

绝对值等式问题的一个求解方法

雍龙泉

陕西理工学院数学系, 陕西汉中 723001

摘要 线性规划、二次规划、双矩阵对策以及其他问题都能转化为线性互补问题, 而线性互补问题又可以归结为绝对值等式问题, 因此研究绝对值等式问题是非常有意义的。绝对值等式问题是一个 NP-hard 问题, 本文给出了绝对值等式问题的一个求解方法。在假设矩阵 A 的奇异值 (矩阵 $A^T A$ 特征值的非负平方根) 大于 1 时, 绝对值等式问题存在唯一解, 进而将绝对值等式问题转化为线性互补问题。给出了求解一般线性互补问题的混合整数线性规划解法, 数值实验表明此方法对求解绝对值等式问题十分有效。

关键词 绝对值等式问题; 线性互补问题; 混合整数线性规划

中图分类号 O221

文献标识码 A

文章编号 1000-7857(2010)05-0060-03

A New Solution Method for Absolute Value Equations

YONG Longquan

Department of Mathematics, Shaanxi University of Technology, Hanzhong 723001, Shaanxi Province, China

Abstract The absolute value equations come from linear programming, quadratic programming, bimatrix games and other problems, that can all be reduced to a linear complementarity problem, which in turn is equivalent to absolute value equations. The solution of this kind of equations is an NP-hard problem in its general form. In this paper, a new method for solving this kind of equations is presented. Firstly, the existence and uniqueness theorem of the solution to absolute value equations problem is proven under the condition that the singular values of A are greater than one. Based on the theorem, the solution is transformed into a general linear complementarity problem. Then the mixed-integer linear programming method is applied to the linear complementarity problem. At last, some numerical examples are given to indicate that the method is feasible and effective to absolute value equations problems. These results may play a key role in solving this kind of equations.

Keywords absolute value equations problem; linear complementarity problem; mixed-integer linear programming

0 引言

本文考虑的问题为:

$$Au - |u| = b \quad (1)$$

其中 $A \in R^{n \times n}$, $u, b \in R^n$, $|u|$ 表示对 u 的所有分量取绝对值, 该问题称之为绝对值等式问题 (Absolute Value Equations, AVE)。文献[1]中指出, 求解绝对值等式问题等价于求解背包问题, 因此问题(1)是一个 NP-hard 问题; 文献[2]、[3]通过将绝对值等式转化为一个凹优化进行求解, 得到了问题(1)的局部最优解; 文献[4]中给出了该问题的牛顿法; 文献[5]中把背包可行性问题转化为问题(1)进行求解, 获得了较好的数值结果。本文在假设矩阵 A 的奇异值 (矩阵 $A^T A$ 特征值的非负平方根) 大于 1 时, 获得绝对值等式问题存在唯一解, 进而将绝对值等式问题转化为线性互补问题进行求解。为此, 本

文利用混合整数线性规划求解转化后的线性互补问题。鉴于绝对值等式问题的求解是一个 NP-hard 问题, 本文方法可作为求解绝对值等式问题的一个有效算法。

1 绝对值等式化为线性互补问题

定义 1 对于 $\forall x \in R^n$, 都有 $x^T M x \geq 0$, 则称矩阵 $M \in R^{n \times n}$ 为半正定矩阵; 对于 $\forall x \in R^n$, $x \neq 0$, 都有 $x^T M x > 0$, 则称 M 为正定矩阵。

这里定义的半正定矩阵与正定矩阵不限制对称性, 因此也称为广义正定矩阵^[6]。显然, 广义正定矩阵包含对称正定矩阵。若无特别说明, 本文所涉及的正定矩阵均为广义正定矩阵。

定义 2 线性互补问题即为求解向量 $x \in R^n$, 满足 $x^T (Mx + q) = 0$, $x \geq 0$, $Mx + q \geq 0$, 简记为 $LCP(M, q)$ 。当矩阵 M 为

收稿日期: 2009-06-22

基金项目: 陕西省教育厅自然科学研究计划项目 (09JK381)

