

# 水平轴风机旋转叶片非线性动力学模型的建立及分析

张伟,冯景,姚明辉,陈丽华,曹东兴

北京工业大学机电学院,北京 100124

**摘要** 对不同风速下水平轴风力发电机旋转叶片的非线性动力学问题进行了研究,将水平轴风力发电机的旋转叶片简化为做定轴转动的柔性旋转悬臂梁,同时考虑叶片的气动力、弹性力和惯性力,建立了脉动风速作用下水平轴风力发电机旋转叶片的非线性动力学模型,利用牛顿定律建立了转动坐标系下叶片的动力学方程,并利用 Galerkin 离散方法将系统的运动偏微分方程离散为常微分方程。针对  $1/2$  亚谐共振- $1:3$  内共振情形,考虑到方程中存在二次非线性项,采用渐进摄动法对方程进行摄动分析,将其转化为直角坐标下的平均方程。通过数值模拟,得到这种共振情况下的二维相图、三维相图、波形图和频谱图,分析了风速的变化对旋转叶片振动的影响。数值结果表明,随着风速的增大,系统会重复呈现周期运动—混沌运动—周期运动。

**关键词** 风机叶片;气动弹性;非线性动力学;混沌运动

**中图分类号** O322,O175

**文献标识码** A

**文章编号** 1000-7857(2010)05-0040-05

## Model Establishment and Nonlinear Dynamic Analysis of the Rotating Horizontal Axis Wind Turbine Blade

ZHANG Wei, FENG Jing, YAO Minghui, CHEN Lihua, CAO Dongxing

College of Mechanical Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China

**Abstract** The nonlinear dynamics of the rotating blade of the Horizontal Axis Wind Turbine(HAWT) under the forces caused by the pulse wind is investigated in this paper. The blade is modeled as a rotating cantilever beam under the actions of aerodynamic forces, elastic forces and inertia forces. The nonlinear governing equation of motion for the rotating cantilevered blade under harmonic wind forces is obtained based on the Newton's law of motion. The Galerkin approach is used to transform the nonlinear partial differential governing equations of motion to a two-degree-of-freedom nonlinear ordinary equations. Due to the quadratic terms, the method of asymptotic perturbation is employed to transform the ordinary equation to the averaged equations in the case of  $1/2$  subharmonic resonance and  $1:3$  internal resonance. The planar phase portrait, the three-dimensional phase portrait, the waveform and the frequency spectrum of the averaged equations are obtained by numerical simulations. The influence of the mean wind speed and the stochastic wind speed on the system is studied. The results indicate that the motion of the blade of HAWT follows the following process: from periodic motion to chaotic motion and then to periodic motion.

**Keywords** blade of wind turbine; aero-elastics; nonlinear dynamics; chaotic motion

### 0 引言

风力发电机在风能利用中占有重要地位,而叶片是风机的核心部件。叶片的受力很复杂,在旋转过程中受气动力、弹

性力和惯性力的耦合作用。随着风电行业的飞速发展,风机叶片的柔性不断加大,使得叶片容易发生振动。剧烈的振动会加速叶片材料的疲劳,减少其有效寿命,甚至会引起叶片

收稿日期:2009-06-05

基金项目:国家自然科学基金重点项目(10732020);国家自然科学基金项目(10872010)

作者简介:张伟(中国科协所属全国学会个人会员登记号:S030000047S),教授,研究方向为非线性动力学、非线性振动与控制,电子邮箱:sandyzhang0@yahoo.com

