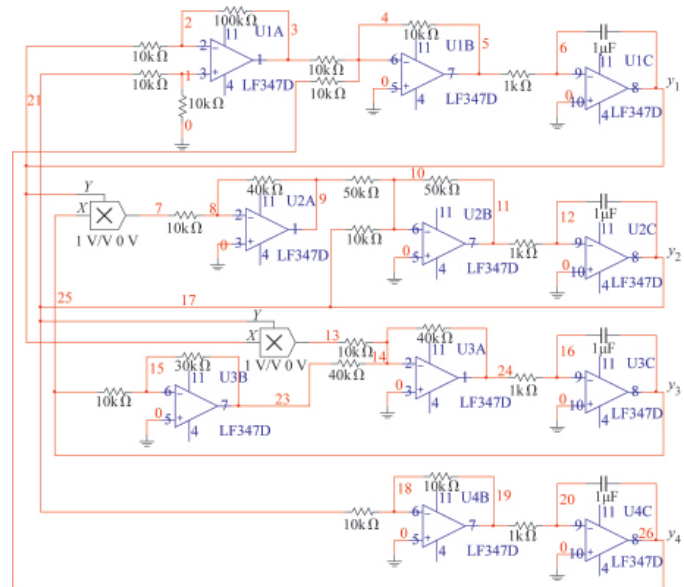
路、同步电路、响应电路。图中的运算放大器均为 LF347D,电路中各元件的数值由系统的参数决定。电路中  $1/(RC)$  是积分因子,决定混沌信号的频率;通过改变电阻  $R$  或电容  $C$ ,可以改变混沌信号的频率,从而满足混沌通信的要求。

电路图 5 的输出混沌吸引子如图 6 所示。



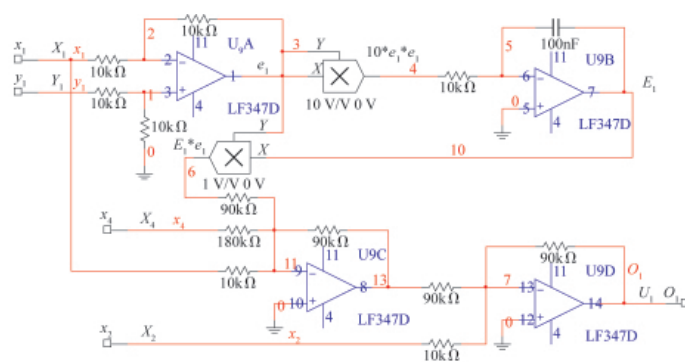
(a) 驱动电路 (广义 Lorenz 系统)

(a) Drive circuit (General Lorenz system)



(b) 响应电路 (超混沌 Lü 系统)

(b) Response circuit (Hyperchaotic Lü system)



(c) 同步电路

(c) Synchronization circuit

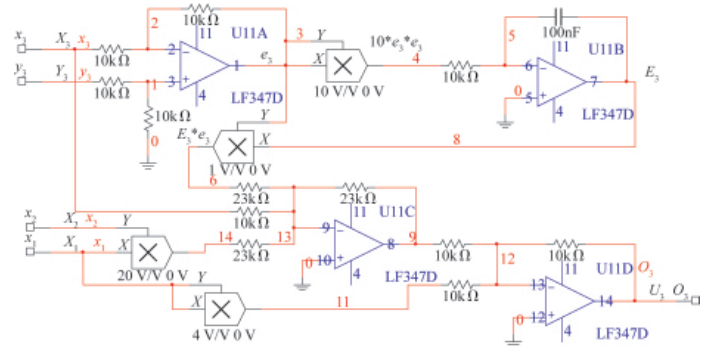


图 5 广义 Lorenz 系统与超混沌 Lü 系统的同步电路

Fig. 5 Synchronization circuit between Generalized Lorenz system and Hyperchaotic Lü system

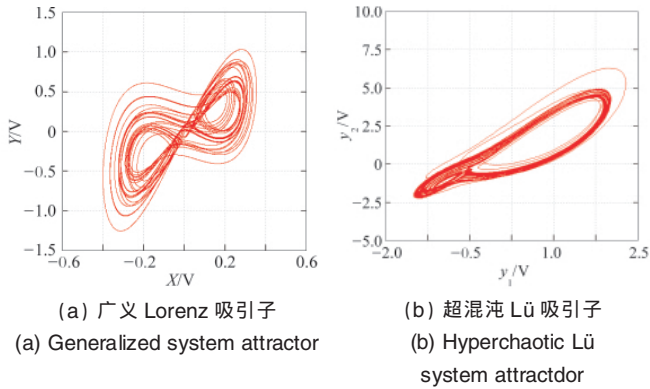


图 6 广义 Lorenz 系统与超混沌 Lü 系统的电路相图  
Fig. 6 Phase diagram of the generalized Lorenz system and hyperchaotic Lü system

观测示波器中误差函数的曲线,发现误差函数能较快趋于零,从而在模拟电路上实现了广义 Lorenz 系统与超混沌 Lü 系统的同步。图 7 是误差函数  $e_2$  分别在 0~0.8s 和 2.6~3.6s 时间的变化曲线,其他误差函数  $e_1, e_3, e_4$  的变化曲线亦类似。