作者简介: 雍龙泉, 讲师, 研究方向为最优化理论与算法设计, 电子信箱: yonglongquan@sohu.com

半正定矩阵时,称 $LCP(M, q)$ 为单调线性互补问题。

引理 1 若矩阵 A 的特征值不等于 1, 则 $AVE \Rightarrow LCP(M, q)$ 。

证明

$$|u| = Au - b \Leftrightarrow \begin{cases} [(A+I)u-b]^T[(A-I)u-b]=0 \\ -Au+b \leq u \leq Au-b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$0 \leq [(A+I)u-b] \perp [(A-I)u-b] \geq 0$$

由已知条件可知, $(A-I)^{-1}$ 存在。令 $x=(A-I)u-b$, 即 $u=(A-I)^{-1}(x+b)$, 代入即得如下 $LCP(M, q)$:

$$x^T(Mx+q)=0, x \geq 0, Mx+q \geq 0$$

其中 $M=(A+I)(A-I)^{-1}$, $q=[(A+I)(A-I)^{-1}-I]b$ 。

引理 2 若矩阵 A 的奇异值大于 1, 则矩阵 $M=(A+I)(A-I)^{-1}$ 是一个正定矩阵。

证明 矩阵 A 的奇异值大于 1, 则 $(A-I)^{-1}$ 存在 (否则, $\exists \xi \neq 0$ 使得 $(A-I)\xi=0$, 即 $A\xi=\xi$, 这表明 1 是 A 的特征值, 从而 1 也是 A 的奇异值, 矛盾), 且 $A^T A$ 的所有特征值都大于 1, 因此对任意的 $z \neq 0$ 都有 $z^T(A^T A - I)z > 0$ 成立。而

$$\begin{aligned} z^T(A^T A - I)z > 0 &\Rightarrow z^T A^T A z + z^T A^T z - z^T A z - z^T z > 0 \Leftrightarrow \\ z^T(A^T - I)(A + I)z > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

由于 $(A-I)^{-1}$ 存在, 令 $z=(A-I)^{-1}v$ ($z \neq 0$, 故 $v \neq 0$), 代入式(2)整理得

$$v^T(A^T - I)^{-1}(A^T - I)(A + I)(A - I)^{-1}v > 0$$

即

$$v^T(A+I)(A-I)^{-1}v > 0 \quad (\forall v \neq 0)$$

这说明矩阵 $M=(A+I)(A-I)^{-1}$ 是一个正定矩阵。

定理 1 若矩阵 A 的奇异值大于 1, 则对任意的 $b \in R^n$, AVE 存在唯一解。

证明 矩阵 A 的奇异值大于 1, 故 $(A-I)^{-1}$ 存在, 利用引理 1 可知 AVE 问题可以转化为 $LCP(M, q)$ 。结合引理 2 可知, 转化后得到 $LCP(M, q)$ 的矩阵 $M=(A+I)(A-I)^{-1}$ 是一个正定矩阵, 因此这是一个单调线性互补问题。利用文献[7]中的结论可知, 对任意的 $b \in R^n$, 该线性互补问题都存在唯一解, 从而 AVE 问题存在唯一解。

下面通过求解线性互补问题而获得问题(1)的解。求解线性互补问题的算法有很多, 例如投影法、内点法、非光滑牛顿法、光滑牛顿法等^[8-10], 本文利用混合整数线性规划来求解转化后的线性互补问题。

2 混合整数线性规划法求解线性互补问题

为了求解 $LCP(M, q)$, 定义如下混合整数线性规划问题。

定义 3 对线性互补问题 $LCP(M, q)$, 考虑如下混合整数线性规划:

$$(MILP) \begin{cases} \max a \\ s. t. & 0 \leq My + aq \leq z, \\ & 0 \leq y \leq e - z, \\ & 0 \leq a \leq 1, z \in \{0, 1\}^n. \end{cases}$$

其中 $y \in R^n$, $z \in R^n$, 称 $(MILP)$ 为 $LCP(M, q)$ 问题的伴随混合整数线性规划^[11]。

引理 3 $(MILP)$ 必存在最优解 $a^* \geq 0$ 。

证明 对于 $(MILP)$, $a=y_i=z_i=0$ ($i=1, 2, \dots, n$) 定义的点 (y, z, a) 是可行的; 由于问题 $(MILP)$ 的可行域为紧集, 故 $(MILP)$ 的最优解存在, 且满足最优解 $a^* \geq 0$ 。

