

发现一种动物形三元数集

杨冠平

武警郑州指挥学院, 郑州 451450

摘要 用三元数方法研究三维分形结构, 先定义一种三元数及其运算规则, 然后参照 Mandelbrot 集取集方式定义一种三元数集。用计算机软件以尽可能高的精度对该无穷数集采样取集, 按三维点集生成几何外观视图。对整体和重点部位多角度视图的观察分析发现, 该数集是一种动物形分形体。三维外观酷似动物, 有合乎常理的头、尾、背、腹、鳍和四肢; 面部五官具体, 一双小眼睛也有眼球、眼窝、眼帘构造; 身旁带有与自身相似的子体, 子体身旁又带有下一代子体, 这种代代相传的相似与几何相似不同, 倒与生物遗传相似可比且相仿。数集细微结构多样无尽, 局部更高采样密度的点集成像会看到更精细的结构。其复杂形态却是由简单规则生成的, 复数分形这一令人费解的特点进而又有三维表现。数集形体存在于欧氏空间原点附近线尺度约为 2.3 的范围内, 其自然特性和细节由文中所附的整体、头部、子体、眼部等多视角图像反映。

关键词 三维分形; Mandelbrot 集; 三元数集; 自相似性; 动物形分形体

中图分类号 O189.12

文献标识码 A

文章编号 1000-7857(2010)03-0019-05

A Zoomorphic Set of Ternary Complex Numbers

YANG Guanping

Zhengzhou Armed Police College, Zhengzhou 451450, China

Abstract This paper studies 3D fractal geometry by using the method of the ternary complex number. Based on the definition of the ternary complex numbers and their operation rules, an infinite set of ternary complex numbers is defined according to the rule of Mandelbrot set. Some sample sets are extracted from the set with as high precision as possible, to portray exterior images under the control of the computer software. With observation and analysis, it is shown that its 3D geometric solid is in a shape of an animal. Almost every part of it seems rational, such as the head, tail, back, abdomen and four limbs. Its facial features are idiographic, with eyes equipped by eyeball, eyehole and eyelid. The whole body has some similar subsets around, and each of these subsets itself also has similar subsets around. This similarity differs from the geometrical similarity, but resembles the similarity of biologic heredity. If one increases the density of sample points, more accurate complicated structures can be seen. The zoomorphic fractal solid is located near the origin in Euclid space, its lineal measure is about 2.3. All these natural peculiarities and the details can be seen from the figures.

Keywords 3D fractal; Mandelbrot set; set of ternary complex numbers; self similarity; zoomorphic fractal solid

分形几何中 Mandelbrot 集^[1](简称 M 集)表现出一些经典数学无法解释的现象, 如简单规则生成复杂形、局部与整体相似、具有多样无尽的精细结构等。但由于 M 集是二元复数集, 这些表现只局限在二维复平面内。人们希望接着发现三维分形集, 已经对一般方法有了研究^[2-4]。但由于先遇到的三元数集还没有表现出超越二维复数集的新特性, 容易认为三元数分形集信息量比较少^[5], 往往比较单调, 结构形状取决于相应复平面上分形集的形状。其实这是探索初期对三元数方

法的低估判断, 三元数集不仅会带有二元复数集的一般特性, 而且还会具有三维以上空间才能反映出来的更丰富特性。这里举荐一种三元数集, 有奇妙的三维分形体, 在分形自相似性的表现上更自然真实, 并且展现一新奇现象: 三元数集的三维几何外观竟然酷似动物。

1 数集定义

三元数由 3 个实数构成, 是二元复数的拓展, 与三元向

收稿日期: 2009-09-21

作者简介: 杨冠平, 教授, 研究方向为分形几何、数理逻辑、计算机图形学, 电子信箱: yangguanping@msn.com

量成分类似。

定义 1 由三实数 (x, y, z) 和三基向量 (i, j, k) 按形式 $t = xi + yj + zk$ 构成三元数 t , 其加法运算遵循向量加法规则, 乘法运算满足分配律; 分量与基向量的乘法满足交换律、结合律、分配律, 基向量间的乘法遵循以下简并规则:

$$ii=i \quad jj=j \quad kk=k \quad ij=ji=-k \quad ik=ki=-j \quad jk=kj=-i$$

若用三分量作三维空间坐标值, 三元数能与欧几里得空间的点一一对应, 三元数集能与三维点集一一对应。所以三元数集有确定的三维形体, 可用描绘点集形状的办法绘出三元数集的外形。