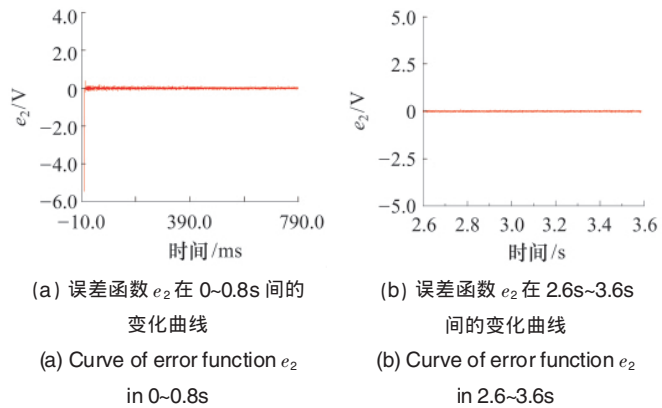


图 7 误差函数  $e_2$  变化曲线  
Fig. 7 Curve of error function  $e_2$

图 8 是驱动系统的状态变量  $x_4$  与响应系统的状态变量  $y_4$  的相图,在同步的初始阶段,  $x_4$  与  $y_4$  的关系并不是线性的,但随着时间的增大,  $x_4$  与  $y_4$  渐渐趋于同步,在示波器中呈现出一条穿越零点的直线。

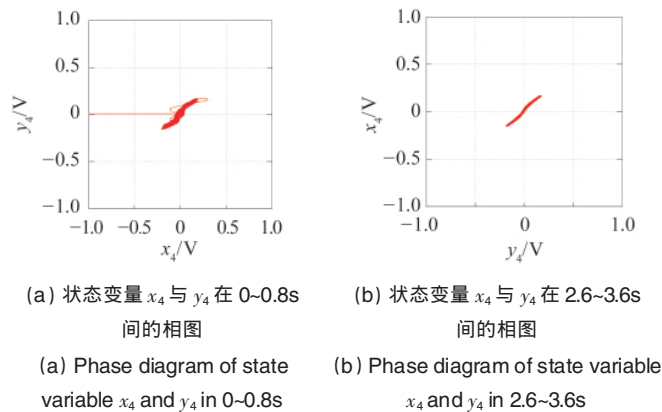


图 8  $x_4$  与  $y_4$  的相图变化曲线  
Fig. 8 Phase diagram curve between  $x_4$  and  $y_4$

综上所述,由模拟电路实现了广义 Lorenz 系统与超混沌 Lü 系统的同步,从而证实自适应反馈法可以实现异结构超混沌系统间的同步。

#### 4 结论

本文采用自适应反馈同步的方法构建了广义 Lorenz 系统与超混沌 Lü 系统的同步控制器。从数值仿真和电路实现两方面,实现了广义 Lorenz 系统与超混沌 Lü 系统的同步。结果表明,采用自适应反馈法可以实现异结构超混沌系统间的同步,而且对于具体的误差,系统可通过调整控制器的参数来实现同步,具有稳健、易于实现等优点。

#### 参考文献 (References)

- [1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic system [J]. *Physical Review Letters*, 1990, 64 (8): 821-824.
- [2] Pyragas K. Predictable chaos in slightly perturbed unpredictable chaos system [J]. *Physical Review A*, 1993, 181: 203-210.
- [3] 陈志盛, 孙克辉, 张泰山. Liu 混沌系统的非线性反馈同步控制[J]. *物理学报*, 2005, 54(6): 2580-2583.  
Chen Zhisheng, Sun Kehui, Zhang Taishan. *Acta Physica Sinica*, 2005, 54 (6): 2580-2583.
- [4] Kocarev L, Parlitz U. General Approach for Chaotic Synchronization with Applications to Communication [J]. *Physical Review Letters*, 1995, 74: 5028 - 5031.
- [5] 李智, 韩崇昭. 一类含参数不确定性混沌系统的自适应控制[J]. *物理学报*, 2001, 50(5): 847-850.  
Li Zhi, Han Chongzhao. *Acta Physica Sinica*, 2001, 50(5): 847-850.
- [6] 岳东, Yoneyama J. 含不确定性混沌系统的模糊自适应同步[J]. *物理学报*, 2003, 50(2): 292-297.  
Yue Dong, Yoneyama J. *Acta Physica Sinica*, 2003, 50(2): 292-297.
- [7] 陈菊芳, 张入元, 彭建华. 脉冲驱动离散混沌系统同步的实验与理论研究 [J]. *物理学报*, 2003, 52(7): 1589-1594.  
Chen Jufang, Zhang Ruyuan, Peng Jianhua. *Acta Physica Sinica*, 2003, 52 (7): 1589-1594.
- [8] 杨林保, 杨涛. 非自治混沌系统的脉冲同步[J]. *物理学报*, 2000, 49(1): 33-37.  
Yang Linbao, Yang Tao. *Acta Physica Sinica*, 2000, 49(1): 33-37.
- [9] 蔡国梁, 黄娟娟. 超混沌 Chen 系统和超混沌 Rossler 系统的异结构同步 [J]. *物理学报*, 2006, 55(8): 3997-4004.  
Cai Guoliang, Huang Juanjuan. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55(8): 3997-4004.
- [10] 李爽, 徐伟, 李瑞红, 等. 异结构系统混沌同步的新方法 [J]. *物理学报*, 2006, 55(11): 5681-5687.  
Li Shuang, Xu Wei, Li Ruihong, et al. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55(11): 5681-5687.
- [11] 叶慧, 吴会军, 姚洪兴. 用一种新方法实现超混沌系统的同步[J]. *江苏科技大学学报: 自然科学版*, 2008, 22(2): 81-85.  
Ye Hui, Wu Huijun, Yao Hongxing. *Journal of Jiangsu University of Science and Technology: National Science Edition*, 2008, 22(2): 81-85.
- [12] 刘扬正. 超混沌 Lü 系统的电路实现 [J]. *物理学报*, 2008, 57 (3): 1439-1443.  
Liu Yangzheng. *Acta Physica Sinica*, 2008, 57(3): 1439-1443.

(责任编辑 刘志远)