定理 2 $(MILP)$ 的最优解 $a^* > 0 \Leftrightarrow LCP(M, q)$ 有解, 且 $x^*=y^*/a^*$ 是其中一个解。

证明 设 $a^* > 0$, 则 $x^*=y^*/a^*$ 满足: $0 \leq a^*x_i^* \leq 1 - z_i^*$ 和 $0 \leq a^*(Mx^*+q)_i \leq z_i^*$ 。由于 $z_i^* \in \{0, 1\}$, 对于 $i=1, 2, \dots, n$, 或者有 $x_i^*=0$, 或者有 $(Mx^*+q)_i=0$ 。因此, $x^*=y^*/a^*$ 是 $LCP(M, q)$ 的一个解。

反过来, 假设 $a^*=0$, 如果 $LCP(M, q)$ 有解 x , 那么不会同时有 $x=0$ 和 $Mx+q=0$, 否则意味着 $q=0$ 。对于 $i=1, 2, \dots, n$, 令

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{若 } (Mx+q)_i > 0 \\ 0, & \text{若 } (Mx+q)_i = 0 \end{cases}, a = \min\{a_1, a_2, 1\}, y = ax$$

其中 $a_1 = \min_i \left\{ \frac{1}{x_i} : x_i > 0 \right\}$, $a_2 = \min_i \left\{ \frac{1}{(Mx+q)_i} : (Mx+q)_i > 0 \right\}$, 则 (y, z, a) 是问题 $(MILP)$ 的可行解, 这与 $a^*=0$ 矛盾。因此, 若 $LCP(M, q)$ 有解, 则必有 $a^* > 0$ 成立。

3 算例分析

用本文方法求解随机产生的算例。这里奇异值大于 1 的矩阵 A 和向量 b 由如下 Matlab 程序产生:

```
rand('state',0);
R=rand(n,n);
b=rand(n,1);
A=R'*R+n*eye(n);
qiizhi=svd(A);
M=(A+eye(n))*(inv(A-eye(n)));
q=((A+eye(n))*(inv(A-eye(n)))-eye(n))*b;
```

在给定矩阵 A 的阶数 n 后, 调用本文算法可快速得到原绝对值等式问题的解。

算例 1 取 $n=4$, 则得到如下 AVE 问题:

$$A = \begin{bmatrix} 5.5606 & 1.3090 & 1.6416 & 1.3506 \\ 1.3090 & 5.5839 & 1.3666 & 1.4722 \\ 1.6416 & 1.3666 & 5.8784 & 1.5152 \\ 1.3506 & 1.4722 & 1.5152 & 5.5904 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0.93547 \\ 0.91690 \\ 0.41027 \\ 0.89365 \end{bmatrix}$$

利用 $M=(A+I)(A-I)^{-1}$, $q=[(A+I)(A-I)^{-1}-I]b$, 将该 AVE 问题转化为 $LCP(M, q)$, 其中

$$M = \begin{bmatrix} 1.5356 & -0.0865 & -0.1289 & -0.0873 \\ -0.0865 & 1.5223 & -0.0814 & -0.1152 \\ -0.1289 & -0.0814 & 1.5084 & -0.1038 \\ -0.0873 & -0.1152 & -0.1038 & 1.5326 \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} 0.2908 \\ 0.2616 \\ -0.0794 \\ 0.2461 \end{bmatrix}$$

