

一类带非线性源的拟线性抛物方程解的熄灭问题

崔周进¹, 王振平², 刘雪梅¹, 徐兵¹, 毛自森¹

1. 解放军理工大学应用数学与物理系, 南京 211101
2. 河南师范大学数学与信息科学学院, 河南新乡 453007

摘要 研究了一类拟线性抛物方程边值问题解的熄灭问题, 非线性抛物方程在随时间增加时, 不一定存在连续的解, 有的问题解是整体存在的, 有的问题解就不存在, 熄灭是解不存在的一种。形如 $u_t - \operatorname{div}[\sigma(|\nabla u|^2) \nabla u] = \lambda u^p$ 的拟线性抛物方程在 R^N 中有界凸空间上的解的熄灭问题, 是几何学领域率先提出的, 此时方程的主部项不再是一致椭圆的, 这是与 p -Laplace 型方程的主要区别也是难点所在, 利用上下解方法及积分估计方法得到两类在有限时间内解熄灭的结果。研究中所利用方法是一种常用方法, 可以推广到更一般的拟线性抛物方程的研究。

关键词 熄灭; 拟线性抛物方程; 非线性源

中图分类号 O175.2

文献标识码 A

文章编号 1000-7857(2010)06-0029-03

Quenching Phenomena for a Quasilinear Parabolic Equation with Nonlinear Source

CUI Zhoujin¹, WANG Zhenping², LIU Xuemei¹, XU Bing¹, MAO Zisen¹

1. Department of Applied Mathematics and Physics, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101, China
2. School of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, Henan Province, China

Abstract For many quasilinear differential equations, their origin may be traced in biology and astrophysics, as related with generalized reaction diffusion theory, non-Newtonian fluid theory, non-Newtonian filtration theory and the turbulent flow of a gas in porous medium. Quenching phenomena for a class of quasilinear parabolic equations are studied in this paper. In the time domain, nonlinear parabolic equations not necessarily have a continuous solution. For some equations, solutions exist as a whole, for others solutions may not exist. Quenching phenomena are related with cases where solutions do not exist in some time period. This paper considers the extinction of solutions of an initial boundary value problem of the quasilinear parabolic equation $u_t - \operatorname{div}[\sigma(|\nabla u|^2) \nabla u] = \lambda u^p$ in a bounded convex domain of R^N with $N \geq 2$. This problem is first introduced in the field of geometry. At this time, the principal part of the equation is no longer uniformly elliptic. Using upper and lower solutions and the integral estimate method, two results of the extinction of the solution are obtained. The results obtained can be extended to a more general form of quasilinear parabolic equations.

Keywords extinction; quasilinear parabolic equation; nonlinear source

0 引言

主要研究如下奇异非线性方程

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}[\sigma(|\nabla u|^2) \nabla u] = \lambda u^p & (x, t) \in \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) = 0 & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (1)$$

的非负解的熄灭问题, 其中 $\sigma(|\nabla u|^2) = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$, $T > 0$, Ω 是

R^N 中的有界凸空间, 具有光滑边界 $\partial\Omega$, $0 < p < 1$, $\lambda \geq 0$ 且 $u_0(x)$ 满足条件: $0 \leq u_0 \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ 。

对于方程(1), 当 $\sigma(|\nabla u|^2) = |\nabla u|^p$ 时称为 p -Laplace 方

收稿日期: 2010-02-08

基金项目: 江苏省教育厅自然科学基金项目(08KJB110005); 解放军理工大学理学院青年基金项目

作者简介: 崔周进, 讲师, 研究方向为非线性微分方程及应用; 电子信箱: cuizhoujin@126.com

程,当 $\sigma(|\nabla u|^2) = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$ 时,称为平均曲率型方程,它们都是拟线性微分方程。其中第二类模型是在几何学的领域内率先提出的,此时方程的主部项不再是一致椭圆的,这是与 p -Laplace 型方程的主要区别也是难点所在。拟线性微分方程起源于生物学和天体物理学相关问题,例如在燃烧理论中,函数 $u(x, t)$ 表示温度, $\text{div}[\sigma(|\nabla u|^2)\nabla u]$ 表示热扩散,而 λu^p 是一个源。方程(1)也出现在一些描述物理现象的模型中,例如产生于研究非牛顿湍流^[1-2],非牛顿渗流^[3],以及多孔介质中气体渗流^[4]等问题。

