

欧氏空间点态凸性模的表示

姚君¹,倪岚¹,李丽²

1. 黑龙江科技学院数力系, 哈尔滨 150027

2. 山东交通学院数理系, 济南 250023

摘要 讨论了点态凸性模在二维和三维欧氏空间的表示,并给出其在曲面为椭圆和椭球面的特殊点处的计算。通过计算可以看出其点态凸性模的值在长轴最小,沿曲面从长轴到短轴点态凸性模的值是递增的,达到短轴时最大,从而进一步说明椭圆的对称性,同时也说明点态凸性模的值越小,该点的凸性程度越强。

关键词 点态凸性模;欧氏空间;曲面

中图分类号 O177

文献标识码 A

文章编号 1000-7857(2010)08-0081-03

Representations of Pointwise Convex Modulus in Euclidean Spaces

YAO Jun¹, NI Lan¹, LI Li²

1. Department of Mathematics and Mechanics, Heilongjiang Institute of Science and Technology, Harbin 150027, China

2. Department of Mathematics and Physics, Shandong Jiaotong University, Jinan 250023, China

Abstract With a support function as a tool, the estimations and representations of pointwise convex modulus in two-dimensional and three-dimensional Euclidean spaces are discussed, and the calculations of the pointwise convex modulus in the surface of ellipse and ellipsoid surface are carried out. It is shown that the smaller this spot, the stronger its convexity degree. The convex modulus describes an overall degree of convexity of the unit sphere in the space, which is very different from the degree of convexity at each point and which may have very great influence on the whole feature of the space. Therefore, the study of pointwise properties is very important. The pointwise constant geometry of the space can enhance the understanding of the nature of the space.

Keywords pointwise convex modulus; euclidean spaces; surface

0 引言

1936年,J. Clarkson 在研究一致凸时引入了凸性模的定义。但凸性模只是刻画了空间单位球面的总体凸性程度,而每一点的凸性程度都有很大的不同,这将会对空间的整体性质产生很大影响^[1-4]。1999年,计东海等^[5]引入了点态几何常数,之后,许多同行相继给出一些很好的结果^[6-7],如:空间单位球面上每一点是端点就意味着空间是严格凸的,单位球面上每一点是强端点等价于空间 X 是中点局部一致凸的。

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范空间,其维数 $\dim(X) \geq 2$; $B(X) = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$ 和 $S(X) = \{x \in X: \|x\| = 1\}$ 分别为 X 的单位球与单位球面; X^* 为 X 的共轭空间。对于 $x \in S(X)$,记 $\nabla_x = \{f \in$

$S(X^*) | f(x) = 1\}$ ^[8]。

定义1 对于 $x_0 \in S(X)$, $\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 定义

$D(x_0, \varepsilon) = \sup\{\|x_1 - x_2\| : x_1, x_2 \in B(X), \text{存在 } f \in \nabla_{x_0}, \text{使 } f(x_1) \geq 1 - \varepsilon, f(x_2) \geq 1 - \varepsilon\}$ 为空间 X 在 x_0 点处的凸性模^[8]。

定义2 $(X, \|\cdot\|)$ 是实赋范空间, $B_1 \subset X$ 是包含原点的有界闭凸集, S_1 是 B_1 的边界曲面, $\forall x_0 \in S_1, \varepsilon \in (0, 1)$, 定义 $D(S_1, x_0, \varepsilon) = \sup\{\|x_1 - x_2\| : x_1, x_2 \in S_1, \text{存在 } f \in \nabla_{x_0}, \text{使 } f(x_1) \geq \|x_0\| - \varepsilon, f(x_2) \geq \|x_0\| - \varepsilon\}$ 为曲面 S_1 上点 x_0 关于曲面的凸性模^[8]。

定义3 A 是 X 的有内点的凸集, A 的边界上点 x 称为支撑点, $f \in S(X^*), f(x) = \sup_{y \in A} f(y)$ 称为支撑泛函^[9]。

收稿日期: 2009-12-17

基金项目: 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(11521258); 黑龙江科技学院引进人才科研启动基金项目(06-15)

