

按应变能处理应力约束的连续体结构拓扑优化

宣东海, 隋允康, 叶红玲, 铁 军

北京工业大学机械工程与应用电子技术学院, 北京 100124

摘要 对每个单元都引入应变比能系数, 通过追求对局部应力约束的高精度逼近, 使独立·连续·映射 (Independent Continuous and Mapping, ICM) 方法中全局化应变比能约束的表达更为可靠, 同时采取放松初始应变比能系数的手段加速优化迭代。利用结构最大 Mises 应力对许用应力比值的幂函数对全局化处理后的应变比能约束限进行修正, 或者控制结构的最大应力, 或者加速优化迭代。为了使拓扑构型向合理方向演变, 每次迭代都对拓扑变量履行从连续到离散的反演, 反演阈值自动计算。各算例均以较少的结构重分析次数, 优化得到了类似理论最优解 Michell 桁架的拓扑图形, 表明本文处理应力约束下结构拓扑优化问题的方法是合理和高效的。

关键词 应力约束全局化; 应变比能系数; ICM 方法; 连续体结构拓扑优化

中国分类号 TP31, O34

文献标识码 A

文章编号 1000-7857(2010)10-0048-08

Topology Optimization of Continuum Structure with Stress Constraint Handled by Strain Energy Density

XUAN Donghai, SUI Yunkang, YE Hongling, TIE Jun

College of Mechanical Engineering and Applied Electronics Technology, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China

Abstract The coefficients of strain energy density are incorporated in every finite element, which makes the expression of the globalized strain energy density constraint in the ICM method more reliable by enforcing the local stress constraint with high accuracy. Furthermore, the original coefficients of strain energy density are relaxed in order to accelerate the optimization iteration convergence. A power function formed as the ratio of the maximal structural von Mises stress and the allowable stress is applied to modify the constraint value of the globalized constraint to control the structural maximal stress or to accelerate the optimization iteration convergence. For the topology configuration to evolve in a reasonable direction, the continuous topological design variables are converted to discrete ones by using of a dynamic filter criterion computed automatically. Some examples show that the method proposed in this paper is reasonable and efficient. The optimal topology configurations are similar to the Michell truss, which is known as the theoretical optimal solution.

Keywords stress constraint globalization; the coefficient of strain energy density; ICM method; topology optimization of continuum structure

0 引言

连续体结构拓扑优化作为当前层次最高, 最热点的结构优化研究方向之一, 已有大量的成果发表。从拓扑优化模型

的角度看, 变厚度法^[1]、变密度法^[2]等建立的拓扑优化模型将拓扑变量挂靠在几何量或物理量上, 使结构拓扑优化降格为低层次的参数优化^[3]。双向渐进结构优化 (Evolutionary

收稿日期: 2010-04-07

基金项目: 国家自然科学基金项目 (10872012); 北京市自然科学基金项目 (3093019); 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室基金项目 (GZ0819)

作者简介: 宣东海, 博士研究生, 研究方向为结构优化, 电子信箱: donghaisuan@emails.bjut.edu.cn; 隋允康 (通信作者, 中国科协所属全国学会个人会员登记号: S030105001M), 教授, 研究方向为结构与多学科优化、智能控制, 电子信箱: yusui@bjut.edu.cn

Structural Optimization using Bi-directional, BESO) 方法^[4-5]不建立模型或者仅建立形式上的表模, 从而依靠太多人为的“准则”。文献[6]在总结结构拓扑优化多种方法优点的基础上提出独立·连续·映射 (Independent Continuous and Mapping, ICM) 方法, 将拓扑变量提高到独立层次, 利用不同的性态过滤函数, 识别结构的不同属性, 克服了不能用拓扑变量表示独立层次的结构拓扑优化性能的困难, 打开了模型显式化的大门。以重量为目标的拓扑优化模型提法, 克服了以柔顺度为目标的多数均匀化方法^[7]在多工况下导致多目标规划的困难, 统一了骨架类结构拓扑优化和连续体结构拓扑优化模型的提法^[8]。

用 ICM 方法处理应力约束下的结构拓扑优化, 有两种做法: ① 从 K-S 函数着手控制最大应力^[9]; ② 采取应力约束全局化策略建模^[10]。本文在应力全局化思想的基础上, 在构造每个单元的应变比能系数之后, 进行全局性的约束求和, 借助局部应力约束的高精度逼近, 使全局化后的整体应变比能约束更加准确; 同时采取对初始应变比能系数的放松和整体应变比能约束限的动态修正两种技术来加快优化收敛和控制最大应力。ICM 方法将离散的 0-1 拓扑变量映射在 [0, 1] 的连续域上进行优化求解, 得到的解也是 [0, 1] 上的连续值。为了最终得到离散的拓扑变量, 需对连续变量进行反演。具体存在两种反演方式: ① 在迭代过程中始终利用连续变量进行分析和优化, 迭代收敛后通过一定的阈值完成反演^[9-10]; ② 在每次优化求解得到连续解之后都进行反演^[8]。本文采取第二种策略, 即每步优化求解后均进行反演, 将主动变量相对于主动集内的最大值进行归一化, 取归一化后的拓扑变量的平均值再乘以一个系数, 作为反演阈值; 给出的几个算例均得到了类似 Michell 桁架的拓扑构型, 迭代次数少, 表明本文在应力约束全局化基础上引入应变比能系数的方法及其其他的修正手段和反演策略, 对处理应力约束下结构拓扑优化问题是合理高效的。