20 世纪 70 年代以来,半线性、拟线性抛物方程的初边值问题的熄灭现象得到广泛研究^[5-6]。所谓熄灭问题,是指存在一个有限时间 $T>0$,使得解在 $0<t<T$ 时非平凡;但对于所有 $(x, t) \in \Omega \times [T, +\infty)$,有 $u(x, t) \equiv 0$ 。在这种情况下, T 被称为熄灭时间。例如,陈松林^[7]采用能量估计的方法讨论了一类反应扩散方程初边值问题解的熄灭的充要条件。

对于如下带齐次 Dirichlet 边值问题的半线性抛物方程

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - u^q & (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty) \\ u(x, t) = 0 & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (2)$$

比较完整的结论参见文献[6],方程(2)的非平凡解在有限时间消逝当且仅当 $0 < q < 1$,即强的吸收项会导致解在有限时间内熄灭。更多关于方程(2)解的熄灭理论,已经由许多作研究者得出^[8-9]。

文献[10]中,作者给出如下问题解熄灭的充分必要条件:

$$\begin{cases} u_t = \text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - \lambda u^q & (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty) \\ u(x, t) = 0 & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\lambda > 0$ 。作者得到如果 $p \in (1, 2)$ 或者 $q \in (0, 1)$ 上述问题的解在有限时间消逝。但是,如果 $p \geq 2$ 且 $q \geq 1$,解是非熄灭的。在没有吸收项的情况即 $\lambda = 0$ 时,文献[11]和[12]得到解熄灭的充分必要条件是 $p \in (1, 2)$ 。

对于如下更一般的非线性抛物方程解的熄灭:

$$u_t - \text{div}[\sigma(|\nabla u|^2)\nabla u] + b(u) \cdot \nabla u = 0 \quad (4)$$

文献[13]已有研究,物理上扰动项 $b(u) \cdot \nabla u$ 可看作 $b(u)$ 描述速度场的迁移作用。对问题(2)和(3)来说,扩散项与吸收项以及快速扩散与强吸收之间的差别将导致任何有界非负解都在有限时间内趋于零。但在方程(1)和(4)中,非线性源被称为“热源”,而在方程(2)和(3)中,源 $-u^q$ 被称为“冷源”,不同的源对解的性质造成完全不同的影响^[10-14]。

本文关心的是 $\sigma(|\nabla u|^2) = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$ 带热源时解的性质。

文中首先给出一些引理,并得到解的存在性,给出熄灭结论。

1 解的存在性

定义 1 令 $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$ 。非负函数 u 被称为问题(1)的弱解当且仅当 $u \in L^\infty(\Omega_T) \cap L^p(0, T; W^{1,p}_0(\Omega))$, $u_t \in L^2(\Omega_T)$, 且

满足

$$\int_0^T \int_\Omega (-u\varphi_t + \sigma(|\nabla u|^2)\nabla u \cdot \nabla \varphi - \lambda u^p \varphi) dx dt = 0 \quad (5)$$

及 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_\Omega |u(u, t) - u_0(x)| dx = 0$, 此处检验函数 $\varphi(x, t) \in C_0^\infty(\Omega_T)$ 。

注:当边界值是任意非负函数 $\psi \in L^\infty(\Omega_T) \cap L^p(0, T; W^{1,p}_0(\Omega))$, 这时定义的弱解需要用 $u - \psi \in L^\infty(\Omega_T) \cap L^p(0, T; W^{1,p}_0(\Omega))$ 替换 $u \in L^\infty(\Omega_T) \cap L^p(0, T; W^{1,p}_0(\Omega))$ 。而且,由于 $C_0^\infty(\Omega_T)$ 在 $L^p(0, T; W^{1,p}_0(\Omega))$ 中稠密,可以断言,对于任意 $\varphi \in L^\infty(\Omega_T) \cap L^p(0, T; W^{1,p}_0(\Omega))$, 上述等式成立。

类似地,为了定义下解(上解) $\underline{u}(x, t)$ ($\bar{u}(x, t)$) 对每一个 $\varphi(x) > 0$, 只要求在 Ω 中 $\underline{u}(x, 0) \leq u_0(x)$ ($\bar{u}(x, 0) \geq u_0(x)$), 在 $\partial\Omega \times [0, T]$ 上 $\underline{u}(x, t) \leq 0$ ($\bar{u}(x, t) \geq 0$), 且问题(1)中的等号用 $\leq$ ($\geq$) 代替。