作者简介: 姚君, 讲师, 研究方向为泛函分析, 电子信箱: yaojun7607@163.com

1 点态凸性模在二维和三维欧氏空间的表示

下面给出点态凸性模在二维和三维欧氏空间的表示,得到点态几何性质的判据,将为凸性性质及相关几何性质的研究提供有效的量化依据。

定理 1 $X=R^2$ 为二维欧氏空间, $S_1=\left\{(\xi_1, \xi_2): \frac{\xi_1^2}{a^2}+\frac{\xi_2^2}{b^2}=1\right\}$,

$\forall x_0 \in S_1$, 则当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 曲面的凸性模为

$$D(S_1, x_0, \varepsilon) = \frac{2}{b} \sqrt{(a^2-b^2)\xi_2^2+b^4} \sqrt{2\varepsilon} + o(\varepsilon)$$

证明 任意 $x_0=(\xi_1, \xi_2) \in S_1$, 有

$$\frac{2\xi_1}{a^2} + \frac{2\xi_2}{b^2} \xi'_1 = 0 \quad \xi'_1 = -\frac{b^2\xi_1}{a^2\xi_2}$$

可得切片方程

$$a^2\xi_2^2 + b^2\xi_1x = a^2b^2$$

则支撑泛函为 $\left\{\frac{\xi_1}{a^2}, \frac{\xi_2}{b^2}\right\}$ 。

$\forall x=(\eta_1, \eta_2) \in S_1$, 满足

$$f(x) = \left(\frac{\xi_1}{a^2}, \frac{\xi_2}{b^2}\right) (\eta_1, \eta_2) = 1 - \varepsilon \quad (1)$$

$$\frac{\eta_1^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

由式(1), 得

$$\eta_1 = \frac{a^2b^2(1-\varepsilon) - a^2\xi_2\eta_2}{b^2\xi_1}$$

代入式(2), 得

$$a^2\eta_2^2 - 2a^2\xi_2(1-\varepsilon)\eta_2 + a^2b^2(1-\varepsilon)^2 - b^2\xi_1^2 = 0$$

则

$$D(S_1, x_0, \varepsilon) = \sqrt{\frac{a^4\xi_2^2+b^4\xi_1^2}{b^4\xi_1^2}} \sqrt{(\eta_1^2+\eta_2^2)^2-4\eta_1^2\eta_2^2} \\ = \frac{2}{b} \sqrt{(a^2-b^2)\xi_2^2+b^4} \sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}$$

则当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时

$$D(S_1, x_0, \varepsilon) = \frac{2}{b} \sqrt{(a^2-b^2)\xi_2^2+b^4} \sqrt{2\varepsilon} + o(\varepsilon)$$

证毕。

定理 2 $X=R^3$ 为三维欧氏空间, $S_1=\{(\xi_1, \xi_2, \xi_3):$

$\frac{\xi_1^2}{a^2}+\frac{\xi_2^2}{b^2}+\frac{\xi_3^2}{c^2}=1\}$, $\forall x_0 \in S_1$, 则当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$D(S_1, x_0, \varepsilon)$

$$= \sqrt{2} \left\{ U_1 + \sqrt{U_1^2 - 4[U_2 - \xi_1^2(b^2+c^2) - \xi_2^2(a^2+c^2) - \xi_3^2(a^2+b^2)]} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2\varepsilon} + o(\sqrt{\varepsilon})$$

其中, $U_1=(a^2+b^2+c^2-\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)$, $U_2=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2$ 。

证明 对任意 $x_0=(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in S_1$, 可知支撑泛函为

$\left\{\frac{2\xi_1}{a^2}, \frac{2\xi_2}{b^2}, \frac{2\xi_3}{c^2}\right\}$, 若点 $x=(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in S_1$, 满足

$$\frac{\xi_1}{a^2}\eta_1 + \frac{\xi_2}{b^2}\eta_2 + \frac{\xi_3}{c^2}\eta_3 = 1 - \varepsilon \quad (3)$$

$$\frac{\eta_1^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2} + \frac{\eta_3^2}{c^2} = 1 \quad (4)$$

只需求

$$\gamma^2 = [\eta_1 - (1-\varepsilon)\xi_1]^2 + [\eta_2 - (1-\varepsilon)\xi_2]^2 + [\eta_3 - (1-\varepsilon)\xi_3]^2$$

