

# 具有 Holling-III 的捕食者-食饵系统的 简明严格解析解

李元媛<sup>1,2</sup>, 蔡睿贤<sup>1</sup>

1. 中国科学院工程热物理研究所, 北京 100190

2. 中国科学院研究生院, 北京 100049

**摘要** 捕食关系是自然界中普遍存在的物种间相互作用的基本关系之一,也是生态学界和生物数学界研究的一个重要课题。本文主要对一类比率依赖的、具有 Holling 第三类功能性反应且具有捕捞的两种群竞争模型进行了巧妙的简化,得到了该模型系统可能存在的代数显式简明严格解析解,它们对提高理论,发展各种数值计算方法具有相应的价值。不同学科的各种基本方程的解析解,历史上对学科的发展曾起过关键的作用。例如各种不可压位流与常系数导热的解析解,就曾是早年流体力学与传热学的基础,后来因为满足一定的初始和边界条件(尤其对复杂的基本方程)的解析解很难找到,再加上电子计算机与数值计算方法的飞速发展,在解决具体问题时就基本转向计算流体力学和计算传热学。但解析解还是有其不可替代的理论价值的,而且它还可以作为标准解推动各种计算方法的发展,以及用来检验各种计算方法与程序的准确性、收敛性与稳定性,也可以启发工作者改进各种差分格式,网格生成技术等。

**关键词** 捕食者-食饵系统; 严格解析解; Holling-III 功能性反应; 捕捞

**中图分类号** O193

**文献标识码** A

**文章编号** 1000-7857(2010)06-0039-03

## Exact Analytical Solutions of a Ratio-dependent Capture Predator-Prey System with Holling Type III

LI Yuanyuan<sup>1,2</sup>, CAI Ruixian<sup>1</sup>

1. Institute of Engineering Thermophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

2. Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

**Abstract** The predator-prey relationship is not only a fundamental relation between species in nature, but also very important in ecology and bio-mathematics. In most research fields, which deal with definite objects, the traditional approach is to derive some basic rules based on experiments and observations, then to obtain mathematical equations and their analytical solutions. Numerical solutions are commonly required due to the difficulties to obtain analytical solutions. But analytical solutions have important merits in theory, especially as the benchmark solutions to check the accuracy, the convergence and the stability of various numerical computational methods and to improve their difference schemes, grid generations and so on. Some exact analytical solutions of a ratio-dependent capture predator-prey system with Holling type III functional response are derived in this paper. They can be used as the benchmark solutions to verify the numerical solutions and even to develop various numerical methods.

**Keywords** predator-prey system; strict analytical solutions; Holling-III Functional response; capture

种群生态学是生态学中的一个重要分支,也是迄今为止数学在生态学中应用的最为广泛和深入的一个分支,主要研

究给定种群的动力学特征和结构,以及相关种群相互作用下的发展规律。捕食关系是自然界中普遍存在的物种间相互作

收稿日期: 2009-10-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(50876106)

作者简介: 李元媛,博士研究生,研究方向为动力系统变工况及解析解,电子信箱: marryliyuan@126.com; 蔡睿贤(通信作者,中国科协所属全国学会个人会员登记号: E400100046M),中国科学院院士,研究方向为叶轮机械与燃气轮机、热力系统及解析解,电子信箱: crx@mail.etp.ac.cn

用的基本关系之一,也是生态学界和生物数学界研究的一个重要课题<sup>[1-4]</sup>。本文主要研究一类比率依赖具有捕食的捕食者-食饵系统的解析解,导出其可能有的严格简明(不包含无穷级数、特殊函数等)特解。

不同学科的各种基本方程的解析解,历史上对学科的发展曾起过关键的作用。例如各种不可压位流与常系数导热的解析解,就曾是早年流体力学与传热学的基础<sup>[5-6]</sup>。后来因为满足一定的初始和边界条件(尤其对复杂的基本方程)的解析解很难找到,加上电子计算机与数值计算方法的飞速发展,在解决具体问题时就基本转向计算流体力学与计算传热学。但解析解还是有其不可替代的理论价值的,而且它还可以作为标准解来推动各种计算方法的发展。例如,可以用来检验各种计算方法与程序的准确性、收敛性与稳定性<sup>[7]</sup>,也可以启发工作者改进各种差分格式,网格生成技术等<sup>[7]</sup>。例如文献[7]对可模拟叶轮机械内部三元流动得出了多个解析解,并为多篇计算流体力学文献引用。本文将导出捕食者-食饵系统的一些严格解析特解,发挥其相应的作用。