断裂,造成巨大的经济损失。因此,对风机叶片振动问题的研究越来越重要。

国外学者从 20 世纪 50 年代末就开始,进行风机叶片线性振动问题的研究,而非线性因素对叶片振动问题的影响是非常大的,因此,20 世纪 70 年代,国内外学者开始研究风机叶片的非线性振动特性<sup>[1-3]</sup>。1978 年,Wendell<sup>[4]</sup>推导出适用于风机叶片的气动载荷方程,采用非耦合的非旋转模态研究了叶片气动稳定性问题。Miller<sup>[5]</sup>基于半刚性模型研究了含有非线性项的风机叶片气动弹性稳定性问题。1979 年,Kottapalli 等<sup>[6]</sup>忽略叶片和塔架的耦合效应,利用非耦合的旋转模态分析了风机叶片的静态响应及其稳定性边界。Chopra<sup>[7-8]</sup>忽略重心和气动中心的偏距,假设叶片轴线在旋转平面内,利用非线性半刚性模型研究了叶片气动弹性响应及其稳定性问题。2003 年,Oh 和 Librescu<sup>[9]</sup>以各向异性的悬臂梁模型研究了具有恒定角速度的旋转叶片的振动问题。2006 年,Larsen 和 Nielsen<sup>[10]</sup>利用 Euler-Bernoulli 梁模型建立了风机旋转叶片的非线性动力学方程,研究了单个叶片的稳定性。从已有文献来看,研究风力发电机柔性旋转叶片的非线性动力学的文章相对较少,一方面是因为柔性叶片的受力比较复杂,对工程实际进行合理简化、建立模型并得到运动方程是个难点,另一方面是因为旋转叶片的运动方程比较复杂,为理论分析带来困难。

本文主要考虑小幅脉动风荷载对以小幅脉动转速旋转的风机叶片振动响应的影响,建立柔性旋转叶片的非线性偏微分运动方程,综合利用 Galerkin 方法、渐进摄动法和数值方法研究水平轴风力发电机旋转叶片的非线性动力学问题。

## 1 动力学模型

### 1.1 旋转叶片和气动载荷模型

建立叶片的旋转悬臂梁模型,如图 1 所示。

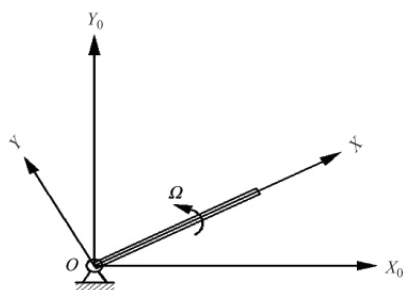


图 1 旋转叶片的悬臂梁模型

Fig. 1 Cantilever beam model of rotating blade

建立两个坐标系:  $OX_0Y_0$  为惯性坐标系,固定在静止状态下风力发电机的轮毂上;  $OXY$  为转动坐标系,固定在运行状态下风力发电机的轮毂上,随叶片做同轴同速转动,设转动角速度为

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_{00} \cos \Omega_1 t \quad (1)$$

其中,  $\Omega$  为叶片转动角速度,  $\Omega_0$  为叶片转动平均角速度,  $\Omega_{00}$  为叶片转动脉动角速度的幅值,  $\Omega_1$  为叶片转动脉动角速度的

频率,  $t$  为时间变量。

将叶片简化为悬臂梁,长度为  $l$ ,单位长度质量为  $m$ 。在转动坐标系下考察叶片的非线性振动特性。叶片弹性线上任意一点  $P(x)$  在转动过程中产生沿  $X$  轴、 $Y$  轴方向的位移分别为  $u(x)$ 、 $w(x)$ 。

下面分析风机叶片所受的风力。根据文献[11],可将风速分成两部分:一部分是长周期部分,其周期在 10min 以上,远离于结构的自振周期,其作用相当于定常风速,称为平均风;另一部分是短周期部分,周期常常只有几秒至几十秒,与结构的自振周期接近,其作用相当于变常风速。因此,任意高度的风速速度可表达为平均风速和脉动风速之和。设风机叶片上游风速为

$$V_w = V_0 + V(t) \quad (2)$$

式中  $V_w$  为总风速,  $V_0$  为平均风速,  $V(t)$  为脉动风速。

忽略风速沿海拔高度的变化,根据空气动力学原理<sup>[12]</sup>,风力机叶片任意点所受的风力在叶片旋转面内的分力为

$$F(x) = \frac{1}{2} \rho_a V_a^2 C_L \left[ (\Omega x)^2 + \left( \frac{2}{3} V_a \right)^2 \right] \quad (3)$$

其中  $S$  为叶片面积,  $C_L$  为翼型的升力系数,  $V_a$  为轮毂处的风速。

### 1.2 惯性力和内力分析

在叶片的  $x$  处取一微段  $dx$ , 分析其受的惯性力, 如图 2 所示。叶片上任意一点  $P(x)$  沿  $X$  轴方向的位移  $u$  与叶片长度  $l$  相比是一个非常小的量,且轴向运动相对于横向运动来说很小,所以在此将叶片的轴向运动忽略不计。