1 应变比能系数动态调整的应力约束全局化策略及其修正

1.1 应变比能系数的引入

第四强度理论即 Mises 准则由畸变比能表达为

$$e^f \leq \bar{e}^f \quad (1)$$

其中, $e^f = (1+\mu)((\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2)/(6E)$ 为工作状态的畸变比能; $\bar{e}^f = (1+\mu)\bar{\sigma}^2/(3E)$ 为工作状态的许用畸变比能。 μ 为材料的泊松比, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 为工作状态的 3 个主应力值, E 为材料的杨氏模量, $\bar{\sigma}$ 为材料的许用应力。

单元应变比能可以直接从结构分析结果中提取

$$e = e^E/V \quad (2)$$

其中, e^E 为单元应变能, V 为单元体积。考虑到畸变比能小于应变比能, 有

$$e^f \leq \xi e \quad (3)$$

其中, 应变比能系数 $0 \leq \xi \leq 1$ 。将式(3)代入式(1), 得

$$\xi e \leq \bar{e}^f \quad (4)$$

1.2 应力约束的全局化

设第 j 号工况下, 第 i 个单元的应变比能为 e_{ij} , 则式(4)变为

$$\xi_{ij} e_{ij} \leq \bar{e}_i^f \quad (5)$$

即

$$e_{ij} \leq \zeta_{ij} \bar{e}_i^f \quad (6)$$

其中, $\zeta_{ij} = 1/\xi_{ij} \geq 1$ 。

式(5)为 j 工况下第 i 个单元的局部应力约束。对存在 m 个工况、 n 个单元的结构, 每个工况下都有 n 个类似式(5)的不等式约束, 多个不等式约束对优化模型的最后求解造成极大困难。因此, 利用应力全局化的思想, 对 j 工况下的 n 个约束不等式求和, 得

$$\sum_{i=1}^n e_{ij} \leq \sum_{i=1}^n \zeta_{ij} \bar{e}_i^f \quad (7)$$

全局约束式(7)是局部约束式(5)成立的必要条件, 不是充分条件, 采用如下系数调整的方法予以弥补。

1.3 动态应变比能系数求解的松弛法

文献[10]直接用应变能代替畸变能, 并对所有单元进行不等式求和, 最后用结构初始应变能和许用应变能的比值的指数函数对求和后的约束限进行修正。本文针对单元不等式提出了应变比能系数的概念, 希望对单元应变比能约束进行修正。

迭代过程中, 若局部应变约束 $\xi_{ij}^{(v)} e_{ij}^{(v)} < \bar{e}_i^f$, 表明该单元尚有潜力可控; 若 $\xi_{ij}^{(v)} e_{ij}^{(v+1)} < \bar{e}_i^f$, 则表明有很大潜力可控, 可以期望下一次迭代时 $\xi_{ij}^{(v+1)} e_{ij}^{(v+1)}$ 变大, 但不超过 $\bar{e}_i^f$, 最大满足

$$\xi_{ij}^{(v+1)} e_{ij}^{(v+1)} = \bar{e}_i^f \quad (8)$$

$e_{ij}^{(v+1)}$ 未知, 可以用 $e_{ij}^{(v)}$ 代替, 式(8)变为

$$\xi_{ij}^{(v)} e_{ij}^{(v)} = \bar{e}_i^f \quad (9)$$

将迭代中的不等式变成等式来修正 ξ_{ij} 值, 即

$$\xi_{ij}^{(v)} = \bar{e}_i^f / e_{ij}^{(v)} \quad \text{或} \quad \zeta_{ij}^{(v)} = e_{ij}^{(v)} / \bar{e}_i^f \quad (10)$$

把第 v 次算出的 $\zeta_{ij}^{(v)}$ 作为第 $v+1$ 次建立的全局应力, 即式(7)中的 ζ_{ij} , 满足 $\zeta_{ij} \geq 1$ 。为了第一次优化求解时可将拓扑构型较大幅度地勾勒出来, 取 $\zeta_{ij}^{(0)} = 100$, 则初次优化时约束限的放松使得更多的拓扑变量可以取到下限, 亦即大幅度地从基结构中删除单元, 之后按式(10)计算 $\zeta_{ij}^{(v)}$ 进行迭代。并且, 实际使用的式(7)还进行了控制最大应力的动态修正, 这两种措施的使用, 保证了优化迭代的顺利进行。

1.4 全局化应力约束的修正

为了避免每次优化结果中个别的单元应力超限, 在式(7)的右端加一个修正项 $(\bar{\sigma}/\sigma_{j \max})^\eta$, 即

$$\sum_{i=1}^n e_{ij} \leq (\bar{\sigma}/\sigma_{j \max})^\eta \sum_{i=1}^n \zeta_{ij}^{(v)} \bar{e}_i^f \quad (11)$$

其中, $\sigma_{j \max}$ 为 j 工况下所有单元 von Mises 应力的最大值, η

是根据数值实验得到的参数值,当 $\eta=3$ 左右,结构所有单元的极大 von Mises 应力基本不会超过许用应力 $\bar{\sigma}$ 。

修正项可以根据结构最大应力动态地对全局约束进行修正,在结构最大应力小于许用应力时放松全局约束以释放结构的承载能力,删除更多的单元,在最大应力大于许用应力时又会收紧全局约束,保留更多的单元。

