

具有缩影 W_8 和 W_9 的图式流形

卢建立, 王 军

河南师范大学数学与信息科学学院, 河南新乡 453007

摘要 图式流形是将简单无向图中的所有边用管取代、所有顶点用圆周替换而得到的一种新管型曲面。这些管型曲面即是图式流形, 而简单无向图则称为相应图式流形的缩影。若图式流形的圆周采取不同的覆盖映射, 则可得到不同的图式流形。这些图式流形有无限多个, 而计算所有这些图式流形同胚分类的个数, 并给每一种同胚类型指定一个图式流形的代表, 即为图式流形的拓扑分类问题。本文从图染色理论出发, 对收缩为 n 个顶点的轮图 W_n 进行了研究, 探讨收缩为 W_n 的图式流形同胚等价类的个数, 以及所有互不同构的着色构成代表系需要满足的条件。利用图论中的边染色理论结合扭转运算, 在同胚的意义下得到并绘出了具有收缩 W_8 、 W_9 的图式流形的代表图形, 它们分别只有 18 和 30 个。

关键词 图式流形; n -单形; 1-骨架; 同胚类

中图分类号 O157.5

文献标识码 A

文章编号 1000-7857(2010)01-0059-04

Graphlike Manifolds with Contraction W_8 and W_9

LU Jianli, WANG Jun

College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, Henan Province, China

Abstract Consider an undirected simple connected graph, in which each vertex is replaced by a manifold (a pipe) and each edge is replaced by the Cartesian product of this manifold (a circular section). The topological space obtained in this way is called a graphlike manifold. The undirected simple graph is called the contraction of graphlike manifolds correspondingly. If the circular sections of graphlike manifolds have different maps, we will have different graphlike manifolds. There are infinite graphlike manifolds, and the number of homeomorphic classes is also hard to count, nearly infinity. The problem of counting the numbers of homeomorphics classes of graphlike manifolds, and give each homeomorphics classes a representative graphlike manifold, is just the case for the topological classification of graphlike manifolds. This paper discusses the topological classification of graphlike manifolds with the contraction of W_n and the number of homeomorphic classes of graphlike manifolds of W_n . A representative system is formed by all non-isomorphic colorings, and the necessary cases are counted. According to the graph colouring theory and twist operation, the homeomorphic classes of graphlike manifolds W_8 and W_9 are found to be 18 and 30, respectively.

Keywords graphlike manifold; n -simplex; 1-skeleton; homeomorphic classification

0 引言

文献[1]提出图式流形的概念; 文献[2]、[3]将如何求 $M(G)$ 的同胚等价类问题转化为一类简单无向图的二边着色计数问题; 文献[4]给出了 K_8 和 K_9 图式流形拓扑分类的下界; 文献[5]研究了正则图的染色问题。目前对轮图(由 $n-1$ 个顶点的圈和 1 个中心点构成的图 W_n , 中心点与圈上的点都邻接)的研究, 文献[2]、[3]给出了 W_6 、 W_7 拓扑分类的个数。本文从图染色理论出发, 探讨收缩为 W_n 的图式流形同胚等价类的个数, 以及所有互不同构的着色构成代表系需要满足的条件。利用

图论中的边染色理论结合扭转运算, 在同胚的意义下得到并绘出了具有收缩 W_8 、 W_9 的图式流形的代表图形, 它们分别只有 18 和 30 个。

1 相关概念

设 K_n 为 $(n-1)$ 维单形的一维骨架^[1], G_n 为以 K_n 为缩影的图式流形集合。对 $(n-1)$ 维单形的一维骨架样图式流形可以进行以下构造: 将 K_n 的每一个顶点 u 换成一个圆周 S^1 , 每一条边 e 换成一根圆管 $L=S^1 \times [0, 1]$, 其中 $S^1 \times \{0\}$ 表示圆管的一个

收稿日期: 2009-08-04

基金项目: 河南省杰出青年计划项目(084100510013)

作者简介: 卢建立, 副教授, 研究方向为图论及其应用、离散数学等, 电子信箱: lujianli@henannu.edu.cn

边界, $S^1 \times \{1\}$ 表示圆管的另一个边界; 如果顶点 u 与边 e 关联, 则将圆周 S^1 与圆管 $L = S^1 \times [0, 1]$ 黏结, 这样就得到了一个拓扑空间, 称这样的拓扑空间为 $(n-1)$ 维单形的一维骨架样图式流形, 记为 $M(K_n)$ 。

简单无向图的二边着色是指边集 E 的一个划分 $\delta = (E_1, E_2)$, 并且约定 E_1 边为负边, 染成黑色; E_2 边为正边, 染成白色。这样一来, 图 G 的一个图式流形同胚等价类问题就转化成图的二边着色 δ 计数问题, 用 $E_1(\delta)$ 表示关于着色 δ 的黑边集。