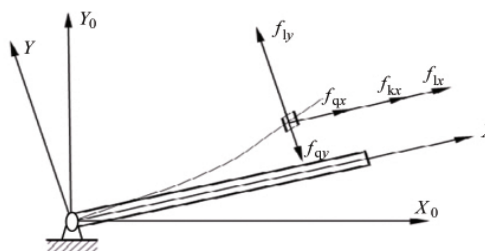


图 2 惯性力分析

Fig. 2 Model of inertia force analysis

离心力沿  $X$  轴、 $Y$  轴两个方向的分量分别为  $f_{kx}$  和  $f_{ky}$ 。科氏力为  $f_{qx}$ , 叶片的角加速度为  $\varepsilon$ , 切向力沿  $X$  轴、 $Y$  轴两个方向的分量分别为  $f_{qx}$  和  $f_{qy}$ , 则惯性力的合力沿  $X$  轴、 $Y$  轴两个方向的分力分别为

$$\begin{aligned} f_x^a &= f_{kx} + f_{qx} \\ &= m[(\Omega_0 + \Omega_{00} \cos \Omega_1 t)^2 x + 2(\Omega_0 + \Omega_{00} \cos \Omega_1 t) \dot{w} - \Omega_{00} \Omega_1 \sin(\Omega_1 t) w] dx \\ &= f_x dx \end{aligned} \quad (4a)$$

$$f_y^a = f_{ky} + f_{qy} = [m(\Omega_0 + \Omega_{00} \cos \Omega_1 t)^2 w + m \Omega_{00} \Omega_1 \sin(\Omega_1 t) x] dx = f_y dx \quad (4b)$$

仍取叶片  $x$  处的微段  $dx$  为研究对象,分析其内力,如图 3 所示。此微段的质量为  $mdx$ 。假设材料是均匀的,应力不超

过弹性极限,并服从胡克定律,变形前垂直于梁轴线的横截面,变形后仍垂直于变形的轴线。

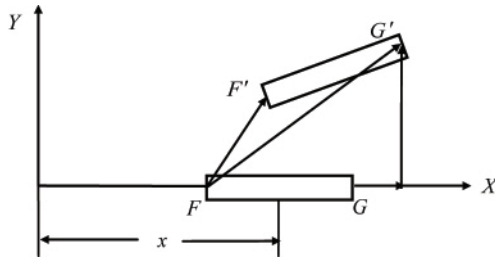


图3 梁的微段模型

Fig. 3 Element model of cantilever beam

将变形前的两个端点分别记为  $F$  和  $G$ , 变形后的两个端点分别记为  $F'$  和  $G'$ , 则  $F$  点的位移为  $\Delta F$ ,  $G$  点的位移为  $\Delta G$ 。

从图3可以得出

$$\Delta F + \Delta F' G' = \Delta G + dx \quad (5)$$

因此,变形后梁中心线处微元的长度为

$$|\Delta F' G'| = ds = [(1 + u_x)^2 + w_x^2]^{1/2} dx \quad (6)$$

轴的纵向伸长所产生的应变为

$$\varepsilon_0 = \frac{ds - dx}{dx} = [(1 + u_x)^2 + w_x^2]^{1/2} - 1$$

而距中心轴线  $y$  处的纤维由于弯曲引起的应变为

$$\varepsilon_1 = y \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[ 1 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \right]$$

并且有

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1$$

在线弹性范围内,梁横截面上的轴力为

$$N(x, t) = EA \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] = EA \frac{ds - dx}{dx} \quad (7)$$

梁横截面上的弯矩和剪力分别为

$$M(x, t) = \int_A \sigma y dA = E \int_A \varepsilon(x, y, t) y dA = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (8)$$

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} = EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (9)$$

其中  $E$  为叶片材料的弹性模量,  $A$  为叶片的横截面积,  $\sigma$  是横截面上的正应力,  $I$  是横截面的惯性矩。

### 1.3 动力学方程

根据牛顿定律,得到其在  $X$  方向和  $Y$  方向的两个方程分别为

$$\frac{\partial}{\partial x} \{ EA \{ 1 - [(1 + u_x)^2 + w_x^2]^{-1/2} \} (1 + u_x) \} + f_x = m \ddot{u} \quad (10a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \{ EA \{ 1 - [(1 + u_x)^2 + w_x^2]^{-1/2} \} w_x \} - EI w'''' + F(x) + f_y = m \ddot{w} \quad (10b)$$