2 结构应变比能约束下的 ICM 模型及其求解和拓扑变量反演

2.1 修正结构全局应变比能约束下的拓扑优化 ICM 模型以重量为目标、应力为约束的结构拓扑优化模型为

$$\begin{cases} \text{求 } \mathbf{t} \in E^n \\ \text{使 } W = \sum_{i=1}^n w_i \rightarrow \min \\ \text{s.t. } \sigma_{ij} \leq \bar{\sigma} \\ t_i = 0 \text{ 或 } 1 (i=1, \dots, n; j=1, \dots, m) \end{cases} \quad (12)$$

其中, $\mathbf{t}=\{t_1, \dots, t_n\}$ 为拓扑向量, n 为结构离散成有限模型后的单元总数, W 为结构总重量, w_i 为第 i 个单元的重量, σ_{ij} 为 j 工况下第 i 个单元的 von Mises 应力, m 为工况总数。

记第 v 次结构分析后 j 工况下的最大 von Mises 应力为 $\sigma_{j \max}^{(v)}$, 用全局化应力约束策略及其修正处理过的式 (11) 代替式 (12) 中的应力约束, 则第 v 次结构分析后的优化模型为

$$\begin{cases} \text{求 } \mathbf{t} \in E^n \\ \text{使 } W = \sum_{i=1}^n w_i \rightarrow \min \\ \text{s.t. } \sum_{i=1}^n e_{ij}^{(v)} \leq (\bar{\sigma}/\sigma_{j \max}^{(v)})^\eta \sum_{i=1}^n \zeta_{ij}^{(v)} \bar{e}_i^f \\ t_i = 0 \text{ 或 } 1 (i=1, \dots, n; j=1, \dots, m) \end{cases} \quad (13)$$

其中, $e_{ij}^{(v)} = (e_{ij}^{(v)})^\eta / V_i^{(v)}$ 。

采用 ICM 方法对式 (13) 进行连续化处理, 引入重量、体积和刚度的指数类快滤函数

$$\begin{cases} w_i = f_w(t_i) w_i^0 = w_i^0 (e^{t_i/\gamma_w} - 1) / (e^{1/\gamma_w} - 1) \\ V_i = f_v(t_i) V_i^0 = V_i^0 (e^{t_i/\gamma_v} - 1) / (e^{1/\gamma_v} - 1) \\ k_i = f_k(t_i) k_i^0 = k_i^0 (e^{t_i/\gamma_k} - 1) / (e^{1/\gamma_k} - 1) \end{cases} \quad (14)$$

其中, $\gamma_w=0.1863$, $\gamma_v=0.1863$, $\gamma_k=0.0621$, 详见文献 [11]。将式 (13) 连续化为

$$\begin{cases} \text{求 } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n \\ \text{使 } W(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n f_w(t_i) w_i^0 \rightarrow \min \\ \text{s.t. } \sum_{i=1}^n (e_{ij}^{(v)})^\eta f_k(t_i) / (V_i^0 f_v(t_i)) f_k(t_i) \leq (\bar{\sigma}/\sigma_{j \max}^{(v)})^\eta \sum_{i=1}^n \zeta_{ij}^{(v)} \bar{e}_i^f \\ \underline{t} \leq t_i \leq 1 (i=1, \dots, n; j=1, \dots, m) \end{cases} \quad (15)$$

将拓扑变量划分为主动变量集 $I_a = \{i | \underline{t} < t_i^* < 1 (i=1, \dots, n_a)\}$ 、

上被动变量集 $I_{ia} = \{i | t_i^* = 1 (i=1, \dots, \bar{n}_{ia})\}$ 和下被动变量集 $I_{ia} = \{i | t_i^* =$

$\underline{t} (i=1, \dots, \bar{n}_{ia})\}$ 。在优化求解的迭代中, 被动变量集中的拓扑变量不进行重新设计, 可在目标中忽略。实际上, 下被动变量集中的单元对结构的承载贡献较小, 可在约束中删去。修正后的约束系数 c_{ji} 、结构许用应变比能公式 $\bar{E}_j$ 为

$$c_{ji} = (e_{ij}^{(v)})^\eta f_k(t_i) / (V_i^0 f_v(t_i)) \quad (16)$$

$$\bar{E}_j = (\bar{\sigma}/\sigma_{j \max}^{(v)})^\eta \left(\sum_{i \in I_a} \zeta_{ij}^{(v)} \bar{e}_i^f + \sum_{i \in I_{ia}} \zeta_{ij}^{(v)} \bar{e}_i^f \right) \quad (17)$$

应力约束转化为结构应变比能约束后结构拓扑优化的 ICM 模型为

$$\begin{cases} \text{求 } \mathbf{t} \in \mathbf{R}^n \\ \text{使 } W(\mathbf{t}) = \sum_{i \in I_a} w_i^0 f_w(t_i) \rightarrow \min \\ \text{s.t. } \sum_{i \in I_a} c_{ji} f_k(t_i) + \sum_{i \in I_{ia}} c_{ji} f_k(t_i) \leq \bar{E}_j \\ \underline{t} \leq t_i \leq 1 (j=1, \dots, m) \end{cases} \quad (18)$$

2.2 精确对偶映射下的序列二次求解

下面采用精确对偶映射下的序列二次规划求解式 (18), 其对偶规划为

$$\begin{cases} \text{求 } \boldsymbol{\lambda} \in E^m \\ \text{使 } \Phi(\boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \max \\ \text{s.t. } \lambda_j \geq 0 (j=1, \dots, m) \end{cases} \quad (19)$$

其中, $\Phi(\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\underline{t} \leq t_i \leq 1} (L(\mathbf{t}, \boldsymbol{\lambda}))$,

$$L(\mathbf{t}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i \in I_a} w_i^0 f_w(t_i) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\sum_{i \in I_a} c_{ji} f_k(t_i) + \sum_{i \in I_{ia}} c_{ji} f_k(t_i) - \bar{E}_j \right)。$$

