

一种提高判断矩阵一致性程度的方法

冯其明

无锡商业职业技术学院基础部, 江苏无锡 214153

摘要 层次分析法是一种实用的多维决策方法。在运用层次分析法的过程中, 需要对判断矩阵进行一致性检验。若检验不能通过, 则应尽可能小幅度地调整部分元素后再检验, 从而达到既能最大程度地保留原有信息又能提高矩阵的一致性程度的目的。目前, 许多学者提出了提高判断矩阵一致性程度的多种方法, 但这些方法的局限性是有时某些元素调整前后的变化太大, 且需调整的元素较多, 这显然违背了决策者的最初意愿。本文提出由判断矩阵中行列对应元素乘积的算术平均值与相应元素偏差的最大值来判别与调整不合理元素, 进而提高判断矩阵一致性程度的方法。该方法可预先设定调整幅度, 最大程度地保留原有信息。不合理元素的判别方法具有简洁、有效、快速的特点。整个调整过程计算简单, 既可人工也可利用计算机进行。

关键词 层次分析法; 判断矩阵; 完全一致矩阵; 基本一致矩阵

中图分类号 N945.12

文献标识码 A

文章编号 1000-7857(2010)06-0032-03

A Method in Regulating the Consistency of the Judgment Matrix

FENG Qiming

Department for Basic Course Teaching, Wuxi Institute of Commerce, Wuxi 214153, Jiangsu Province, China

Abstract While making decision by Analytic Hierarchy Process (AHP), the consistency of judgement matrix must be checked. If it can not pass the test, some entries of the judgement matrix should be adjusted, and the consistency should be tested again. Accordingly, it is important to find methods regulating the consistency of the judgment matrix. However, with many such methods, the variations of many entries are too great, and the number of adjusted entries are too large, as is not very convenient for decision-makers. This paper proposes a method for regulating the consistency of the judgment matrix, where the revision and the identification of error-elements are based on the maximum deviation of the related element to the arithmetic mean obtained from multiplying a row vector by a column vector. This method can better describe the information of the original judgment matrix, and the threshold of the regulation can also be pre-established. The unreasonable elements can be identified easily, efficiently and quickly. The computation is simple, and the regulation can be done manually or by computer.

Keywords analytic hierarchy process; judgment matrix; consistency matrix; approximate consistency matrix

0 引言

美国匹兹堡大学 Thomas L. Saaty 于 20 世纪 70 年代提出的层次分析法 (Analytic Hierarchy Process, AHP) 是一种定性与定量相结合的决策工具^[1]。近年来, AHP 由于具有系统性、实用性、简洁性的特点, 被广泛应用于社会、经济、科技等领域的系统分析与战略研究。

层次分析法的关键是构造合理的判断矩阵^[2]。当判断矩阵满足完全一致性条件时可得到评价对象实际权向量的精

确解, 而判断矩阵不满足完全一致性条件时只能得到权向量的近似解。判断矩阵的一致性程度越高, 近似程度也就越好, 反之, 近似程度则越差, 甚至可能得出与评价对象实际权向量截然不同的结果^[3]。由于评价对象的复杂性及不确定性, 决策者给出的判断矩阵肯定不满足完全一致性条件。显然, 通过判别、调整不合理元素来逐步提高判断矩阵的一致性程度是一个具有实际应用意义的课题。

近年来, 许多学者提出了灵敏度分析法、迭代法等多种

收稿日期: 2009-11-11

基金项目: 江苏省 2006 年度“青蓝工程”项目

作者简介: 冯其明, 副教授, 研究方向为数学模型, 电子邮箱: wuxifqm@163.com

提高判断矩阵一致性程度的方法^[3-5]。这些方法各有特点,但普遍的局限性是有些元素调整前后的变化太大,从根本上违背了判断者的最初意愿,且计算繁琐。

因此,本文力求从原来判断矩阵中提炼出准确信息,并尽可能地减少调整元素,从而简洁、高效地提高判断矩阵的一致性程度。

1 基本概念

定义 判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n \times n}$ 对于任意 i, j , 都有 $a_{ij} > 0$ 且 $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$ 成立, 则有