为了得到系统的横向运动方程,需要得到  $u_x$  的表达式。对式(10)进行二元 Taylor 展开,化简并保留到二次项,忽略轴向惯性项,将等式左右两边同乘以  $dx$ ,再从0到1对  $x$  积分,根据文献[13]~[15],忽略高阶非线性项  $u_x w_x^2$ ,化简得到系统的偏微分运动方程,对方程进行无量纲化,得到无量纲形式的

偏微分方程为

$$\begin{aligned} & \ddot{w} + 2\mu \dot{w} + w'''' - g \int_0^1 w'' (w')^2 dx - f_1 [(\Omega_0 + \Omega_0 \cos \Omega_1 t)^2 x^2 + \\ & \frac{4}{9} (V_0 + V_1 \cos \Omega_2 t)^2] + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^1 [(\Omega_0 + \Omega_0 \cos \Omega_1 t)^2 x + \right. \\ & 2(\Omega_0 + \Omega_0 \cos \Omega_1 t) w - \Omega_0 \Omega_1 \sin(\Omega_1 t) w] w' dx \left. \right\} - \\ & [(\Omega_0 + \Omega_0 \cos \Omega_1 t)^2 w + \Omega_0 \Omega_1 \sin(\Omega_1 t) x] = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

其中,  $V_0$  为平均风速,  $V_1$  为脉动风速的幅值,  $\Omega_2$  为脉动风速的频率。

## 2 摄动分析

渐近摄动方法<sup>[16]</sup>(Asymptotic Perturbation, AP)是一种研究非线性动力系统的方法。它建立在暂态时间尺度以及简单的谐波项平衡的基础之上,可以获得方程的二阶近似解。此方法最大优点是不用做很复杂的运算就可以将方程的二次非线性项考虑进来。本研究应用此方法也是为了研究考虑方程的二次非线性项时系统的非线性特性。

为了便于对系统进行摄动分析,首先对方程(11)进行 Galerkin 离散,设方程(11)的解可以表示为  $w(x) = y_1(t) \cdot Y_1(x) + y_2(t) \cdot Y_2(x)$ , 其中  $y_1$  和  $y_2$  是与时间  $t$  有关的权函数,  $Y_1$  和  $Y_2$  是悬臂梁的模式函数,选取悬臂梁的模式函数为

$$Y_j(x) = \cosh(r_j x) - \cos(r_j x) + \frac{\cosh r_j + \cos r_j}{\sinh r_j + \sin r_j} [\sinh(r_j x) - \sin(r_j x)]$$

将解和模式函数代入方程(11),得

$$\begin{aligned} & \ddot{y}_1 + 2\mu \dot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 + (a_{11} - 1) \left[ \frac{1}{2} \Omega_0^2 \cos(2\Omega_1 t) + 2\Omega_0 \Omega_0 \cos(\Omega_1 t) \right] y_1 + \\ & a_{12} [\Omega_0 + \Omega_0 \cos(\Omega_1 t)]^2 y_2 + 2[\Omega_0 + \Omega_0 \cos(\Omega_1 t)] [c_{111} y_1 \dot{y}_1 + \\ & c_{121} y_1 \dot{y}_2 + c_{112} y_2 \dot{y}_1 + c_{122} y_2 \dot{y}_2] - g [\kappa_{11} \lambda_{11} y_1^3 + (\kappa_{11} \lambda_{12} + 2\kappa_{12} \lambda_{11}) y_1^2 y_2 + \\ & (\kappa_{22} \lambda_{11} + 2\kappa_{12} \lambda_{12}) y_1 y_2^2 + \kappa_{22} \lambda_{12} y_2^3] - \Omega_0 \Omega_1 \sin(\Omega_1 t) [c_{111} y_1^2 + \\ & (c_{112} + c_{121}) y_1 y_2 + c_{122} y_2^2] = f_1 [(\Omega_0 + \Omega_0 \cos \Omega_1 t)^2 b_1 + \frac{4}{9} (V_0 + \\ & V_1 \cos \Omega_2 t)^2 d_1] + \Omega_0 \Omega_1 \sin(\Omega_1 t) d_1 \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{y}_2 + 2\mu \dot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 + (a_{22} - 1) \left[ \frac{1}{2} \Omega_0^2 \cos(2\Omega_1 t) + 2\Omega_0 \Omega_0 \cos(\Omega_1 t) \right] y_2 + \\ & a_{21} [\Omega_0 + \Omega_0 \cos(\Omega_1 t)]^2 y_1 + 2[\Omega_0 + \Omega_0 \cos(\Omega_1 t)] [c_{211} y_1 \dot{y}_1 + \\ & c_{221} y_1 \dot{y}_2 + c_{212} y_2 \dot{y}_1 + c_{222} y_2 \dot{y}_2] - g [\kappa_{11} \lambda_{11} y_1^3 + (\kappa_{11} \lambda_{12} + \\ & 2\kappa_{12} \lambda_{11}) y_1^2 y_2 + (\kappa_{22} \lambda_{11} + 2\kappa_{12} \lambda_{12}) y_1 y_2^2 + \kappa_{22} \lambda_{12} y_2^3] - \\ & \Omega_0 \Omega_1 \sin(\Omega_1 t) [c_{211} y_1^2 + (c_{212} + c_{221}) y_1 y_2 + c_{222} y_2^2] = \\ & f_1 [(\Omega_0 + \Omega_0 \cos \Omega_1 t)^2 b_2 + \frac{4}{9} (V_0 + V_1 \cos \Omega_2 t)^2 d_2] + \\ & \Omega_0 \Omega_1 \sin(\Omega_1 t) d_2 \end{aligned} \quad (12b)$$