定义 2 三元数集 T 是所有迭代运算 $f_n = f_{n-1}^2 + t$ ($f_0 = 0$) 模值有界的三元数 t 组成的集合, 即

$$T = \{t: |f_n| = |f_{n-1}^2 + t| < r \quad (f_0 = 0, r \in N, n \rightarrow \infty)\}$$

模值有界指存在定值 $r \in N$, 使迭代运算后的三元数模值 $|f_n| = (x_n^2 + y_n^2 + z_n^2)^{1/2}$ 均小于 r 。则判定 T 元素的过程是:

对三元数 t , 若经 $f_n = f_{n-1}^2 + t$ 迭代运算, 无论 $n \in N$ 取何值, 总有模值 $|f_n| < r$, 则 $t \in T$ 。

定义给出一个三元数集, 也确定了一个与数集对应的三维点集, 以及由点集形成的三维几何体。

2 样集取法

因为实数是一维连续的且三元数由三实数三维构成, 所以三元数是三维连续的。这使得每一个很小的区域内就有无穷多的三元数, T 是无穷数集。那么, 对所有三元数都进行运算判定不是人工和计算机所能为的, 实际操作永远得不到全集, 只能抽取和显示 T 的样集。但是运用现代计算机, 只要取足够的样点密度和样点总数, 同样可以得到足够清晰的样集形体细节。一般来说, 样点密度越大, 样集精度就越高, 若区域相同则样点数就会越多; 样点数越多, 形象就越完整, 然而会耗用更多的计算机内存和时间。所以在有限的计算机资源下, 必须平衡样点密度和样点总数, 既能满足精度要求, 又使计算机能够完成计算。

另一方面, 判定集合元素的过程原本也非有限过程, 可是计算机能胜任的仅是在有限步内能结束的工作。要使程序取集能行, 必须对无限过程作有限处理, 这就得选择两个合适有限值分别作最高迭代次数和模值上界。由于绝对值大于 1 的实数平方递归运算下去必然趋于无穷, 且此时二次项值总比一次项值大, 而绝对值小于 1 的实数平方递归运算下去必然趋于零, 所以模值上界不必很大, 容易取定。而迭代运算虽然次数越多, 数集就越精准, 但达到一定程度后再提高迭代次数已不能使形体精准度产生明显效果, 所以可用试验法找到合适的最高迭代次数。

样集可以这样生成, 根据现有计算机性能抽取尽量多的样点, 选择足够高的迭代次数和合适的模值上界, 对样点三元数进行迭代运算达到最高次数, 若模值始终没有达到或超过模值上界, 就取作 T 的元素, 否则排除之外。用此法提取样集须要预先选定好 5 个样集参数: 样点总数、最高迭代次数、

模值上界、样点间距和样本空间位置。本文例图样集均是用定值 1440³ 作样点总数, 用 16384 作最高迭代次数, 用 4 做模值上界进行三维均匀采样的。另外两参数分别根据具体情况而定。

3 整体形态

计算机点集成像软件可以把点集的三维外观形象描绘出来。本文图像由“三维 Mandelbrot 体展示软件”(中国计算机软件著作权登记: 2004SR08645) 生成。生成时需要预置 2 个图像参数: 色彩和观察角度。色彩参数可以统一确定, 这里用黄色描绘数集 T 的形象, 蓝色做背景表示集外空间。观察角度应根据实际需求而定, 认识三维形体须要对比分析足够多的来自不同观察角度的图像, 才能辨出形体特征。