## 1 基本方程

路霞等<sup>[2]</sup>曾研究了比率依赖的具有第 III 类功能性反应函数模型。根据文献[2],可将一般的比率依赖捕食者-食饵的模型变换为

$$\frac{dx}{d\tau} = x(1-x) - \frac{\nu x^2 y}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -\gamma y + \frac{\mu x^2 y}{x^2 + y^2} \quad (2)$$

其中,  $x$  为食饵数量,  $y$  为捕食者数量,  $\gamma$  为捕食者死亡率,  $\mu$  和  $\nu$  均为大于零的常数。

考虑以固定的速率从中捕捞食饵,文献[5]重新定义系统的方程为

$$\frac{dx}{d\tau} = x(1-x) - \frac{\nu x^2 y}{x^2 + y^2} - k \quad (3)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -\gamma y + \frac{\mu x^2 y}{x^2 + y^2} \quad (4)$$

其中,  $k$  为捕捞食饵的捕捞率。本文考虑的所有参数  $\mu$ 、 $\nu$ 、 $\gamma$  和  $k$  均为正数。

## 2 求解简化方法

对于待求解的方程组(1)与(2)或(3)与(4),由于其复杂且为非线性,据所知目前尚未有简明的严格解析解。但正如前面引言中所述,本文的目的是求得一些严格的解以提高理论及得到一些基准解以发展数值求解办法,所以导出一些未有的特解也是有一定的价值的,有些类似于早年导出一些简化数理模型的解析解的意义。以此出发,若选择第 1 节中各式的常数  $\mu$  与  $\nu$  相等,则各方程就都可以比较容易求解。当然,所得只是某一情况下的特解。但实际上已有的解析解,绝大多数都是特解,在历史上先后都发挥过作用。

按上述简化,令(下文中  $c_i$  均为常数)

$$\mu = \nu = c_0 \quad (5)$$

则上述 4 个式子可改写为

$$\frac{dx}{d\tau} = x(1-x) - c_0 \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad (6)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -\gamma y + c_0 \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad (7)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = x(1-x) - c_0 \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - k \quad (8)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -\gamma y + c_0 \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad (9)$$

下面分 3 种情况给出各自的解。

## 3 特解

特解 1 按上节的简化,且将式(6)与(7)相加,可得

$$\frac{dx}{d\tau} + \frac{dy}{d\tau} = x(1-x) - \gamma y \quad (10)$$

或

$$\frac{dx}{d\tau} - x(1-x) = -\frac{dy}{d\tau} - \gamma y \quad (11)$$

借用常见的求解数理方程的分离变量法,式(11)的左右侧均应等于同一常数  $c_2$ ,于是有

$$\frac{dx}{d\tau} - x(1-x) = c_2 \quad (12)$$

$$\frac{dy}{d\tau} + \gamma y = -c_2 \quad (13)$$

当  $c_2=0$  时,所得的解很简明,下面先导出这时的解。

此时,式(12)简化为

$$\frac{dx}{x(1-x)} = d\tau \quad (14)$$

积分后可得

$$\tau = -\ln \frac{1-x}{x} + c_3 \quad (15)$$

如果改用食饵数量表示,则为

$$x = \frac{1}{1 + e^{c_3 - \tau}} \quad (16)$$

同样,对于式(13),有

$$\frac{dy}{y} = -\gamma d\tau \quad (17)$$

$$y = e^{-\gamma\tau + c_4} \quad (18)$$

式(16)与(18)是最简明而严格的未考虑捕捞食饵捕捞率的解析解,反映了食饵数量  $x$ 、捕食者数量  $y$  与捕食者死亡率  $\gamma$  逐渐变化的情景。

特解 2 与特解 1 不同或更复杂之处在于  $c_2 \neq 0$ 。这时,由式(12)得

$$\frac{dx}{c_2 + x(1-x)} = d\tau \quad (19)$$

对该式积分得

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1+4c_2}} \ln \frac{\sqrt{1+4c_2} + 2x-1}{\sqrt{1+4c_2} - 2x+1} + c_5 \quad (20)$$