考虑 1/2 亚谐共振-1:3 内共振的情况,取共振关系为

$$\omega_2 \approx 3\omega_1, \omega_1 = \frac{1}{2} \Omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_1, \omega_2 = \frac{3}{2} \Omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_2, \Omega_2 = \Omega_1 \quad (13)$$

其中,  $\sigma_1, \sigma_2$  为调谐参数。

将式(13)和入方程(12a)和方程(12b),并加摄动参数  $\varepsilon$ , 引进时间尺度变换

$$\tau = \varepsilon^q t \quad (14)$$

式中,  $\tau$  为新的时间变量,  $q$  为有理正数。设方程(12)的解  $y_1(t)$  和  $y_2(t)$  可以由一系列小参数  $\varepsilon$  的级数表达

$$y_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{\delta_n} \psi_n(\tau, \varepsilon) e^{-in \frac{\Omega}{2} t} \quad (15a)$$

$$y_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{\delta_n} \Phi_n(\tau, \varepsilon) e^{-in \frac{3\Omega}{2} t} \quad (15b)$$

采用渐进摄动法对动力学方程(12)进行摄动分析, 得到四维平均方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & -\mu x_1 + (\gamma_1 + \sigma_1) x_2 + \gamma_2 x_4 + a_3 x_1^2 x_2 + a_4 x_1^2 x_4 + a_5 x_1 x_2 x_3 - a_6 x_1 x_3 x_4 + \\ & a_7 x_2^2 x_4 + a_8 x_2 x_3^2 - a_9 x_2 x_3^2 + a_{10} (x_3^2 + x_4^2) x_4 - a_{11} x_3^2 \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & -\mu x_2 + (\gamma_1 - \sigma_1) x_1 + \gamma_2 x_3 - a_3 x_1^2 x_2 + a_4 x_1^2 x_3 + a_5 x_1 x_2 x_4 + a_6 x_2 x_3 x_4 + \\ & a_7 x_1^2 x_3 - a_8 x_1 x_4^2 + a_9 x_1 x_3^2 + a_{10} (x_3^2 + x_4^2) x_3 + a_{11} x_3^3 \end{aligned} \quad (16b)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = & -\mu x_3 + \sigma_2 x_4 + \gamma_3 x_2 - b_2 x_2^3 + b_3 x_2^2 x_4 - b_4 x_1^2 x_2 + b_5 x_1 x_2 x_3 + b_6 x_2 x_4^2 - \\ & b_7 x_2 x_3^2 + b_8 x_1^2 x_4 - b_9 x_1 x_3 x_4 + b_{10} x_4 (x_3^2 + x_4^2) \end{aligned} \quad (16c)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = & -\mu x_4 - \sigma_2 x_3 + \gamma_3 x_1 + b_2 x_1^3 + b_3 x_1^2 x_3 + b_4 x_1 x_2^2 + b_5 x_1 x_2 x_4 - b_6 x_1 x_3^2 + \\ & b_7 x_1 x_4^2 + b_8 x_2^2 x_3 + b_9 x_2 x_3 x_4 + b_{10} x_3 (x_3^2 + x_4^2) \end{aligned} \quad (16d)$$