定义 1 设 $\Gamma(G)$ 为图 G 的自同构群, 两种着色 δ 与 δ' 称为是同构的, 记为 $\delta \cong \delta'$, 如果存在一个自同构 $\psi \in \Gamma(G)$, 使得 $(w, u) \in E_1(\delta)$ 的充分必要条件是

$$(\psi(w), \psi(u)) \in E_1(\delta')$$

定义 2 着色 δ 与 δ' 的积 $\delta * \delta'$ 定义为 $E_1(\delta * \delta') = E_1(\delta) \Delta E_1(\delta')$, 其中, Δ 表示集合的环和运算。

设 Σ 为图 G 的所有二边着色构成的集合, 在环和运算下构成 Abel 群, 记为 $A(G) = (\Sigma, *)$; 一切以边割集 (含空集) 为黑边集的着色构成的子群记为 $T(G) = \{\delta \in A(G) \mid \text{存在 } V_0 \subseteq V \text{ 使得 } E_1(\delta) = [V_0, \bar{V}_0]\}$ 。

引理 1 着色 δ 可以通过一系列扭转变换转化为 δ' , 当且仅当 $\delta * \delta' \in T(G)^{[2]}$ 。

定义 3 如果存在 $\beta \in T(G)$, 以及自同构 $\psi \in \Gamma(G)$ 使得 $\psi(\beta * \delta) = \delta'$, 则两种着色 δ 与 δ' 称为是 H 等价的 (记为 $\delta \sim \delta'$)。

定义 4 如果 Σ 的子集 R 与每一个 H -等价类均有非空的交集, 则称 R 为代表系; 如果 Σ 的子集 T 既是代表系, 又是独立系, 则称 T 为横贯。

2 主要结果

由此, 可以得出以下 4 个定理。

定理 1 设 R 是 Σ 中所有互不同构的着色构成的子集, 若对任意的 $\delta \in R$, 都有: 对任意的顶点子集 $V_0 \subseteq V$, 边割集 $[V_0, \bar{V}_0]$ 中的黑边数 $\leq$ 白边数, 则 R 构成一个代表系。

证明 设 R 是满足上述条件的所有互不同构的着色构成的集合, 想证明 R 是图 G 的所有二边着色构成的集合的代表系, 即证明 R 与每一个 H 等价类都有非空的交集, 亦即对于每一个着色 δ_0 , 且 $\delta_0 \notin R$, 都能够找到一个着色 δ , 且 $\delta \in R$, 使得 δ_0 与 δ 是 H 等价的。这样就证明了 δ_0 与 δ 属于同一个 H 等价类。因此, δ 属于 R 与 δ_0 所在的 H 等价类的交集, 故这个交集非空, 又由 δ_0 的任意性可知, R 就是一个代表系。

事实上, 对任意的染色 δ_0 , 若 $\delta_0 \notin R$, 则 δ_0 不满足条件, 所以存在顶点子集 V_0 , 使得 $E_0 = [V_0, \bar{V}_0]$ 中 δ_0 的黑边数 $>$ 白边数。令 β_0 是将 E_0 的边全染黑, 其余边全染白的染色, 则 $\beta_0 * \delta_0 = \delta_1$, 因此 δ_1 和 δ_0 是 H 等价的, 并且 δ_1 中的黑边数 $<$ δ_0 中的黑边数。再对 δ_1 进行如上讨论可知, 有 $\beta_1 * \delta_1 = \delta_2$, δ_2 和 δ_1 是 H 等价的, 而且 δ_2 中的黑边数 $<$ δ_1 中的黑边数。如此下去, 由于 $|E_0(\delta_0)| > |E_1(\delta_1)| > |E_2(\delta_2)| > \dots$, 总能找到一个着色 $\delta_i \in R$, 且 δ_i 和 δ_0 是 H 等价的。所以 R 就是一个代表系。证毕。

轮图 W_n 圈上的边记为圈边, 与中心点关联的边记为辐条。

定理 2 轮图 W_n 的任一图式流形在扭转变换意义下可以满足如下 3 点:

- 1) 圈上的黑边数 ≤ 1 ;
- 2) 圈上任一顶点关联的黑边数 ≤ 1 ;
- 3) 辐条中黑边数 $\leq \frac{n-1}{2}$ (当 n 为奇数, 且圈上黑边数为

1 时, 辐条中黑边数 $< \frac{n-1}{2}$)。

证明 1) 分两种情形证明。

情形 1 若圈上有偶数条黑边, 则可以通过扭转变换, 使圈上黑边数为 0, 再分两种情况: ① 如果圈上的偶数条黑边全都相邻, 则扭转黑边链条上的第 2 个结点, 使得圈上的黑边数减少 2。按照上述方法循环进行。由于圈上原来有偶数条黑边, 每次减少 2 条, 最终圈上黑边数必为 0; ② 如果圈上的偶数条黑边有不相邻的, 则可以通过扭转变换使其相邻, 进而就问题转化为情况 (a)。

情形 2 若圈上有奇数条黑边, 则可以仿照偶数条的情况进行扭转变换, 最终圈上黑边数只剩下 1 条。

2) 如果圈上有一顶点关联的黑边数 > 1 , 则由于圈上的点均为 3 度点, 又由定理 2 中的 (1) 知道圈上的黑边数 ≤ 1 , 所以该点关联的黑边只能有两条, 而且必为相邻的一圈边和一根辐条, 因此扭转该点, 使得该辐条变为白边, 而圈上的黑边数也不增减, 该点关联的黑边数减少为 1。