由 K-T 条件, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\mathbf{t}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial t_i} = w_i^0 \frac{\partial f_w(t_i)}{\partial t_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j c_{ji} \left(-\frac{1}{f_k^2(t_i)} \frac{\partial f_k(t_i)}{\partial t_i} \right) \\ \leq 0 (t_i^* = 1) \\ = 0 (\underline{t} < t_i^* < 1) \\ \geq 0 (t_i^* = \underline{t}) \end{cases} \quad (20)$$

由式 (20) 得 $t^* = t^*(\boldsymbol{\lambda})$, 将其代入式 (20), 化简得

$$e^{t_i^*(\boldsymbol{\lambda})/\gamma_w} (e^{t_i^*(\boldsymbol{\lambda})/\gamma_k} - 1)^2 \equiv g e^{t_i^*(\boldsymbol{\lambda})/\gamma_k} \quad (21)$$

其中, $g = \gamma_w e^{1/\gamma_w} e^{-1/\gamma_k} (1 - e^{-1/\gamma_w}) (1 - e^{-1/\gamma_k}) \sum_{j=1}^m c_{ji} \lambda_j / (w_i^0 \gamma_k)$ 。

用二分法求解式 (21), 得

$$t_i^* = d_i \quad (22)$$

根据

$$t_i^* = \begin{cases} \underline{t} & d_i \leq \underline{t} & i \in I_{ia} \\ d_i & \underline{t} < d_i < 1 & i \in I_a \\ 1 & d_i \geq 1 & i \in I_{ia} \end{cases} \quad (23)$$

重新划分主动变量集与被动变量集。

用二阶泰勒展开式近似表达式 (19) 中的目标函数。根据对偶理论 [6] 计算目标函数对设计变量的一、二阶敏度, 得

$$\frac{\partial \Phi(\lambda)}{\partial \lambda_j} = \sum_{i \in I_a} c_{ji} f_k(t_i^*) + \sum_{i \in I_{ia}} c_{ji} f_k(t_i^*) - \bar{E}_j \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(\lambda)}{\partial \lambda_j \partial \lambda_l} = - \sum_{i \in I_a} c_{ji} \frac{1}{f_k^2(t_i^*)} \frac{\partial f_k(t_i^*)}{\partial t_i^*} \frac{\partial t_i^*}{\partial \lambda_l} \quad (25)$$

在式(21)两边对 λ_l 求导,得

$$\frac{\partial t_i^*}{\partial \lambda_l}(\lambda) / \partial \lambda_l = a/b \quad (26)$$

其中,

$$a = c_{ji} e^{\frac{(t_i^*(\lambda)+1)/\gamma_{li}}{\gamma_{li}}} (1 - e^{-1/\gamma_{li}}) / (\gamma_{li} (e^{\frac{t_i^*(\lambda)/\gamma_{li}}{\gamma_{li}}} - 1)^2) \quad (27)$$

$$b = \frac{w_i^0 e^{\frac{(t_i^*(\lambda)-1)/\gamma_{li}}{\gamma_{li}}}}{\gamma_{li}^2 (1 - e^{-1/\gamma_{li}})} - \frac{w_i^0 e^{\frac{(t_i^*(\lambda)-1)/\gamma_{li}}{\gamma_{li}}}}{\gamma_{li} \gamma_{li} (1 - e^{-1/\gamma_{li}})} + \frac{2w_i^0 e^{\frac{(t_i^*(\lambda)-1)/\gamma_{li}}{\gamma_{li}}}}{\gamma_{li} \gamma_{li} (e^{\frac{t_i^*(\lambda)/\gamma_{li}}{\gamma_{li}}} - 1) (1 - e^{-1/\gamma_{li}})} \quad (28)$$

则式(25)化为

$$\frac{\partial^2 \Phi(\lambda)}{\partial \lambda_j \partial \lambda_l} = - \sum_{i \in I_a} c_{ji} c_{li} e^{\frac{2(t_i^*(\lambda)+1)/\gamma_{li}}{\gamma_{li}}} (1 - e^{-1/\gamma_{li}})^2 \frac{1}{\gamma_{li}^2 (e^{\frac{t_i^*(\lambda)/\gamma_{li}}{\gamma_{li}}} - 1)^4} \frac{1}{b} \quad (29)$$

利用二阶泰勒展开式近似表达 $\Phi(\lambda)$ 得

$$\Phi(\lambda) \approx \frac{1}{2} \lambda^T \nabla^2 \Phi(\lambda^0) \lambda + [(\nabla \Phi(\lambda^0))^T - \lambda_0^T \nabla^2 \Phi(\lambda^0)] \lambda + \text{const.} \quad (30)$$

省略式(30)的常数项,两边同乘以-1,得

$$-\Phi(\lambda) = \frac{1}{2} \lambda^T D \lambda + F^T \lambda \quad (31)$$

其中, $D = -\nabla^2 \Phi(\lambda^0)$, $F^T = \lambda_0^T \nabla^2 \Phi(\lambda^0) - \nabla^T \Phi(\lambda^0)$.