数集 T 的整体侧面形象参见图 1。可以看出, 形体不像一般的数学体, 明显有头、尾、背、腹、前肢、后足, 且都长在寻常位置。身体分前后两部分, 前背和后脊上都长有鳍, 头上还有冠, 冠和鳍都呈 M 集形状, 反映出 T 与复数 M 集联系紧密。不过这里冠和鳍有一定厚度, 是三维结构。在身体的外围还能看到许多大大小小的星星块块, 那些也是 T 的组成部分, 已证实鼻尖和足尖方向上的小块是数集 T 的相似子体, 宛如母体身边带着一群幼仔。

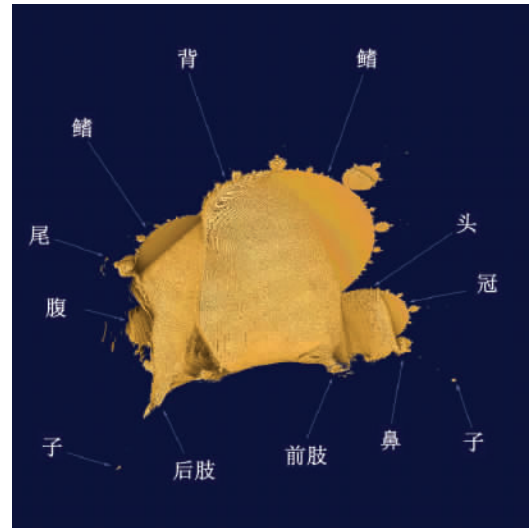


图 1 整体侧面外观像

Fig. 1 Lateral view of the whole body

注: 样集的样点间距为 0.0019, 样本空间中心位置为 $(-0.382, -0.382, -0.382)$

Notes: The sample point interval is 0.0019, the centre of the sample space is positioned at $(-0.382, -0.382, -0.382)$

改变观察角度, 由多视角形象才能更全面地了解。图 2 显示了 T 整体另外 6 个观察角度的形象。可以看到, 它丰满的身体低伸着龟一样头(图 2(a)、(c)); 脖颈由外到里渐渐变细, 似显露着喉管(图 2(b)、(d)); 宽厚的背部左右对称, 背甲表面光滑流线形(图 2(a)、(c)); 背鳍和头冠很薄, 排列在身

体对称面上。前背鳍高高耸起,纵向看酷似塔尖(图 2(e)、(f));腹部不再光滑,表皮有规则地起皱(图 2(b)、(d));位于尾下两腿间的后腹看起来有点像昆虫类腹部(图 2(d)、(e));两腿粗壮而两足小巧,前肢向前伸到脸前(图 2(a)、(b)、(f));肩部呈现的皱纹像是向前伸前臂的结果(图 2(a)、(f));尾巴扁尖团状,像是无毛鸟尾(图 2(b)、(c)、(e));尾后还有些特殊的条块无法与地球动物部件比照,却显出喷气飞行的架势(图 2(a)~(d))。