### 3 数值模拟

利用二阶变步长 Runge-Kutta 法对式(16)进行数值模拟, 选取主要参数和初值为:  $E=17.5 \times 10^9 \text{Pa}$ ,  $A=0.279 \text{mm}^2$ ,  $L=60 \text{m}$ ,  $m=1950 \text{kg/m}^2$ ,  $\mu=0.05$ ,  $\rho_{\text{air}}=1.2 \text{kg/m}^3$ ,  $V_1=0.53 \text{m/s}$ ,  $\sigma_1=0.2$ ,  $\sigma_2=0.3$ ,  $x_{10}=1.85$ ,  $x_{20}=-0.225$ ,  $x_{30}=1.35$ ,  $x_{40}=1.60$ 。选择平均流风速均值  $V_0$  为控制参数, 观察系统的运动状态随控制参数变化的规律。

当风速  $V_0=6.25 \text{m/s}$  时, 系统发生概周期运动, 如图 4 所示。当  $V_0=10.15 \text{m/s}$  时, 系统发生混沌运动, 如图 5 所示。

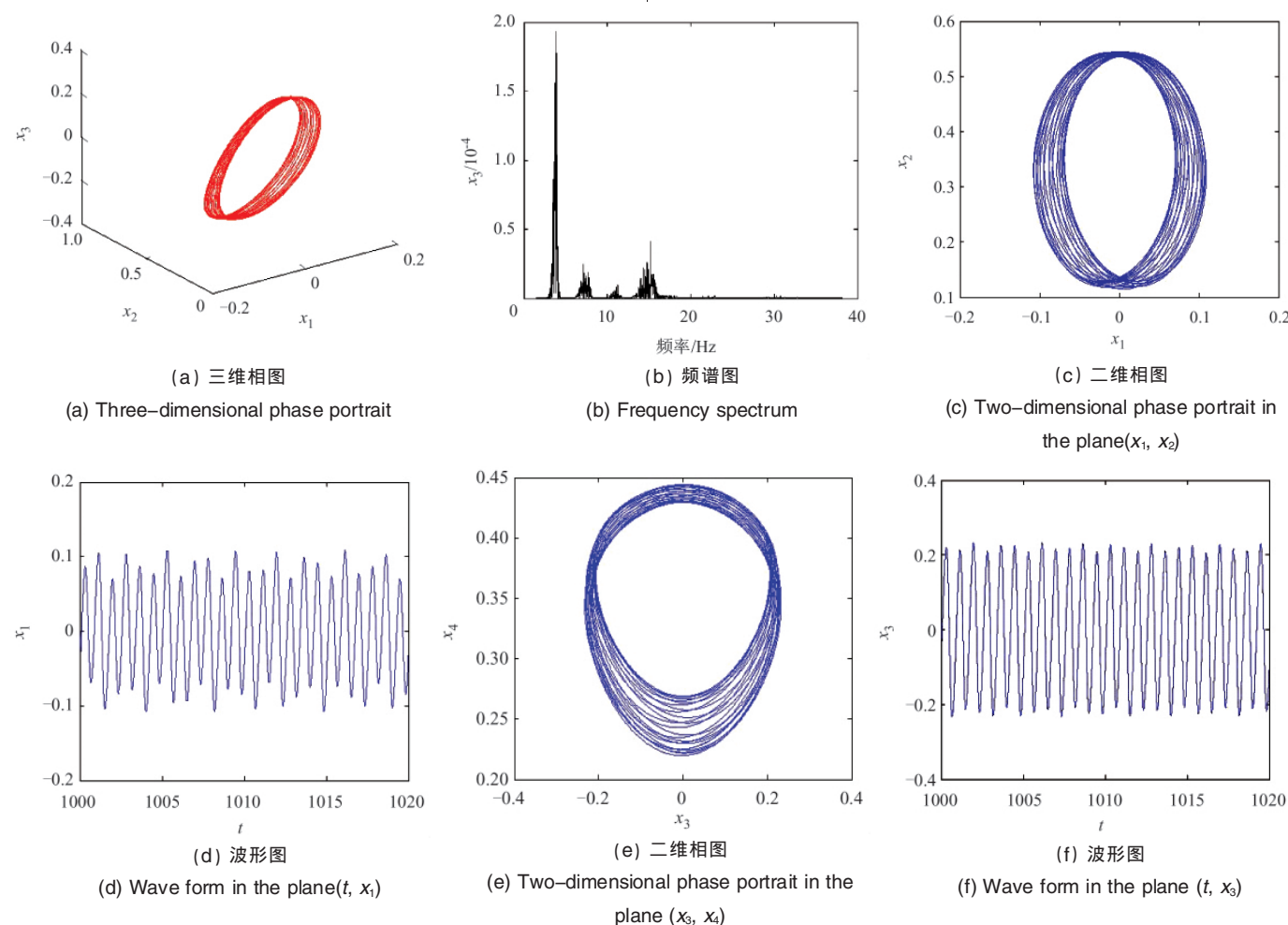


图 4 概周期运动

Fig. 4 Quasi-periodic motion of the rotating blade of HAWT

### 4 结论

本文首先将风机叶片简化为柔性旋转悬臂梁, 考虑平均风速和脉动风速对叶片的影响, 建立了二自由度风机柔性旋转叶片的非线性动力学模型。根据牛顿定律建立了系统的运动方程, 并对运动微分方程进行无量纲化, 得出系统的无量纲运动

方程。利用 Galerkin 方法将非自治系统转化为自治系统, 并用渐进摄动法对系统方程进行摄动分析, 得到了系统 1:3 内共振情况下的四维平均方程。在此基础上通过数值模拟分析了不同风速作用下旋转叶片的非线性振动。结果表明, 随着风速的增大, 系统会依次出现概周期运动和混沌运动。