利用式(20)消去 F 中显含的 λ 后,得

$$D_{jl} = \sum_{i \in I_a} \frac{c_{ji} c_{li} e^{\frac{2(t_i^*(\lambda)+1)/\gamma_{li}}{\gamma_{li}}} (1 - e^{-1/\gamma_{li}})^2}{\gamma_{li}^2 (e^{\frac{t_i^*(\lambda)/\gamma_{li}}{\gamma_{li}}} - 1)^4} \frac{1}{b} \quad (32)$$

$$F_j = - \sum_{i \in I_a} \frac{w_i^0 c_{ji} e^{\frac{(t_i^*(\lambda)-1)/\gamma_{li}}{\gamma_{li}}} e^{\frac{(t_i^*(\lambda)+1)/\gamma_{li}}{\gamma_{li}}} (1 - e^{-1/\gamma_{li}})}{\gamma_{li} \gamma_{li} (1 - e^{-1/\gamma_{li}}) (e^{\frac{t_i^*(\lambda)/\gamma_{li}}{\gamma_{li}}} - 1)^2} \frac{1}{b} - \frac{(1 - e^{-1/\gamma_{li}})}{e^{-1/\gamma_{li}} (e^{\frac{t_i^*(\lambda)/\gamma_{li}}{\gamma_{li}}} - 1)} \sum_{i=1}^n c_{ji} + \bar{E}_j \quad (33)$$

从而将式(19)化为下式进行求解

$$\begin{cases} \text{求 } \lambda \in E^m \\ \text{使 } -\Phi(\lambda) = \frac{1}{2} \lambda^T D \lambda + F^T \lambda \rightarrow \min \\ \text{s.t. } \lambda_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, m) \end{cases} \quad (34)$$

2.3 拓扑变量的反演策略

由连续化优化模型式(15)解得拓扑变量的式(21)中,除

已经取得拓扑设计变量上下限的变被动变量外,主动变量集中的拓扑变量仍是 $[0, 1]$ 连续区间的连续值,要得到离散的拓扑解,须通过过滤阈值来进行反演。过滤阈值的取法如下: I_a 中拓扑变量的最大值为 $t_{\max}^a$, 相对于 $t_{\max}^a$ 归一化后的主动变量

$t_i^+ = t_i / t_{\max}^a$ ($i \in I_a$), t_i^+ 的平均值 $t_a = \sum_{i \in I_a} t_i^+ / n_a$; 用户输入的折减系数

$\delta_0 > 0$, 则过滤阈值 t_{filter} 用如下方法选取: ① 若 $n_a > 0$, 转②, 否则

$$t_a = 0.5, \text{ 转②}; \text{② } \delta = \begin{cases} 1/t_a & (\delta_0 \geq 1/t_a) \\ \delta_0 & (t/t_a < \delta_0 < 1/t_a), \text{ 转③} \\ t/t_a & (\delta_0 \leq t/t_a) \end{cases} \text{ 根据计} \quad (35)$$

算经验, δ_0 取 0.80~0.95 时, 拓扑结果较好。本文算例取 $\delta_0 = 0.9$ 。

2.4 程序流程和收敛准则

置所有的拓扑变量 t_i 为主动变量, 给定初值 $t^{(0)} = 1$ 进行初次结构分析; 然后令 $\zeta_{ij}^{(0)} = 100$, 在式(17)中得结构应变比能约束限 $\bar{E}_j$, 将 $t^{(0)} = 1$ 和 $\bar{E}_j$ 代入式(32)、式(33)形成二次规划式(34), 求解此二次规划得对偶变量 λ , 将 λ 代入式(21), 利用二分法解求新的拓扑变量 $t^{(1)}$, 利用式(23)重新划分主动变量集和被动变量集后, 重新代入式(32)、式(33)形成新的二次规划, 如此循环, 直至 I_a 和 I_{ia} 均不变时, 终止本轮优化求解, 输出连续的拓扑变量 t_i^* 。

根据 2.3 节的反演准则对 t_i^* 进行反演, 得到离散的拓扑变量, 然后修改有限元模型进行下一次的结构分析, 再形成新的二次规划式(34), 进入新一轮优化求解。结构分析、优化交替进行, 直至目标的相对误差 $\Delta W < 0.001$, 且主动变量集和被动变量集不变时终止循环。

3 算例

3.1 算例 1

基结构为 $0.16\text{m} \times 0.1\text{m} \times 0.006\text{m}$ 的平面体(图 1), 划分为 48×30 个单元格。材料弹性模量为 10GPa , 泊松比为 0.3 , 密度为 1.0t/m^3 。结构左边界固定, 右边界中点 P 施加集中载荷 9000N , 收敛精度取 0.001 , 许用应力为 200MPa 。

经过 22 次结构重分析和优化求解后收敛, 得到如图 2 所示的类似 Michell 桁架形式的最优拓扑图形。优化后结构的最终质量为 47.746g , 最大 von Mises 应力为 169.116MPa , 未超过许用应力。图 3 是文献[10]得到的最优拓扑图形。

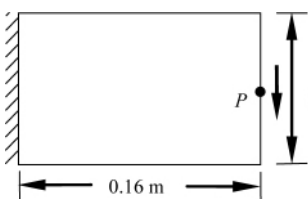


图 1 基结构

Fig. 1 Base structure

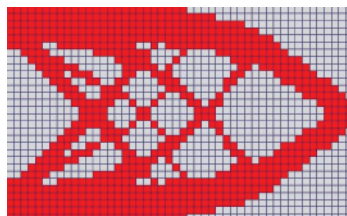


图 2 本文的最优拓扑图形

Fig. 2 Optimal topology configuration in this paper



图 3 文献[10]的最优拓扑图形

Fig. 3 Optimal topology configuration in reference [10]