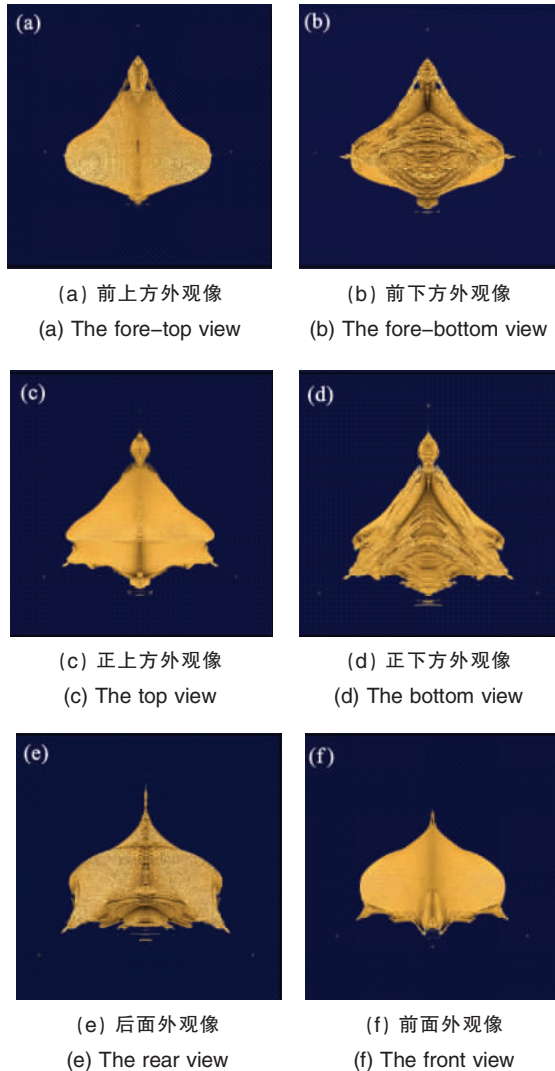


图 2 整体 6 视向外观像

Fig. 2 Six directions views of the whole body

注:样集的样点间距为 0.0019,样本空间中心位置在
(-0.382, -0.382, -0.382)

Notes: The sample point interval is 0.0019, the centre of the sample space is positioned at (-0.382, -0.382, -0.382)

4 头部细节

头部通常是动物重要部位,需要看清它的细节并不困难,只要将样本空间限定在头部区域,缩小样点间距,即可得

到更高精度的头部样集和更清晰的头部图像。当样点间距缩小为原值的 $1/n$,样集的精度大约能提高到原来的 n 倍。但由于此时只对局部空间采样,整体其他部分就不会显示出来。由图 3 可见,头像的精度约比图 2 整体像提高 3 倍,一些细节就看得清楚了。伸向脸前的前肢有节,似乎还有手掌和手指,见图 3(a)~(c)。手掌触连着脸颊,见图 3(d)。陌生的面部两侧各有一个像耳孔样的孔洞,见图 3(b)、(d)。仔细看还能看到脸上长着一只小眼,见图 3(c),由于头部是对称的,可断定另一侧还有一只眼。不但鳍和冠,就连鼻尖也呈 M 集形,见图 3(c)。两手之间还捧着不寻常的离散块块,见图 3(b)~(d)。综合看像是张着嘴比划着什么手势。

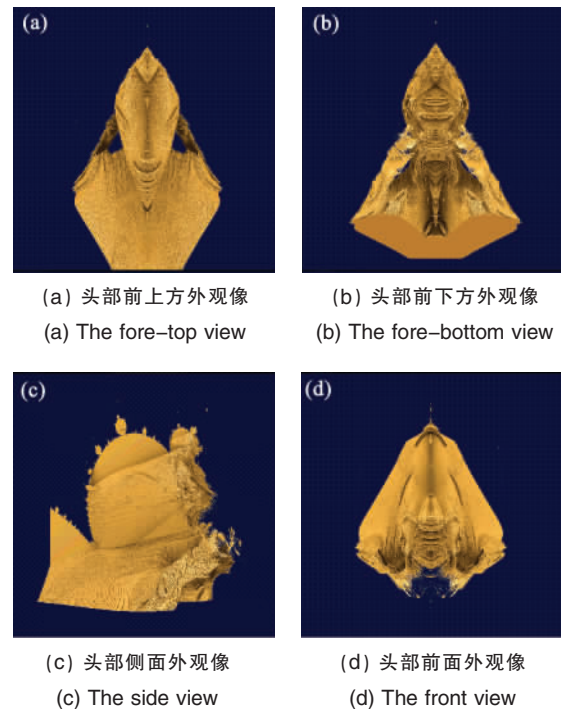


图 3 头部 4 视向外观像

Fig. 3 Four direction views of the head

注:样集的样点间距为 0.0006,样本空间中心位置在
(-0.056, -0.056, -1.150)

Notes: The sample point interval is 0.0006, the centre of the sample space is positioned at (-0.056, -0.056, -1.150)