根据拉格朗日乘数法, 作辅助函数

$$\Phi = [\eta_1 - (1-\varepsilon)\xi_1]^2 + [\eta_2 - (1-\varepsilon)\xi_2]^2 + [\eta_3 - (1-\varepsilon)\xi_3]^2 + \\ \lambda \left(\frac{\xi_1}{a^2}\eta_1 + \frac{\xi_2}{b^2}\eta_2 + \frac{\xi_3}{c^2}\eta_3 - 1 + \varepsilon \right) + \mu \left(\frac{\eta_1^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2} + \frac{\eta_3^2}{c^2} - 1 \right)$$

则

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta_1} = 2[\eta_1 - (1-\varepsilon)\xi_1] + \lambda \frac{\xi_1}{a^2} + \mu \frac{2\eta_1}{a^2} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta_2} = 2[\eta_2 - (1-\varepsilon)\xi_2] + \lambda \frac{\xi_2}{b^2} + \mu \frac{2\eta_2}{b^2} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta_3} = 2[\eta_3 - (1-\varepsilon)\xi_3] + \lambda \frac{\xi_3}{c^2} + \mu \frac{2\eta_3}{c^2} = 0 \quad (7)$$

将式(5)~式(7)分别乘以 $[\eta_1 - (1-\varepsilon)\xi_1]$, $[\eta_2 - (1-\varepsilon)\xi_2]$, $[\eta_3 - (1-\varepsilon)\xi_3]$, 再相加得

$$2[[\eta_1 - (1-\varepsilon)\xi_1]^2 + [\eta_2 - (1-\varepsilon)\xi_2]^2 + [\eta_3 - (1-\varepsilon)\xi_3]^2] + \\ \lambda \left(\frac{\xi_1}{a^2}\eta_1 + \frac{\xi_2}{b^2}\eta_2 + \frac{\xi_3}{c^2}\eta_3 \right) - \lambda(1-\varepsilon) \left(\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\xi_2^2}{b^2} + \frac{\xi_3^2}{c^2} \right) + \\ 2\mu \left(\frac{\eta_1^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2} + \frac{\eta_3^2}{c^2} \right) - 2\mu(1-\varepsilon) \left(\frac{\xi_1}{a^2}\eta_1 + \frac{\xi_2}{b^2}\eta_2 + \frac{\xi_3}{c^2}\eta_3 \right) = 0$$

由式(3)和式(4), 有

$$2\gamma^2 - 2\mu(1-\varepsilon)^2 + 2\mu = 0$$

即

$$\gamma^2 = \mu[(1-\varepsilon)^2 - 1]$$

将 $\gamma^2 = \mu[(1-\varepsilon)^2 - 1]$ 代入式(5)~式(7), 得

$$\eta_1 = \frac{\xi_1 A [2a^2(1-\varepsilon) - \lambda]}{2(a^2 A + r^2)} \quad (8)$$

$$\eta_2 = \frac{\xi_2 A [2b^2(1-\varepsilon) - \lambda]}{2(b^2 A + r^2)} \quad (9)$$

$$\eta_3 = \frac{\xi_3 A [2c^2(1-\varepsilon) - \lambda]}{2(c^2 A + r^2)} \quad (10)$$

其中, $A = (1-\varepsilon)^2 - 1$ 。

将式(8)~式(10)代入式(3), 得

$$-\lambda \left[\frac{\xi_1^2 A}{2a^2(a^2 A + r^2)} + \frac{\xi_2^2 A}{2b^2(b^2 A + r^2)} + \frac{\xi_3^2 A}{2c^2(c^2 A + r^2)} \right] + \\ \frac{(1-\varepsilon)\xi_1^2 A}{a^2 A + r^2} + \frac{(1-\varepsilon)\xi_2^2 A}{b^2 A + r^2} + \frac{(1-\varepsilon)\xi_3^2 A}{c^2 A + r^2} = 1 - \varepsilon$$