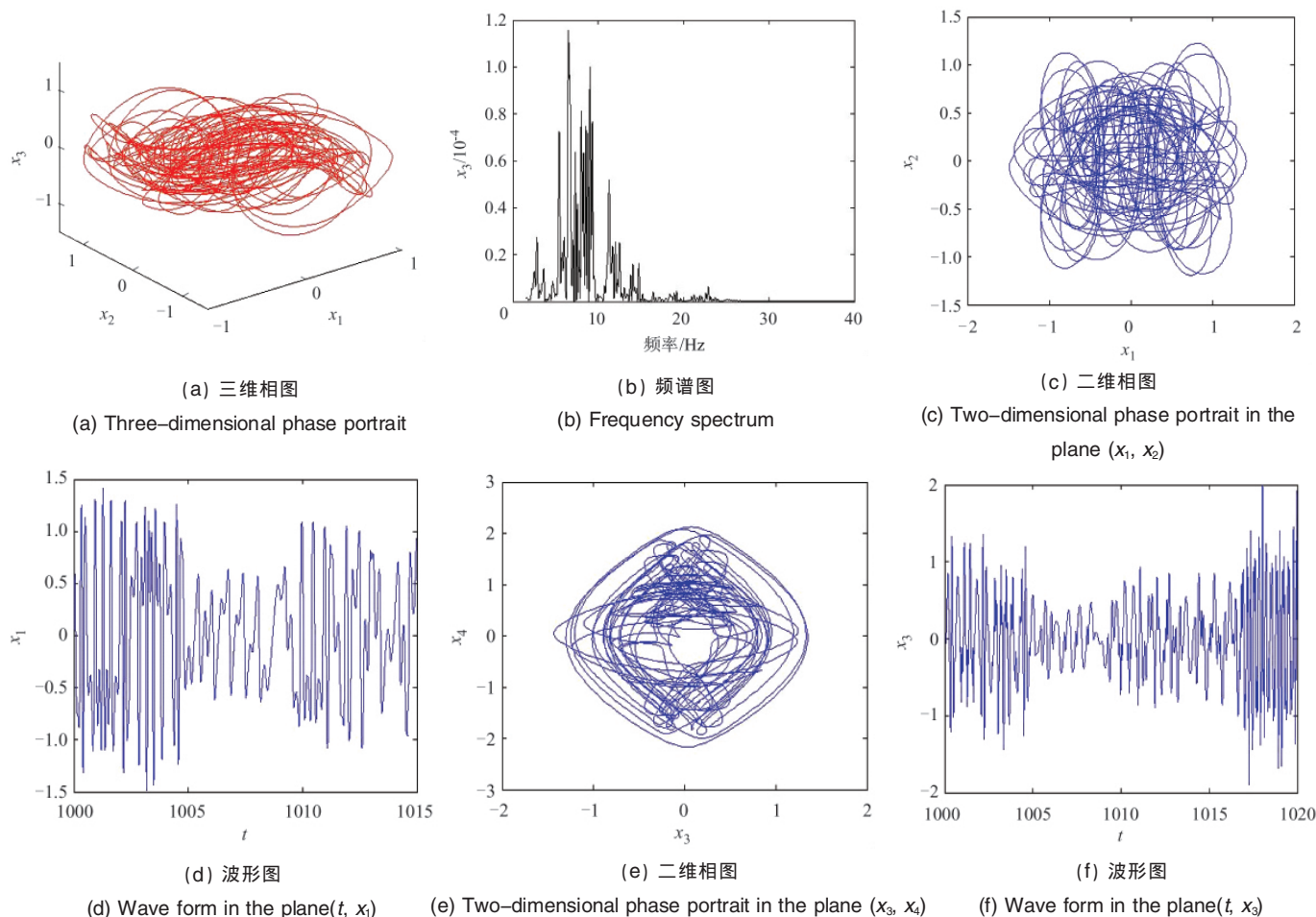


图5 混沌运动

Fig. 5 Chaotic motion of the rotating blade of HAWT

### 参考文献 (References)

- [1] Hodges D H, Dowell E H. Nonlinear equations of equilibrium for elastic bending and torsion of twisted non-uniform rotor blades[R]. NASAT ND-7818, 1974.
- [2] Rosen D H, Friedmann P. Nonlinear equations of equilibrium for elastic helicopter of wind turbine blade undergoing moderate deformation[R]. UCLA-ENG-7718, NASACR-159478, 1977.
- [3] Kaza K R V. Nonlinear aero-elastic equations of motion of twisted, non-uniform, flexible horizontal-axis wind turbine lades[R]. NASA-CR-159502, DOE/NASA/3139-1, 1979.
- [4] Wendell J H. Aero elastic stability of wind turbine rotor blade [J]. *Wind Energy Conversion X*, ASRL TR-184-16, 1978.
- [5] Miller R H, Dugundji J, Chopra D S, *et al.* Dynamics of horizontal axis wind turbines[J]. *Wind Energy Conversion III*, 1978:184-189.
- [6] Kottapalli S B R, Friedmann P P, Rosen A. Aero elastic stability and response of horizontal-axis wind turbine blades [J]. *AIAA Journal*, 1979, 17: 1381-1389
- [7] Chopra D S. Flap-Lag-Torsion flutter analysis of a constant lift rotor [R]. NASACR-152244, 1979.
- [8] Chopra D S. Nonlinear response of wind turbine rotor [J]. *Wind Energy Conversion VI*, MITASRLTR-184-12, 1978.