为看清眼部,专门采集更精细的眼部子集,见图 4。可以看出,显然像是眼窝里有眼球,旁边突出的部分是保护眼球的眼帘。查看剖面图得知,眼球底部是球状的,眼窝和眼球的间隙也完整,使人相信眼球可以在眼窝中自由转动。

5 子体相似

分形体存在局部形态与整体形态相似的现象,分形几何称之为自相似性。这种特性在数集 T 中以新的形式表现出来,既不是 M 集的二维现象也不是人为创作的分形相似,它表现的是自然真实的三维自相似性。虽然低分辨率图像中无

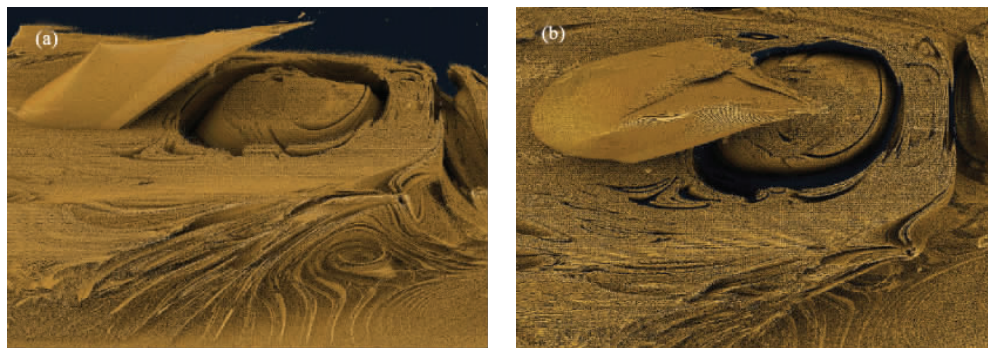


图 4 眼部 2 视向外观像

Fig. 4 Two direction views of the eye

注:样点间距为 0.00005,样本空间中心位置在 $(-0.1734, -0.0074, -1.1712)$

Notes: The sample point interval is 0.00005, the centre of the sample space is positioned at $(-0.1734, -0.0074, -1.1712)$

数的相似子集多看不见,但整体图中可见若干自相似小块。图 5 就是这些小块更精细样集的图像。分别将图 5(a)与图 2(c)、图 5(b)与图 2(b)、图 5(c)与图 2(a)、图 5(d)与图 2(e)进行对比,会确认三维相似性实在无疑。虽说子体已有形态变化,并非严格相似,可子体明显还保留着母体的形体结构。

数集 T 的自相似形也包含深层相似,即相似子体还带有自己的下一代相似子体。从图 5 可以看出,子体身边都有下一代小块。图 5(a)~(c)所示是子辈相似体,图 5(d)则是孙辈的。只要样点间距足够精细,更小的下一代相似体还能显现出来。这里 4 世、5 世甚至更多世同堂成为自然属性。

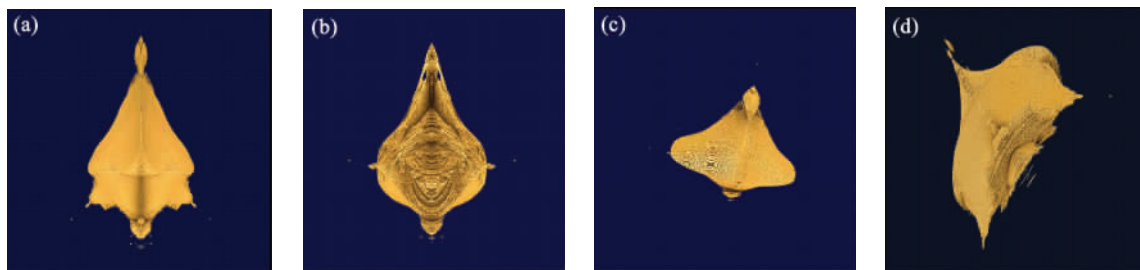


图 5 三相似子集四视向外观像

Fig. 5 Four direction views of its three subset

注:(a)、(b)图为图 1 鼻尖指向上较大块的更精细样集的正上方和前下方外观像,样点间距为 0.00003,样本空间中心位置 $(0, 0, -1.6256)$, (c)图为图 1 足尖指向上较大块的更精细样集的前上方外观像,样点间距为 0.00003,样本空间中心位置 $(-1.6256, 0, 0)$; (d)图为(a)图子体足尖指向上较大块的更精细样集的后面外观像,样点间距为 0.0000002,样本空间中心位置在 $(-0.0058369, -0.0013040, -1.6254636)$