整理得

$$\gamma^4 + (a^2+b^2+c^2-\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)Ar^2 + a^2b^2A^2 + a^2c^2A^2 + b^2c^2A^2 - \xi_1^2b^2A^2 - \\ \xi_1^2c^2A^2 - \xi_2^2a^2A^2 - \xi_2^2c^2A^2 - \xi_3^2a^2A^2 - \xi_3^2b^2A^2 = 0$$

显然 γ^2 存在最大值:

$$r^2 = \frac{1}{2} \left\{ U_1 + \sqrt{U_1^2 - 4[U_2 - \xi_1^2(b^2+c^2) - \xi_2^2(a^2+c^2) - \xi_3^2(a^2+b^2)]} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot [1 - (1-\varepsilon)^2]$$

其中, $U_1=(a^2+b^2+c^2-\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2)$, $U_2=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2$ 。

于是有

$$D(S_1, x_0, \varepsilon) \\ = 2 \left\{ \frac{1}{2} U_1 + \frac{1}{2} \sqrt{U_1^2 - 4[U_2 - \xi_1^2(b^2+c^2) - \xi_2^2(a^2+c^2) - \xi_3^2(a^2+b^2)]} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1 - (1-\varepsilon)^2}$$

即

$$D(S_1, x_0, \varepsilon)$$

$$= \sqrt{2} \left\{ U_1 + \sqrt{U_1^2 - 4[U_2 - \xi_1^2(b^2 + c^2) - \xi_2^2(a^2 + c^2) - \xi_3^2(a^2 + b^2)]} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2\varepsilon} + o(\sqrt{\varepsilon})$$

证毕。

2 举例应用

下面根据点态凸性模在二维和三维欧氏空间的表示, 计算其在特殊点处的值。

例 1 $X=R^2$ 为二维欧氏空间, $S_1 = \left\{ (\xi_1, \xi_2) : \frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\xi_2^2}{b^2} = 1 \right\}$, 分

别求点 $x_1(a, 0)$, $x_2(0, b)$, $x_3\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}b}{2}\right)$ 的凸性模的值。

解 1) 对于点 $x_1(a, 0)$, 其支撑泛函为 $f(x_1) = \left(\frac{1}{a}, 0\right)$ 。设 $x = (\xi_1, \xi_2) \in S_1$, 有

$$f(x) = \left(\frac{1}{a}, 0\right) (\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{a} \xi_1 = 1 - \varepsilon$$

代入曲面 S_1 , 得

$$\xi_2 = b \sqrt{1 - (1 - \varepsilon)^2}$$

则

$$D(S_1, x_1, \varepsilon) = 2b \sqrt{1 - (1 - \varepsilon)^2}$$

2) 对于点 $x_2(0, b)$, 其支撑泛函为 $f(x_2) = \left(0, \frac{1}{b}\right)$, 设 $x = (\xi_1, \xi_2) \in S_1$, 有

$$f(x) = \left(0, \frac{1}{b}\right) (\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{b} \xi_2 = 1 - \varepsilon$$

代入曲面 S_1 , 得

$$\xi_1 = a \sqrt{1 - (1 - \varepsilon)^2}$$

则

$$D(S_1, x_2, \varepsilon) = 2a \sqrt{1 - (1 - \varepsilon)^2}$$

3) 对于点 $x_3\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}b}{2}\right)$, 其支撑泛函为 $f(x_3) =$

$\left(\frac{1}{2a}, \frac{\sqrt{3}}{2b}\right)$, 设 $x = (\xi_1, \xi_2) \in S_1$, 有

$$f(x) = \left(\frac{1}{2a}, \frac{\sqrt{3}}{2b}\right) (\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2a} \xi_1 + \frac{\sqrt{3}}{2b} \xi_2 = 1 - \varepsilon$$

代入曲面 S_1 , 得

$$4\xi_2^2 - 4\sqrt{3}b(1 - \varepsilon)\xi_2 + 4b^2(1 - \varepsilon)^2 - b^2 = 0$$