引理 1 假设 $u, v \in L^\infty(\Omega_T)$, 令 $Lu = (\partial u / \partial t) - \text{div}(\sigma(|\nabla u|^2)\nabla u) - f(x, u)$, 并假设 $f(x, u)$ 连续,

$$Lu \leq 0 \leq Lv \quad (x, t) \in \Omega_T$$

$$u(x, t) \leq v(x, t) \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]$$

而且 $u(x, 0) \leq v(x, 0)$, 那么在 $\bar{\Omega}_T$ 上有 $u \leq v$ 。

引理的证明由最大值原理可以推得,具体证明参见文献[15]。由引理 1,可以得到比较原理如下。

引理 2 假设 $\underline{u}(x, t), \bar{u}(x, t)$ 是问题(1)对应的上解和下解,那么在 Ω_T 上, $\underline{u}(x, t) \leq \bar{u}(x, t)$ 几乎处处成立。

定理 1 对于任意 $T > 0$, 问题(1)存在解 $u(x, t) \in L^\infty(\Omega_T)$, 并且存在连续函数 $C(t)$, 使得

$$\|u(x, t)\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq C(t) \quad (6)$$

证明 假设 $\hat{x}$ 是 $\partial\Omega$ 上任意一点。既然 Ω 为有界凸空间,存在 $\partial\Omega$ 在点 $\hat{x}$ 处的超平面 P 。不失一般性,假设 $\hat{x}$ 为原点, $P = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 = 0\}$, $\Omega \subset \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 > 0\}$ 。令 $v(x, t) = kx_1 e^{-mt}$, 其中 $k > 0$ 。令 $k = k(\hat{x})$, $m = m(\hat{x})$ 充分大以至对所有 $x \in \Omega$, 有 $v(x, 0) > |u(x, 0)|$ 。直接计算可知,

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \text{div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1+|\nabla v|^2}}\right) = mv \geq \lambda v^p$$

另外,对于 $x \in \partial\Omega$ 及 $t \geq 0$, 显然有 $v(x, 0) \geq 0 = u(x, 0)$ 。由引理 1 和 2 可得,对所有 $(x, t) \in \Omega \times [0, +\infty)$, 有 $-v(x, t) \leq u(x, t) \leq v(x, t)$ 。因此,解的存在性可以得到并有估计式(6)。

2 解的熄灭

本节着重考虑问题(1)解的熄灭。

定理 2 设 $\lambda = 0$, u 是问题(1)的弱解,则存在时间 $T > 0$, 使得对于任意 $(x, t) \in \bar{\Omega} \times (T, +\infty)$, 有 $u \equiv 0$ 。

证明 类似定理 1 的证明,定义辅助函数

$$v(x, t) = k(m + x_1 + x_2 + \dots + x_n)(T - t)e^{qt} \quad (7)$$

其中,

$$k, q > 0 \quad m = \sup\{|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|\} + 2 \quad (8)$$

那么有

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k(m + x_1 + x_2 + \cdots + x_n) e^{q[(T-t)_+ - 1]} \quad (9)$$

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \right) = 0 \quad (10)$$

由式(7)~(10),可得

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geq \operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2} \nabla v) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} v(x, 0) &\geq u_0(x) & \forall x \in \Omega \\ v(x, t) &\geq 0 & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times (0, +\infty) \end{aligned} \quad (12)$$

由引理 1 以及式(11)、(12),可得 $u(x, t) \leq v(x, t)$ 。由 $v(x, t)$ 的定义可知,对于所有 $(x, t) \in \overline{\Omega} \times (T, +\infty)$, $u(x, t) \leq v(x, t) = 0$ 。证毕。

定理 3 设 $\lambda > 0$, u 是问题(1)的弱解,则对充分小的初值,存在时间 $T > 0$,使得对于任意 $(x, t) \in \overline{\Omega} \times (T, +\infty)$,有 $u = 0$ 。

证明 对问题(1)的第 1 个方程乘以 u ,并在 Ω 上积分,可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} dx = \lambda \int_{\Omega} u^{1+p} dx \quad (13)$$

因为 $0 < p < 1$,利用 Holder 不等式,式(13)可以改写为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} dx = \\ \lambda \int_{\Omega} u^{1+p} dx \leq \lambda |\Omega|^{(1-p)/2} \left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)^{(1+p)/2} \end{aligned}$$

那么有

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 dx \leq 2\lambda |\Omega|^{(1-p)/2} \int_{\Omega} u^2 dx$$