- 1) 如果对于任意 i, j, k , $a_{ik}a_{kj}=a_{ij}$, 则称 A 为完全一致矩阵。
- 2) 如果判断矩阵 A 可通过一致性检验, 则称 A 为基本一致矩阵。

定理 1 设 $A=(a_{ij})_{n \times n}$ 是完全一致矩阵, $A_1=(\overline{a_{ij}})_{n \times n}$, $\overline{a_{ij}} = \left(\prod_{k=1}^n a_{ik}a_{kj} \right)^{\frac{1}{n}}$, 则 A_1 是完全一致矩阵^[4]。

定理 2 对于判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n \times n}$, 设 $A(A-nI)=(b_{ij})_{n \times n}$ 。判断矩阵 A 为基本一致矩阵的充要条件是对于任意 i, j , b_{ij} 都与 0 比较接近。

2 一致性程度的调整方法

2.1 不合理元素的判别与调整

为讨论方便, 先引入一些符号。 $E=\{x|0 < x \leq 17, x \in N\}$; 层次分析法中的 1~9 标度用 $d_i, i \in E$ 表示, 且设 $d_1 < d_2 < \dots < d_k < \dots < d_{17}$; $\overline{d_k}$ 为与几何平均值 $\overline{a_{ij}}$ 最接近的标度, k 为其在标度序列中的序号; m 为决策者允许原标度向左右两边调整的最大位置数; D_k^m 为标度范围内, 标度 d_k 所在位置左右两边各 m 个标度组成的集合, 即 $D_k^m = d_{k-m}, d_{k-m+1}, d_{k-m+3}, \dots, d_{k-1}, d_{k+1}, \dots, d_{k+m}$ 。

设 $A(A-nI)=(b_{ij})_{n \times n}$, 由定理 2, 如果判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n \times n}$ 不满足一致性要求, 则一定存在某几个偏大的 $|b_{ij}|$ 。只要将所有的 $|b_{ij}|$ 都调小到一定范围, 则 $a_{ik}a_{kj}(i, j, k=1, 2, \dots, n)$ 与 a_{ij} 都比较接近, 判断矩阵的一致性要求即可满足。因此, 根据矩阵 $B=(b_{ij})_{n \times n}$ 中绝对值较大元素即可确定需要调整的元素。

为充分尊重决策者的意愿, 应使元素的调整值不超出已有数值范围。同时, 结合考虑判断矩阵的正互反性, 根据定理

1, 采用 $\overline{a_{ij}} = \left(\prod_{k=1}^n a_{ik}a_{kj} \right)^{\frac{1}{n}}$ 作为 a_{ij} 的近似值。

假设矩阵 B 中 $|b_{ij}|$ 为最大, 调整元素的判别过程如下:

- 1) 当 $b_{ij} > 0$ 时, 表明 a_{ij} 偏小或 $a_{ik}a_{kj}(k=1, 2, \dots, n)$ 中有几个数值偏大。为使判别过程简单, 规定总是优先讨论 a_{ij} 。

① 计算 $\overline{a_{ij}} = \left(\prod_{k=1}^n a_{ik}a_{kj} \right)^{\frac{1}{n}}$ 。在 a_{ij} 所对应的 D_k^m 中若能找到与 $\overline{a_{ij}}$ 最接近的 $\overline{d_k}$, 则表明矩阵 A 中元素 a_{ij} 的调整幅度在所给范