则

$$D(S_1, x_3, \varepsilon) = \sqrt{3a^2 + b^2} \sqrt{1 - (1 - \varepsilon)^2}$$

由例 1 可以看出, 曲面为椭圆上的点关于椭圆点态凸性模的值在长轴最小, 沿曲面从长轴到短轴点态凸性模的值是递增的, 达到短轴时最大。而且点态凸性模的值与该点的纵坐标的值关系更为密切, 在同一个椭圆上纵坐标的绝对值相同则凸性程度相同, 这进一步说明椭圆的对称性, 同时也说明点态凸性模的值越小, 该点的凸性程度越强。

例 2 $X=R^3$ 为三维欧氏空间, $S_1 = \left\{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\xi_2^2}{b^2} + \frac{\xi_3^2}{c^2} = 1 \right\}$, 分别求点 $x_1(a, 0, 0)$, $x_2(0, b, 0)$, $x_3(0, 0, c)$

的凸性模的值。

解 1) 对于点 $x_1(a, 0, 0)$, 有

$$U_1 = a^2 + b^2 + c^2 - a^2 = b^2 + c^2 \quad U_2 = a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2$$

则由定理 2, 得

$$D(S_1, x_1, \varepsilon) = 2b \sqrt{1 - (1 - \varepsilon)^2} \quad b^2 > c^2$$

$$D(S_1, x_1, \varepsilon) = 2c \sqrt{1 - (1 - \varepsilon)^2} \quad b^2 < c^2$$

2) 对于点 $x_2(0, b, 0)$, 有

$$U_1 = a^2 + b^2 + c^2 - b^2 = a^2 + c^2 \quad U_2 = a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2$$

则由定理 2, 得

$$D(S_1, x_2, \varepsilon) = 2a \sqrt{1 - (1 - \varepsilon)^2}$$

3) 对于点 $x_3(0, 0, c)$, 有

$$U_1 = a^2 + b^2 + c^2 - c^2 = a^2 + b^2 \quad U_2 = a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2$$

则由定理 2, 得

$$D(S_1, x_3, \varepsilon) = 2a \sqrt{1 - (1 - \varepsilon)^2}$$

由例 2 可以看出, 曲面为椭球面上的点关于椭球面的点态凸性模的值在长轴最小, 沿曲面从长轴到短轴点态凸性模的值是递增的, 并且两个短轴的值相同, 说明凸性程度相同, 这也进一步说明了椭球面的对称性, 同时也说明点态凸性模的值越小, 该点的凸性程度越强。

3 结论

通过对欧式空间中曲面上点的凸性模的表示、估计和计算, 可以看出, 点态凸性模的值越小该点的凸性程度越强, 从而进一步加强对空间的认识, 完善了空间性质。

参考文献 (References)

- [1] Clarkson J A. Uniformly convex spaces [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1936, 40: 396-414.
- [2] Hudzik H. An estimation of the modulus of convexity in a class of orlicz spaces[J]. *Math Japan*, 1987, 329: 227-237.
- [3] Hao C, Wang T. Convex coefficient of orlicz spaces with orlicz norm[J]. *Chi Bull Sci*, 1998, 43: 331-332.
- [4] Gao J. Modulus of convexity in Banach spaces [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2003, 16: 273-278.
- [5] Ji D H, Zhan D P. Some equivalent representation of nonsquare constants and its application.northeast[J]. *Math J*, 1999, 15(4): 439-444.
- [6] Meng C H, Cui Y, Wang T F. Nearly uniformly convex in orlicz sequence space[J]. *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, 2000, 15(1): 1-8.
- [7] 唐晓文, 计东海, 王淑欣. 赋范空间的点态非方常数[J]. *应用泛函分析学报*, 2004, 1: 10-15
Tang Xiaowen, Ji Donghai, Wang Shuxin. *Acta Analysis Functionalis Applicata*, 2004, 1: 10-15.
- [8] 姚君, 李丽, 计东海. Banach 空间点态凸性模 [J]. *哈尔滨理工大学学报*, 2005, 10(5): 78-79.
Yao Jun, Li Li, Ji Donghai. *Journal of Harbin University of Science and Technology*, 2005, 10(5): 78-79.
- [9] 定光桂. 巴拿赫空间引论[M]. 北京: 科学出版社, 1999: 102-121.
Ding Guangui. *An introduction to Banach space* [M]. Beijing: Science Press, 1999: 102-121.

(责任编辑 代丽)