通过积分,有

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq 2\lambda |\Omega|^{(1-p)/2} t \int_{\Omega} u_0^2 dx \quad (14)$$

那么,对于充分小的初值,由式(14)知,存在时间 $T > 0$,使得对于任意 $(x, t) \in \overline{\Omega} \times (T, +\infty)$,有 $u = 0$ 。

3 结论

非线性偏微分方程是刻画非线性现象最精确的数学模型之一,而且是数学理论与实际应用之间的一座重要的桥梁。以物理学、化学、生态学和生物学及其他学科中的问题为背景的反应扩散模型研究,主要目的是解决解的整体存在性和非整体存在性这两个基本问题。本文研究了一类拟线性抛物方程边值问题解的熄灭问题。众所周知,非线性抛物方程在随时间增加时,不一定存在连续的解,有的问题解是整体存在的,有的问题解就不存在,熄灭是解不存在的一种。熄灭现象最早可以追溯到 Kawarada 在 1975 年研究一类非线性热方程,由此拉开了研究非线性发展方程熄灭现象的序幕。本文使用的上下解及积分估计的方法是一种常用方法,可以推广到更一般的拟线性抛物方程研究,例如可以考虑方程右端奇异项的改变,或者可以考虑边值问题是非齐次情况,这些

都将是进一步研究要关注的问题。

参考文献 (References)

- [1] Astrita G, Marrucci G. Principles of non-Newtonian fluid mechanics[M]. New York: McGraw-Hill, 1974.
- [2] Martinson L K, Pavlov K B. Unsteady shear flows of a conducting fluid with a rheological power law[J]. *Magnitnaya Gidrodinamika*, 1971, 2: 50-58.
- [3] Kalashnikov A S. On a nonlinear equation appearing in the theory of non-stationary filtration[J]. *Trudy Seminara Petrovsk*, 1978, 5: 60-68.
- [4] Esteban J R, Vazquez J L. On the equation of turbulent filtration in one-dimensional porous media[J]. *Nonlinear Analysis*, 1982, 10: 1303-1325.
- [5] Kalashnikov A S. The nature of the propagation of perturbations in problems of non-linear heat conduction with absorption [J]. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1974, 14: 70-85.
- [6] Gu Y G. Necessary and sufficient conditions of extinction of solution on parabolic equations[J]. *Acta Mathematica Sinica*, 1994, 37: 73-79.
- [7] 陈松林. 一类反应扩散方程解的熄灭现象 [J]. *应用数学和力学*, 2001, 22(11): 1217-1220.
Chen Songlin. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, 22(11): 1217-1220.
- [8] Evans L C, Knerr B F. Instantaneous shrinking of the support of non-negative solutions to certain nonlinear parabolic equations and variational inequalities [J]. *Illinois Journal of Mathematics*, 1979, 23: 153-166.
- [9] Lair A V. Finite extinction time for solutions of nonlinear parabolic equations[J]. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 1993, 21: 1-8.
- [10] Li Y X, Wu J C. Extinction for fast diffusion equations with nonlinear sources[J]. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2005, 2005: 1-7.
- [11] 崔周进, 徐兵. 一类带非线性对数项的拟线性椭圆方程解的存在性 [J]. *科技导报*, 2009, 27(2): 43-46.
Cui Zhoujin, Xu Bing. *Science and Technology Review*, 2009, 27(2): 43-46.
- [12] Yuan H J, Lian S Z, Gao W J, et al. Extinction and positive for the evolution p -Laplacian equation in R^N [J]. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 2005, 60: 1085-1091.
- [13] 黄瑜, 李刚, 于勇. 一类具有非线性迁移项的拟线性抛物方程解的熄灭[J]. *南京气象学院学报*, 2004, 27(5): 695-699.
Huang Yu, Li Gang, Yu Yong. *Journal of Nanjing Institute of Meteorology*, 2004, 27(5): 695-699.
- [14] Li Y X, Xie C H. Blow-up for p -Laplacian parabolic equations[J]. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2003, 2003: 1-12.
- [15] Pao C V. Nonlinear Parabolic and elliptic equations [M]. New York: Plenum, 1992.

(责任编辑 朱宇)

声明

《科技导报》2010 年第 1 期 94-97 页刊登的论文“紧急情况下驾驶员行为特性分析”,其研究结果是作者基于清华大学实验数据完成的,作者特此声明,并表示诚挚的谢意。