围内。此时, 用 $\overline{d_k}$ 及其倒数分别替代 a_{ij} 和 a_{ji} 。一次判别过程结束。

- ② 若不能找到, 则 a_{ij} 为不需要调整的元素, 则 $a_{ik}a_{kj}(k=1, 2, \dots, n)$ 中可能有一个或几个数值偏大。假设 $a_{ip}a_{pj}$ 是其中最大的一个, 即元素 a_{ip} 和 a_{pj} 中至少有一个偏大。显然, 在 B 中找出的 b_{ip}, b_{pj} 不可能同时大于 0。

当 b_{ip}, b_{pj} 同时小于 0 时, 表明 a_{ip} 和 a_{pj} 都偏大。若 $0 > b_{ip} > b_{pj}$, 则 a_{ip} 偏离算术平均值 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kp}$ 的程度要比 a_{pj} 偏离 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{pk}a_{kj}$ 的程度大得多。因此, 调整元素 a_{ip} 。而若 $0 > b_{ip} > b_{pj}$, 则优先调整元素 a_{pj} 。

当 $b_{ip}, b_{pj} < 0$ 时, 表明 a_{ip} 和 a_{pj} 中一个偏大, 一个偏小。对偏大元素进行调整。再按①判别、调整 a_{ip} 或 a_{pj} 。

- 2) 当 $b_{ij} < 0$ 时, 表明 a_{ij} 偏大或 $a_{ik}a_{kj}(k=1, 2, \dots, n)$ 中有几个数值偏小。讨论过程与上面①、②类似。

2.2 调整步骤

根据以上分析, 可由矩阵 $B=A(A-nI)$ 中的绝对值较大元素确定、调整不合理元素, 反复进行, 直至达到判断矩阵的一致性要求。具体步骤如下:

- 1) 确定符合决策者意愿的标度左右调整幅度 m 。
- 2) 求判断矩阵 A 的一致性比率 r 。若通过一致性检验则结束调整, 否则进入 3)。
- 3) 计算矩阵 $B=A(A-nI)$, 找出 B 中最大的 $|b_{ij}|$ 。根据 2.1 节的方法进行判别与调整, 一个元素被调整后得到的新矩阵仍用 A 表示。
- 4) 返回步骤 2), 重新进行上述过程。

如果偏大或偏小元素集中出现在某一行、列中, 上述过程可能只对矩阵中某几个元素进行反复调整。为充分利用判断矩阵中的其他信息, 从第二次开始, 应在前面绝对值最大元素所在行列以外的其他行列中查找。

2.3 计算实例

运用本方法对一些文献^[2-6]中的例子进行了验证, 一般只要调整两三个元素即可通过一致性检验。

$$\text{如调整文献[3]中的初始判断矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/2 & 9 \\ 1/2 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 1/2 & 1 & 9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1 \end{pmatrix}$$

的步骤如下。

假设决策者允许原标度向左右两边调整的幅度 $m=3$ 。

- 1) 用方根法计算矩阵 A 的最大特征根, 得到 $r=0.139 > 0.1$ 。

$$2) \text{ 计算 } B = \begin{pmatrix} 0 & -2.7500 & 4.0000 & 4.5000 \\ 4.0000 & 0 & -2.7500 & 4.5000 \\ -2.7500 & 4.0000 & 0 & 4.5000 \\ 0.0556 & 0.0556 & 0.0556 & 0 \end{pmatrix}$$

- 3) 在 B 中找出绝对值最大元素 $|b_{14}|=4.5$, 且 $b_{14} > 0$ 。

先考虑调整 $a_{14}=9$, 标度 9 在标度序列中位于第 17 个位置, 即 $k=17$ 。因此, $D_{17}^3=\{6, 7, 8\}$ 。计算得 $\overline{a_{14}}=9 \notin D_{17}^3$, 表明 a_{14} 为不需要调整的元素。

再计算得 $a_{11}a_{14}=9, a_{12}a_{24}=18, a_{13}a_{34}=4.5, a_{14}a_{44}=9$, 由 $a_{12}a_{24}$ 最大, 可知 $a_{12}、a_{24}$ 中至少有一个偏大。在矩阵 B 中元素 $b_{12}<0, b_{24}>0$, 表明元素 a_{12} 偏大, 元素 a_{24} 偏小。因此, 确定调整元素 a_{12} 。