与上面相同,为方便实用,也应将式(20)由 $\tau=f(x)$ 的形式转化为 $x=f(\tau)$ 的形式。通过不太复杂的推导,可得

$$x = \frac{f(\tau)(c_6+1)-(c_6-1)}{2[1+f(\tau)]} \quad (21)$$

式中的 $f(\tau)$ 和 $c_6$ 分别为

$$f(\tau) = e^{\sqrt{1+4c_2}(\tau-c_3)} \quad (22)$$

$$c_6 = \sqrt{1+4c_2} \quad (23)$$

式(23)中, $c_2$ 应大于 $-1/4$ ,以免有虚数。

这很容易理解,其实特解1本身就是特解2的特解。当取 $c_2=0$ 时,特解2的公式就会简化为特解1的公式。

为得到 $y$ 与 $\tau$ 的关系,由式(13),可得

$$\frac{dy}{d\tau} + c_2 + \gamma y = 0 \quad (24)$$

此式也有标准的积分办法,积分后可得

$$y = c_7 e^{-\gamma\tau - \frac{c_2}{\gamma}} \quad (25)$$

此式与式(21)即构成特解2的解析解。

**特解3** 严彬<sup>[8]</sup>因考虑以固定的速率从中捕捞食饵,将式(1)与(2)改为式(3)与(4),前后两套公式略有不同(后者多了一个捕捞食饵的捕捞率 $k$ )。

但当如前采用了 $\mu=\nu$ 的简化后,使式(6)~(8)中的 $\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ 项都消除了,增加了一个常数项的影响是不大的。仅相当于在式(11)、(12)或(13)的右端多出一个常数项。在此情况下,当取 $c_2=0$ 时,无此项,但代替此项的是 $k$ ,所以当 $c_2=0$ ,式(8)与(9)的解为式(16)和将 $c_2$ 改为 $k$ 的式(25);而当两者均不为零时,解为式(21)和将 $c_2$ 改为 $c_2+k$ 的式(25)。

由上述的解似乎可以得出捕捞率的影响很小的结论。实际上这可能是假定了 $\mu=\nu$ 而引起的。有关 $k$ 的全面作用,本

文尚有待进一步的工作,但本文的特解也包括了 $k$ 的一些影响。

#### 4 结论

本文对具有Holling-III的捕食者-食饵系统的基本方程,进行了巧妙的简化,得到其一些简明的严格解析解。它们对提高理论,发展各种数值计算方法,都有相应的价值。

#### 参考文献 (References)

- [1] Holling C S. The functional response of predator to prey density and its role in mimicry and population regulation[J]. *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, 1965, 45: 1-60.
- [2] 路霞, 林怡平. 一类比率依赖捕食者-食饵系统的局部稳定性及Hopf分支[J]. 昆明理工大学学报: 理工版, 2004, 29(增刊): 313-318.  
Lu Xia, Lin Yiping. *Journal of Kunming University of Science and Technology: Science and Technology Edition*, 2004, 29(Suppl): 313-318.
- [3] Jost C, Arino O, Arditi R. About deterministic extinction in ratio-dependent predator-prey models[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 1999, 61: 19-32.
- [4] Huang J, Xiao D. Analyses of bifurcations and stability in a predator-prey system with Holling type-IV functional response [J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica: English Series*, 2004, 20: 167-178.
- [5] Lamb H. *Hydrodynamics* [M]. 6th ed. London: Cambridge University Press, 1932.
- [6] Özisik M N. *Heat conduction* [M]. Scranton, Pa: International Textbook Co, 1980.
- [7] Cai R, Jiang H, Sun C. Some analytical solutions applicable to verify 3-D numerical methods in turbomachines [R]. *MechE Conference Publications*, c80/84, 1984: 255-263.
- [8] 严彬. 一类比率依赖具有Holling-III的捕食者-食饵系统的参数分析[J]. 科技导报, 2008, 26(22): 30-33.  
Yan Bin. *Science and Technology Reviews*, 2008, 26(22): 30-33.

(责任编辑 朱宇)

#### ·学术动态·



### “2010年全国军事微波技术会议”征文

由中国电子学会主办的“2010年全国军事微波技术会议”将于2010年8月初在哈尔滨市召开。

会议征文范围:电磁场理论、数值方法与CAD;微波毫米波天线与散射;微波毫米波器件及电路;射频功放及线性化技术;THz波技术;微波毫米波系统及应用;微波毫米波测量技术;微波毫米波电磁兼容;超导微波毫米波器件及其应用;微波毫米波新型材料与结构;微波毫米波电子对抗技术;微波能的应用及传输;MIMO及智能天线技术;微波遥测、遥感;微波成像;无线数字音视频技术及其应用;无线通信网络安全及加密技术;电波传播与无线信道特性;波系统及子系统应用及其他。全文截稿日期为2010年5月30日。

会议网站: <http://microwave.hit.edu.cn:8080/2010nmmwc/>。

电话:0451-86413502;电子信箱:qwu@hit.edu.cn。