Notes: Figures (a) and (b) are from the same subset which is the biggest block of Fig. 1 in the nose tip direction, their sample point interval is 0.00003, the centre of the sample space is positioned at $(0, 0, -1.6256)$. Figure (a) is the top view of it, and Figure (b) is the fore-bottom view of it. Figure (c) is the fore-top view of the biggest block of Fig. 1 in the toe direction, the sample point interval is 0.00003, the centre of sample space is positioned at $(-1.6256, 0, 0)$. Figure (d) is the rear view of the biggest block of Figure (a) in the toe direction, the sample point interval is 0.0000002, the centre of sample space is positioned at $(-0.0058369, -0.0013040, -1.6254636)$

6 结构精细

数集 T 的线度尺寸与图 5(a)、(c)两子集的距离大致相当,可以根据两子集空间位置计算出来,约为 2.3。表明数集 T 存在于约 2.3^3 的有限空间中。同时各部位的相对大小也可以通过样点间距的比例估算出,这是因为各子集样点总数相同,又都刚好取到完整图像。根据附图参数列出如下比例式能反映整体与局部的相对尺寸:整体:头部:眼部:图 5(a)子体:图 5(d)孙体=19000:6000:500:300:2。

实数的连续性决定了三元数有无限精度,使得数集 T 有无限精细结构。而且精细程度的发展没有止境,细微深处的

复杂性会超出常人的想象。图 6 是聚焦 T 腹下一根毛须,精细度提高近万倍时,配上醒目的颜色所得到的剖面图。俨然一个四臂旋涡。如果对旋涡中心一直放大下去,会有尺寸递减的相似形无止境的从极点处涌出。旋臂上每个相似单元还有自己的旋涡中心,这种结构在宇宙中似曾相识。

7 结论

根据所采样集的样本空间位置、样点间距和样点总数能够确定,数集 T 的三维点集存在于欧几里得空间原点附近一个有限的范围内,约以 $(-0.382, -0.382, -0.382)$ 为中心,线尺

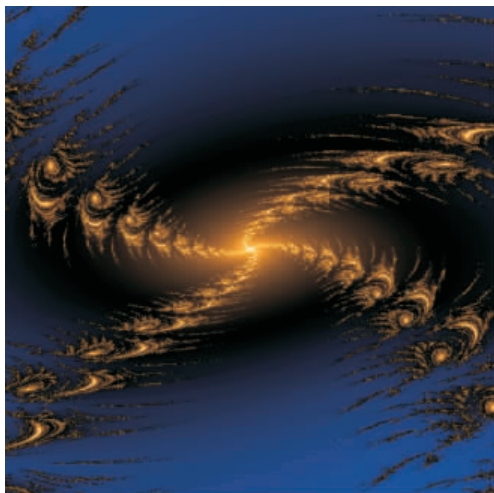


图6 数集 T 体表局部剖面

Fig. 6 A local section image on the surface of T

注:样集的样点间距为 0.0000002

Notes: The sample point interval is 0.0000002

度约为 2.3 的三维空间中;形体朝向也很明确,鼻尖指向 z 轴负方向,两足尖分别指向 x 轴和 y 轴负方向。

从三维结构上能直观看出,数集 T 的几何外观具有四足动物样,虽然与地球动物比显得怪异,可从头、尾、背、腹、鳍、四肢的外形和比例看,甚至从面部器官看似都合乎常理。此例反映出三元数集形态的似物性,且有似动物形的。又印证了分形几何是大自然的几何学的说法。