根据 $a_{12}=2$, 又由于标度 2 在标度序列中位于第 10 个位置, 即 $k=10$ 。可知 $D_{10}^3=\{1/3, 1/2, 1, 3, 4, 5\}$ 。计算得 $\overline{a_{12}}=1 \in D_{10}^3$ 。因此, 把 a_{12} 调整为 1。得到新矩阵 A_1 。

4) 计算新矩阵 A_1 的 $r=0.068<0.1$, 调整结束。

3 结论

提出了一种提高判断矩阵一致性程度的方法, 较好地解决了层次分析法应用中的困难。与现有方法相比, 本文给出的新方法具有以下优越性:

1) 标度的调整幅度由决策者给定, 从而严格控制了元素调整前后的变化范围, 保证了新标度仍在 1~9 的标度范围内, 且被调整的元素数量较少, 从而可以在遵循层次分析法基本理论的前提下, 充分体现了决策者的最初意愿。

2) 不合理元素的判别方法具有简洁、有效、快速的特点, 给出的近似值也较为合理, 克服了以往方法中的不足和盲目

性。整个过程计算简单, 既可手工调整, 也可利用计算机进行调整。

参考文献 (References)

- [1] 王莲芬, 许树柏. 层次分析法引论 [M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1988: 82-97.
Wang Lianfen, Xu Shubai. A first course in AHP [M]. Beijing: China Renmin University Press, 1998: 82-97.
- [2] Saaty T L. The analytic hierarchy process [M]. 2nd ed. New York: RWS Publications, 1980: 189-190.
- [3] 王应明, 傅国伟. 判断矩阵错误元素的识别和调整方法研究 [J]. 系统工程与电子技术, 1992, 6(12): 68-74.
Wang Yingming, Fu Guowei. Journal of Systems Engineering and Electronics, 1992, 6(12): 68-74.
- [4] 杨永清. 层次分析法中判断矩阵不一致性调整方法研究[J]. 运筹与管理, 1999, 8(3): 12-16.
Yang Yongqing. Operations Research and Management Science, 1999, 8(3): 12-16.
- [5] 骆正清. AHP 中不一致性判断矩阵调整的新方法[J]. 系统工程理论与实践, 2004, 24(6): 84-92.
Luo Zhengqing. Systems Engineering Theory & Practice, 2004, 24(6): 84-92.
- [6] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003: 227.
Jiang Qiyuan, Xie Jinxing, Ye Jun. Mathematical modeling [M]. Beijing: Higher Education Press, 2003: 227.

(责任编辑 代丽)

本期完词填空答案

		奥	斯	卡	奖			兰	舟	催	发		
			诺				混				小	虎	队
	奉	公	克	己			合					虎	
	旨			所			动			怒		生	
氯	化	氢		不	自	量	力			海	明	威	
	缘			欲			车	臣	战	争			
知		非	诚	勿	扰					风	声		
与				施			阿				声		
谁				于	丹		凡				慢	羊	羊
同	是	宦	游	人			达	芬	奇				

本期九宫填数答案

九宫 难度系数◆◆◆◆◇

2	6	4	1	3	7	5	9	8
1	5	7	8	4	9	6	2	3
3	8	9	5	6	2	1	4	7
4	7	2	3	1	6	8	5	9
8	9	5	2	8	4	3	7	1
8	3	1	7	9	5	4	6	2
9	4	8	6	2	3	7	1	5
7	1	6	9	5	8	2	3	4
5	2	3	4	7	1	9	8	6
	1	9	3	7	4	2	8	5
	8	5	7	6	9	3	1	2
	4	6	2	1	8	5	9	7
	6	4	9	2	1	8	7	3
	5	7	1	9	3	6	4	8
	3	2	8	5	7	4	6	1