将线性互补问题转化为相伴的混合整数线性规划, 采用 LINDO 计算^[12]可得

$$a^*=1.000000, y^*=[0.000000, 0.000000, 0.052639, 0.000000]^T$$

这里由于 $a^* > 0$, 所以利用定理 2, 可得到相应线性互补问题的一个解为

$$x=y^*/a^*=[0.000000, 0.000000, 0.052639, 0.000000]^T$$

从而 AVE 问题的唯一解为 $u=(A-I)^{-1}(x+b)=(0.1420, 0.1287, -0.0263, 0.1203)^T$ 。

算例 2 取 $n=6$, 则得到如下 AVE 问题:

$$A = \begin{bmatrix} 8.9358 & 2.3046 & 2.8832 & 1.5353 & 0.9870 & 1.6445 \\ 2.3046 & 8.0871 & 2.0615 & 0.9165 & 0.8239 & 1.4191 \\ 2.8832 & 2.0615 & 9.3062 & 1.9610 & 0.9946 & 1.8416 \\ 1.5353 & 0.9165 & 1.9610 & 7.7561 & 0.6860 & 1.4113 \\ 0.9870 & 0.8239 & 0.9946 & 0.6860 & 6.5781 & 1.0147 \\ 1.6445 & 1.4191 & 1.8416 & 1.4113 & 1.0147 & 8.0167 \end{bmatrix}$$

$$b = [0.84622 \quad 0.52515 \quad 0.20265 \quad 0.67214 \quad 0.83812 \quad 0.01964]^T$$

利用 $M=(A+I)(A-I)^{-1}$, $q=[(A+I)(A-I)^{-1}-I]b$, 将该 AVE 问题转化为 LCP(M, q), 其中

$$M = \begin{bmatrix} 1.3143 & -0.0674 & -0.0754 & -0.0317 & -0.0228 & -0.0306 \\ -0.0674 & 1.3277 & -0.0463 & -0.0064 & -0.0212 & -0.0339 \\ -0.0754 & -0.0463 & 1.3022 & -0.0542 & -0.0200 & -0.0385 \\ -0.0317 & -0.0064 & -0.0542 & 1.3301 & -0.0169 & -0.0410 \\ -0.0228 & -0.0212 & -0.0200 & -0.0169 & 1.3780 & -0.0364 \\ -0.0306 & -0.0339 & -0.0385 & -0.0410 & -0.0364 & 1.3227 \end{bmatrix}$$

$$q = [0.1743 \quad 0.0829 \quad -0.0809 \quad 0.1657 \quad 0.2702 \quad -0.1032]^T$$

将线性互补问题转化为相伴的混合整数线性规划, 采用 LINDO 计算可得

$$a^* = 1.000000, y^* = [0.000000, 0.000000, 0.064488, 0.000000, 0.000000, 0.079899]^T$$

这里由于 $a^* > 0$, 所以利用定理 2, 可得到相应线性互补问题的一个解为

$$x = y^*/a^* = [0.000000, 0.000000, 0.064488, 0.000000, 0.000000, 0.079899]^T$$

从而 AVE 问题的唯一解为

$$u = (A-I)^{-1}(x+b) = [0.0835, 0.0386, -0.0322, 0.0795, 0.1330, -0.0399]^T$$

算例 3 取 $n=7$, 则得到如下 AVE 问题:

$$A = \begin{bmatrix} 10.1442 & 2.5217 & 2.3477 & 1.2045 & 1.9963 & 2.2573 & 2.5824 \\ 2.5217 & 10.2734 & 2.5082 & 1.5538 & 2.1902 & 2.3805 & 2.1858 \\ 2.3477 & 2.5082 & 9.8818 & 0.8244 & 1.8700 & 2.1201 & 2.2052 \\ 1.2045 & 1.5538 & 0.8244 & 8.2503 & 0.9184 & 1.1839 & 1.0400 \\ 1.9963 & 2.1902 & 1.8700 & 0.9184 & 8.9551 & 1.5308 & 1.5065 \\ 2.2573 & 2.3805 & 2.1201 & 1.1839 & 1.5308 & 9.3628 & 1.9874 \\ 2.5824 & 2.1858 & 2.2052 & 1.0400 & 1.5065 & 1.9874 & 9.3329 \end{bmatrix}$$

$$b = [0.1897 \quad 0.1934 \quad 0.6822 \quad 0.3028 \quad 0.5417 \quad 0.1509 \quad 0.6979]^T$$