图 4 为拓扑反演阈值随迭代次数的变化曲线,图 5 是最大 von Mises 应力的迭代历史,图 6 是目标的迭代历史(为方便起见,已转化为相应的质量,下同)。

由优化结果对比(表 1)可得,本文的最优拓扑结构质量

大了 23.9%,最大应力减小了 25.2%;文献[10]中经过 51 次迭代达到收敛,本文方法仅用 22 次结构分析、优化迭代达到收敛,优化效率提高了 56.9%。

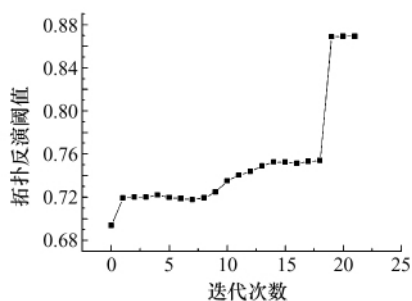


图 4 拓扑反演國值历史

Fig. 4 Iterative history of topological filter value

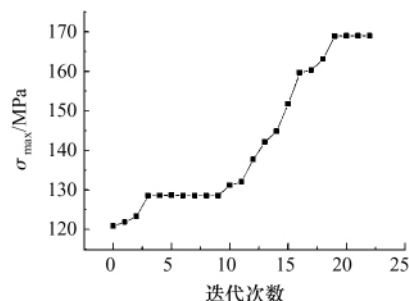


图 5 最大 von Mises 应力迭代历史

Fig. 5 Iterative history of max
von Mises stress

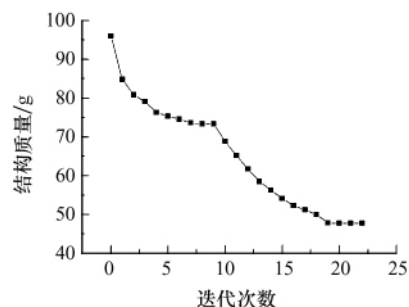


图 6 目标迭代历史

Fig. 6 Iterative history of objective

表 1 参数对照表

Table 1 Parameter comparison

参数	迭代次数	结构质量/ 10^{-3}kg		最大 von Mises 应力/MPa		许用应力/MPa	单元保留及超限情况		
		初始	最优	初始	最优		保留	超限	超限比
文献[10]	51	96.000	38.533	120.988	226	155	586	8	1.36%
本文	22	96.000	47.746	120.988	169.116	200	716	0	0

3.2 算例 2

基结构为 $0.52\text{m} \times 0.26\text{m} \times 0.006\text{m}$ 的平面体,划分为 20×48 个单元格,图 7 为结构的几何模型。材料的弹性模量为 68.89GPa ,泊松比为 0.3 ,密度为 1.0t/m^3 。结构左下角固定铰支,右下角滑动铰支,下界中点施加集中载荷 6000N ,收敛精度取 0.001 ,许用应力为 300MPa 。

经过 29 次结构重分析和优化求解后收敛, 得到如图 8 所示的最优拓扑图形, 与图 9 所示文献[12]采用解析离散化求解得到的 Michell 桁架类似。优化后结构的最终质量为 342.121g, 最大 von Mises 应力为 244.387MPa, 没有超过许用应力。

图 10 为拓扑反演阈值随迭代次数的变化曲线, 图 11 为最大 von Mises 应力的迭代历史, 图 12 为目标的迭代历史。

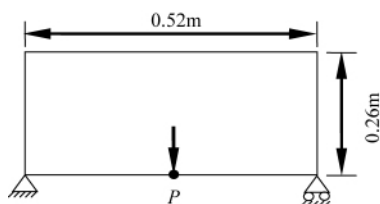


图 7 基结构

Fig.7 Base structure

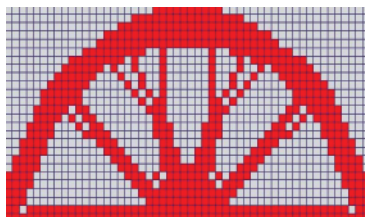


图 8 本文最优拓扑图形

Fig. 8 Optimal topology configuration in this paper

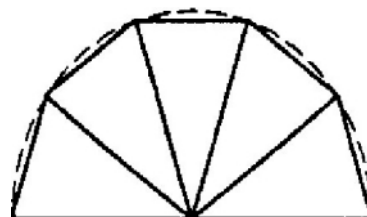


图 9 文献[12]的最优拓扑图形

Fig. 9 Optimal topology configuration in reference [12]

3.3 算例 3

基结构为 $0.12\text{m} \times 0.06\text{m} \times 0.006\text{m}$ 的平面体 (图 13), 划分为 60×30 个单元格。材料弹性模量为 210GPa , 泊松比为 0.25 , 密度为 1.0t/m^3 。结构左边界固定, 左上角和右下角分别施加向下的力 P_1 和向上的力 P_2 。收敛精度取 0.001 , 许用应力为 400MPa 。分 4 种情况分别考察结构在单工况、多工况下的最

优拓扑图形。

- 1) 单工况,仅作用 $P_1=2000\text{N}$;
- 2) 单工况,仅作用 $P_2=2000\text{N}$;
- 3) 多工况,情况 1 和情况 2 作为两个独立的工况, $P_1=P_2=2000\text{N}$;
- 4) 多工况,情况 1 和情况 2 作为两个独立的工况, $P_1=$