数集 T 的自相似性很明显,在母体身旁带有相似子体,子体身旁还带有下一代相似子体,子体与母体相似既不是初等几何的相似也不是严格的分形相似,子体形态会发生一些变异但仍是一眼能看得出来的相似。这种相似是代代相传,是大致相似却不完全相似,倒与生物遗传相似可比且相仿。这里自相似性反映的是三维现象,已经比 M 集中二维现象更进一步。

数集 T 的三维形体仍然具有无限的精细结构,图 6 只是展现了样点间距为 0.0000002 的局部形象,如果计算机性能可以满足,就可以将样点间距调得更小些,样点总数取得更多些,就能表现出更清晰更具体的细节。然而不可否认,它的细节是无穷的,凭有限的时间和工具永远也探索不尽。

数集 T 的复杂形也是由简单规则生成的,已经知道它随着三元数及其数集定义的改变而改变,随着迭代函数式的改变而改变。但还不知道定义中的诸因素是怎样影响到形体局部的。虽然根据函数生成数集和图像容易做到,但根据形象和数集找到对应的函数却非常难。

三元数集的生成过程表明,三元数方法简捷,行之有效,能直接确定三维空间中数集的几何形象,可以探求到复杂美妙的三维分形体,并可普遍应用于各种数集分形结构的研究和探索。

动物形数集是数学运算得出来的结果,是必然现象。形体是具体的,客观实在的。但是还无法理解一个三元数集居

然能有动物形象。若简单地把如此程度的似物现象归因为偶然性或随机事件难以令人信服,可要圆满解释这种现象还有很多工作要做。

参考文献 (References)

- [1] Mandelbrot B B. The fractal geometry of nature [M]. New York: W H Freeman & Co, 1982: 188-190.
- [2] 柳朝阳. 3D Julia 集和 Mandelbrot 集的生成模型 [J]. 河南科学, 1995, 13(2): 99-103.
Liu Caoyang. *Henan Science*, 1995, 13(2): 99-103.
- [3] 钱晓凡, 李茂材. 在四维空间中构造 Julia 集和 Mandelbrot 集 [J]. 昆明理工大学学报, 2000, 25(3): 107-110.
Qian Xiaofan, Li Maocai. *Journal of Kunming University of Science and Technology*, 2000, 25(3): 107-110.
- [4] 程锦, 谭建荣. 基于三元数的三维广义 M 集表示及其绘制算法 [J]. 计算机学报, 2004, 27(6): 729-735.
Cheng Jin, Tan Jianrong. *Chinese Journal of Computers*, 2004, 27(6): 729-735.
- [5] 程锦, 谭建荣. 基于三维多项式映射的广义 Julia 集表示与绘制 [J]. 软件学报, 2006, 17(7): 1561-1563.
Cheng Jin, Tan Jianrong. *Chinese Journal of Software*, 2006, 17(7): 1561-1563.

(责任编辑 朱宇)

本期推理小游戏答案

每个人都恰好有 3 个擅长科目。因此,根据 1 和 2,张山擅长下列四组科目中的一组:

英语,物理,历史

英语,物理,化学

物理,历史,化学

历史,数学,化学

根据 1 和 3,李斯擅长下列四组科目中的一组:

英语,数学,物理

数学,物理,历史

数学,物理,化学

物理,历史,化学

根据 1 和 4,王武擅长下列四组科目中的一组:

物理,历史,数学

物理,历史,化学

历史,数学,化学

数学,英语,化学

根据上面的科目组合和 1,如果张山擅长化学,那么李斯和王武都擅长数学和物理,张山就不能擅长数学或物理。这种情况不可能,因此张山不擅长化学。

根据上面的科目组合和 1,如果李斯擅长化学,那么张山和王武都擅长物理,李斯就不擅长物理。这种情况不可能,因此李斯不擅长化学。

于是,王武必定是擅长化学的人了。

我们还可以看出其中一人的全部 3 个擅长科目,以及另外两个人各擅长的两个科目。由于王武擅长化学,所以张山擅长英语、物理和历史;李斯是擅长物理和数学;从而王武不删除物理,所以王武是擅长数学和化学的人。