利用 $M=(A+I)(A-I)^{-1}$, $q=[(A+I)(A-I)^{-1}-I]b$, 将该 AVE 问题转化为 LCP(M, q), 其中

$$M = \begin{bmatrix} 1.2680 & -0.0330 & -0.0326 & -0.0169 & -0.0325 & -0.0346 & -0.0496 \\ -0.0330 & 1.2665 & -0.0389 & -0.0318 & -0.0394 & -0.0385 & -0.0291 \\ -0.0326 & -0.0389 & 1.2686 & -0.0021 & -0.0306 & -0.0335 & -0.0370 \\ -0.0169 & -0.0318 & -0.0021 & 1.2930 & -0.0134 & -0.0213 & -0.0149 \\ -0.0325 & -0.0394 & -0.0306 & -0.0134 & 1.2860 & -0.0187 & -0.0171 \\ -0.0346 & -0.0385 & -0.0335 & -0.0213 & -0.0187 & 1.2819 & -0.0315 \\ -0.0496 & -0.0291 & -0.0370 & -0.0149 & -0.0171 & -0.0315 & 1.2853 \end{bmatrix}$$

$$q = [-0.0403 \quad -0.0383 \quad 0.1215 \quad 0.0570 \quad 0.1015 \quad -0.0329 \quad 0.1403]^T$$

采用上述方法, 计算可得到相应线性互补问题的一个解为

$$x = [0.0337, 0.0323, 0.0001, 0.0003, 0.0001, 0.0280, 0.0001]^T$$

从而 AVE 问题的唯一解为

$$u = (A-I)^{-1}(x+b) = [-0.0167, -0.0160, 0.0591, 0.0274, 0.0493, -0.0137, 0.0684]^T$$

通过将 u 带入 $|u| = Au - b$, 验证得到等式两边相等, 即 u 为原绝对值等式问题的解。进而选取 $n=9, 10, 55, 100$ 以及更大规模的例子, 计算结果表明该方法也是十分有效的。

4 结论

大量数值实验表明, 本文的算法对求解此类绝对值等式问题十分有效。鉴于绝对值等式问题的求解是一个比较难的问题, 因此本文的算法可作为求解绝对值等式问题的一个有效算法。

参考文献 (References)

- [1] Mangasarian O L, Meyer R R. Absolute value equations [J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 2006, 419(2-3): 359-367.
- [2] Mangasarian O L. Absolute value programming [J]. *Computational Optimization and Applications*, 2006, 36(1): 43-53.
- [3] Mangasarian O L. Absolute value equation solution via concave minimization[J]. *Optim Lett*, 2007, 1(1): 3-8.
- [4] Mangasarian O L. A generalized newton method for absolute value equations[J]. *Optim Lett*, 2009, 3(1): 101-108.
- [5] Mangasarian O L. Knapsack feasibility as an absolute value equation solvable by successive linear programming [J]. *Optim Lett*, 2009, 3(2): 161-170.
- [6] 佟文廷. 广义正定矩阵[J]. *数学学报*, 1984, 27(6): 801-810.
Tong Wenting. *Acta Mathematica Sinica*, 1984, 27(6): 801-810.
- [7] 寇述舜. 关于线性互补问题解的存在性[J]. *应用数学和力学*, 1995, 16 (7): 641-643.
Kou Shushun. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1995, 16 (7): 641-643.
- [8] Kojima M, Megiddo N, Yoshise A. A unified approach to interior point algorithms for linear complementary problem [C]. *Lecture Notes in Computer Science* 538. Berlin: Springer-Verlag, 1991.
- [9] Wright S J. An infeasible-interior-point algorithm for linear complementarity problems[J]. *Mathematical Programming*, 1994, 64: 29-51.
- [10] 韩继业, 修乃华, 戚厚铎. 非线性互补理论与算法 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2006.
Han Jiye, Xiu Naihua, Qi Houduo. Theory and algorithm to nonlinear complementary problem [M]. Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 2006.
- [11] Horst R, Pardalos P M. Handbook of global optimization[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [12] 谢金星. 优化建模与 LINDO/LINGO 软件[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
Xie Jinxing. Optimization, modeling and LINDO/LINGO software [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005.

(责任编辑 代丽)