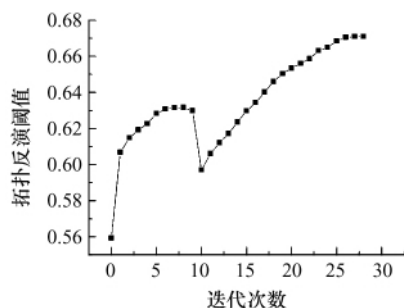


图 10 拓扑反演阈值历史

Fig. 10 Iterative history of topological filter value

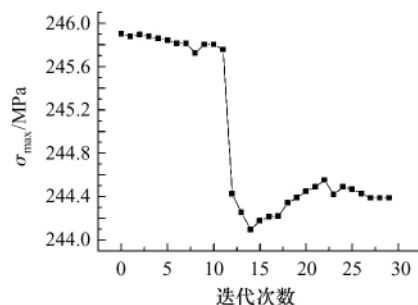


图 11 最大 von Mises 应力迭代历史

Fig. 11 Iterative history of max von Mises stress

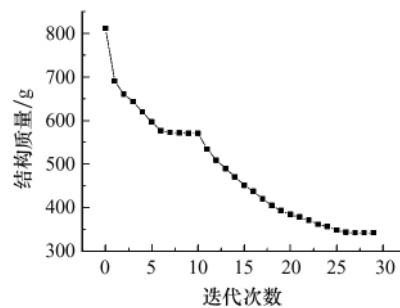


图 12 目标迭代历史

Fig. 12 Iterative history of objective

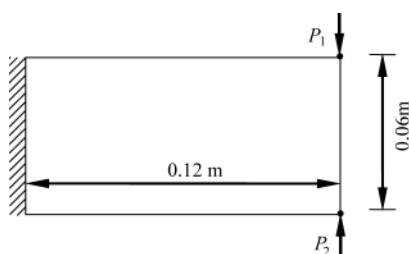


图 13 基结构

Fig. 13 Base structure

2000N, $P_2=1000\text{N}$ 。

4 种不同情况下的最优拓扑图形分别如图 14~图 17 所示。图 14、图 15 对比可得,拥有对称载荷的 2 种单工况得到的最优拓扑图形也是对称的。图 16 表明,由情况 1 和情况 2 作为两个独立工况构成的多工况的情况 3 得到的最优拓扑图形,并不是情况 1 和情况 2 两个单工况得到的最优拓扑图形的简单叠加。图 17 表明,存在不对称载荷的多工况情况 4,得到了合理的非对称拓扑图形。以上表明,本文提供的方法对复杂多工况问题的适应性比较强。

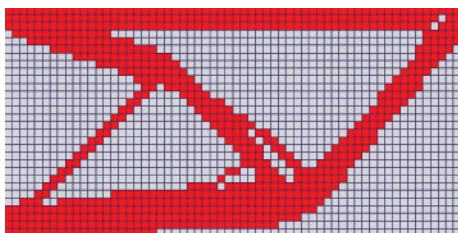


图 14 情况 1 的最优拓扑图形

Fig. 14 Optimal topology configuration for Case 1

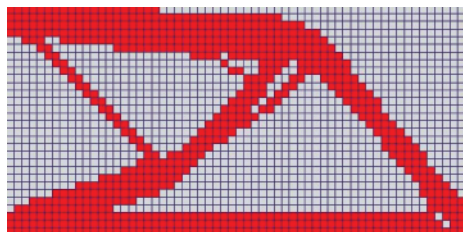


图 15 情况 2 的最优拓扑图形

Fig. 15 Optimal topology configuration for Case 2

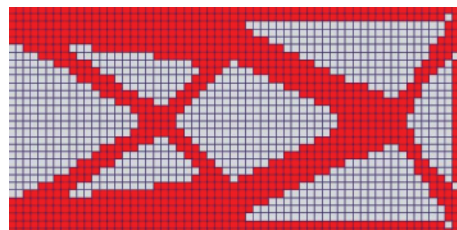


图 16 情况 3 的最优拓扑图形

Fig. 16 Optimal topology configuration for Case 3

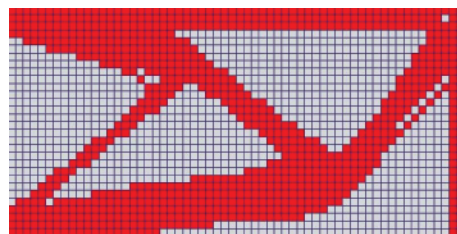


图 17 情况 4 的最优拓扑图形

Fig. 17 Optimal topology configuration for Case 4

情况 1、情况 3、情况 4 对应的目标迭代历史如图 18 所示,图 19~图 21 分别是这 3 种情况下的最大 von Mises 应力迭代历史,情况 2 的各迭代历史同情况 1 类似,略去。

表 2 为本例与文献[10]在各种情况下的结果比较。情况 2 同情况 1 类似,未列出。对于多工况的情况 3,两种工况各自

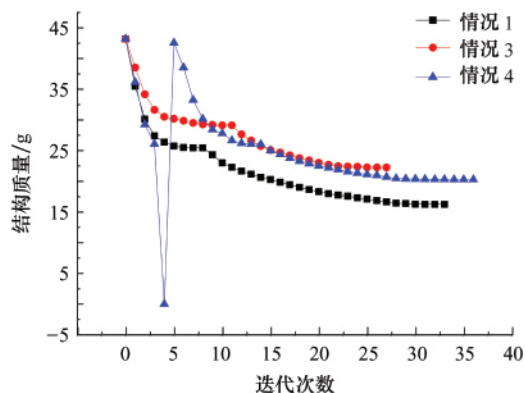


图 18 目标迭代历史

Fig. 18 Iterative history of objectives

参考文献 (References)