- [9] Oh SY, Librescu L. Effects of pretwist and presetting on coupled bending

- vibrations of rotating thin-walled composite beams[J]. *Int J Solids Struct*, 2003, 40: 1203-1224.
- [10] Larsen J W, Nielsen S R K. Nonlinear dynamics of wind turbine wings [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2006, 41: 629-634.
- [11] 黄本才. 结构抗风分析原理及应用[M]. 上海: 同济大学出版社, 2001. Huang Bencai. Analysis principle and application of wind-resistant structure[M]. Shanghai: Tongji University Press, 2001.
- [12] 王承煦, 张源. 风力发电[M]. 北京: 中国电力出版社, 2003. Wang Chengxi, Zhang Yuan. Wind-power generation[M]. Beijing: China Electric Power Press, 2003.
- [13] Nafeh A H, Mook D T. Nonlinear oscillations [M]. New York: Wiley-Interscience, 1979.
- [14] Abou-Rayana A M, Nayfeh A H, Mook D T, *et al.* Nonlinear response of a parametrically excited buckled beam[J]. *Nonlinear Dynamics*, 1993, 4: 499-525.
- [15] Zhang W, Wang F X, Zu J W. Local bifurcations and codimension-3 degenerate bifurcations of a quintic nonlinear beam under parametric excitation[J]. *Chaos Solitions and Fractals*, 2005, 24: 977-998.
- [16] Maccari A. Approximate solution of a class of nonlinear oscillators in resonance with a periodic excitation [J]. *Nonlinear Dynamics*, 1998, 15: 329-343.

(责任编辑 代丽)