- [1] 程耿东, 张东旭. 受应力约束的平面弹性体的拓扑优化[J]. 大连理工大学学报, 1995, 35(1): 1-9.
Cheng Gengdong, Zhang Dongxu. *Journal of Dalian University of Technology*, 1995, 35(1): 1-9.
- [2] 王健, 程耿东. 应力约束下薄板结构的拓扑优化[J]. 固体力学学报, 1997, 14(4): 317-322.
Wang Jian, Cheng Gengdong. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1997, 14(4): 317-322.
- [3] 隋允康, 李善坡. 结构优化中的建模方法概述[J]. 力学进展, 2008, 38(2): 190-200.
Sui Yunkang, Li Shanpo. *Advances in mechanics*, 2008, 38(2): 190-200.
- [4] Guan H, Steven Grant P, Xie Y M. Evolutionary structural optimization incorporating tension and compression materials [J]. *Advances in Structural Engineering*, 1999, 2(4): 273-288.
- [5] 荣见华, 姜节胜, 胡德文, 等. 基于应力及其灵敏度的结构拓扑渐进优化算法[J]. 力学学报, 2003, 35(5): 584-591.
Rong Jianhua, Jiang Jiesheng, Hu Dewen, et al. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 35(5): 584-591.
- [6] 隋允康. 建模·变换·优化——结构综合方法新进展[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1996.
Sui Yunkang Modeling, Transformation and Optimization: New Developments of Structural Synthesis Method [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1996.

- [7] Bendsøe M P, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, 71(1): 197-224.
- [8] 隋允康, 杨德庆, 孙焕纯. 统一骨架与连续体的结构拓扑优化的 ICM 理论与方法[J]. 计算力学学报, 2000, 17(1): 28-33.
Sui Yun kang, Yang Deqing, Sun Huanchun. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2000, 17(1): 28-33.
- [9] 隋允康, 张学胜, 龙连春. 应力约束处理为应变能集成的连续体结构拓扑优化[J]. 计算力学学报, 2007, 10, 24(5): 602-608.
Sui Yunkang, Zhang Xuesheng, Long Lianchun. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2007, 10, 24(5): 602-608.
- [10] 隋允康, 叶红玲, 彭细荣. 应力约束全局化策略下的连续体结构拓扑优化[J]. 力学学报, 2006, 38(3): 364-370.
Sui Yunkang, Ye Hongling, Peng Xirong. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2006, 38(3): 364-370.
- [11] 隋允康, 刘建信, 叶红玲, 等. 修正 Sigmoid 函数在结构拓扑优化中的应用[J]. 北京工业大学学报, 2008, 34(增刊): 1-5.
Sui Yunkang, Liu Jianxin, Ye Hongling, et al. *Journal of Beijing University of Technology*, 2008, 34(suppl): 1-5.
- [12] 周克民, 李俊峰. Michell 桁架在离散过程中的一些性质 [J]. 工程力学, 2003, 20(增刊): 322-325.
Zhou Kemin, Li Junfeng. *Engineering mechanics*, 2003, 20(suppl): 322-325.

(责任编辑 刘志远)

·学术动态·



“中国生理心理学 第十届学术大会”征文

由中国心理学会主办的“第十届全国生理心理学学术大会”将于 2010 年 10 月 11-14 日在金华举行。研讨会主题是“心理、行为与健康”。

会议征文范围: 生物心理学; 行为脑科学; 脑、行为与身心疾病; 行为药理学; 心理神经免疫学; 行为神经科学; 药物滥用; 心理健康的其他领域。截稿日期: 2010 年 8 月 27 日。在读研究生或青年科技工作者 (2010 年 1 月 1 日未满 35 周岁) 可申请参选优秀青年论文。设优秀论文一等奖 1 名, 奖金 1000 元; 二等奖 2 名, 奖金 500 元; 三等奖 3 名, 奖金 200 元。

会议网站: <http://www.cpsbeijing.org/>。

通信地址: 北京市朝阳区大屯路甲 4 号中国科学院心理研究所 (100101), 杨晓燕。电话: 010-64850858; 电子信箱: yangxy@psych.ac.cn。

·学术动态·



“2011 年中国控制 会议 CCC2011”征文

由中国自动化学会主办的“2011 年中国控制会议 CCC2011”将于 2011 年 7 月 22 日在烟台市举行。

会议征文内容包括: 系统理论与控制理论; 控制设计方法; 非线性系统及其控制; 智能机器人; 复杂性复杂系统; 故障诊断与可靠控制; 分布参数系统; 通信网络系统; 稳定性与镇定; 计算机控制系统; 随机系统; 网络化控制系统; 系统建模与辨识; 多智能体系统与分布式控制; 传感器网络; 最优控制; 新能源中的控制技术; 优化与调度; 节能与环保中控制技术; 鲁棒控制; 数据驱动与建模控制; 自适应控制与学习控制; 量子控制与信息; 变结构控制; 遗传算法与演化计算; 神经网络; CIMS 与制造系统; 模糊系统与模糊控制; 交通系统; 模式识别与信号处理; 系统生物学; 预测控制; 控制在社会经济系统中的应用; 运动控制; 工业系统。

中国控制会议收录的论文全部被 ISTP/EI 收录, 全文截稿日期为 2011 年 1 月 15 日。

会议网站: <http://ccc11.ytu.edu.cn/>。

电话: 0535-6902543; 电子信箱: wpj@ytu.edu.cn。