3) 分两种情形证明。

情形 1 圈上黑边数为 0。因为辐条共有 $n-1$ 条, 如果黑边数 $\leq$ 白边数, 则黑边数 $\leq \frac{n-1}{2}$; 如果黑边数 $>$ 白边数, 可扭转中心点使得黑、白边互变, 因此黑边数 $\leq \frac{n-1}{2}$ 。

情形 2 圈上黑边数为 1。因为定理 2 中的 (1)、(2) 已得到证明, 设 (v_1, v_{n-1}) 是圈上的黑边, 则由 (2) 易知 (v_0, v_1) 和 (v_0, v_{n-1}) 均为白边。取 $V_0 = \{v_0, v_1\}$, $\bar{V}_0 = \{v_2, v_3, \dots, v_{n-1}\}$ (其中, v_0 为中心点, $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ 为圈上的点), 那么 V_0 与 $\bar{V}_0$ 共有 n 条边相连。因为辐条里的黑边较多, 所以扭转 v_0 后辐条里的黑边数减少, 但出现了黑三角形 $v_0 v_1 v_{n-1}$, 再扭 v_1 (或者 v_{n-1}), 则减少两条黑边 (v_0, v_1) 和 (v_1, v_{n-1}) , 增加一黑边 (v_1, v_2) , 所以圈上的黑边仍为一条, 且辐条里的黑边数减少。此时, 若圈上有点关联的黑边数 $>$ 白边数, 则黑边必为与该点关联辐条和圈边, 再扭转此点, 即可使圈上黑边不增减, 辐条中黑边又少一条, 且满足 (1)、(2)。如此下去最终必可使得黑边数 $\leq$ 白边数, 故黑边数 $\leq n/2$ 。当 n 为偶数时, 若黑边数取最大值 $n/2$, 由于圈上有 1 条黑边, 辐条中的黑边数为 $\frac{n}{2} - 1 < \frac{n-1}{2}$; 当 n 为奇数时, 则黑边数 $\leq \frac{n-1}{2}$, 又由于圈上有 1 条黑边, 故辐条中的黑边数不大于 $\frac{n-1}{2} - 1 < \frac{n-1}{2}$ 。

综上,定理 2 得证。

由定理 2 可以进一步得到推论如下。

推论 轮图 W_n 满足定理 2 的所有互不同构的着色构成一个代表系。

由定理 2 可以将轮图 W_n 的图式流形大致分为以下 3

类:① 图上所有边都为白边;② 圈上 0 条黑边;③ 圈上有且仅有 1 黑边。

依照前面所述分类方法,可以得到轮图 W_8 的代表系(其中粗线为黑边,细线为白边),共有 25 个代表图形,如图 1 所示。

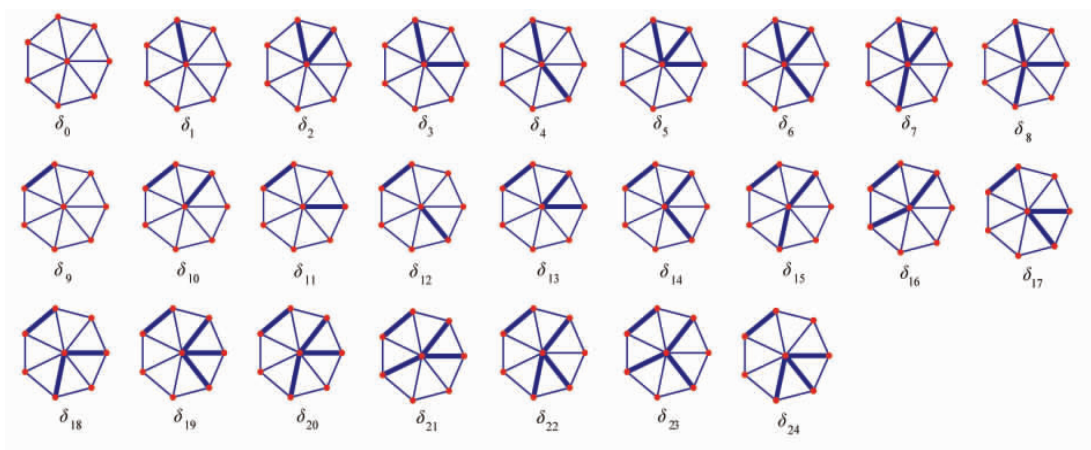


图 1 轮图 W_8 的代表系

Fig. 1 Representative systems for W_8

对图 1 中的一些图式流形在同胚的意义下的通过扭转变换进行分类合并,其等价关系如图 2 所示: $\delta_{11} \sim \delta_{13}, \delta_{12} \sim \delta_{19}$,

$\delta_{14} \sim \delta_{16}, \delta_{15} \sim \delta_{20}, \delta_{17} \sim \delta_{24}, \delta_{18} \sim \delta_{21} \sim \delta_{22}$ 。

故有以下结论。

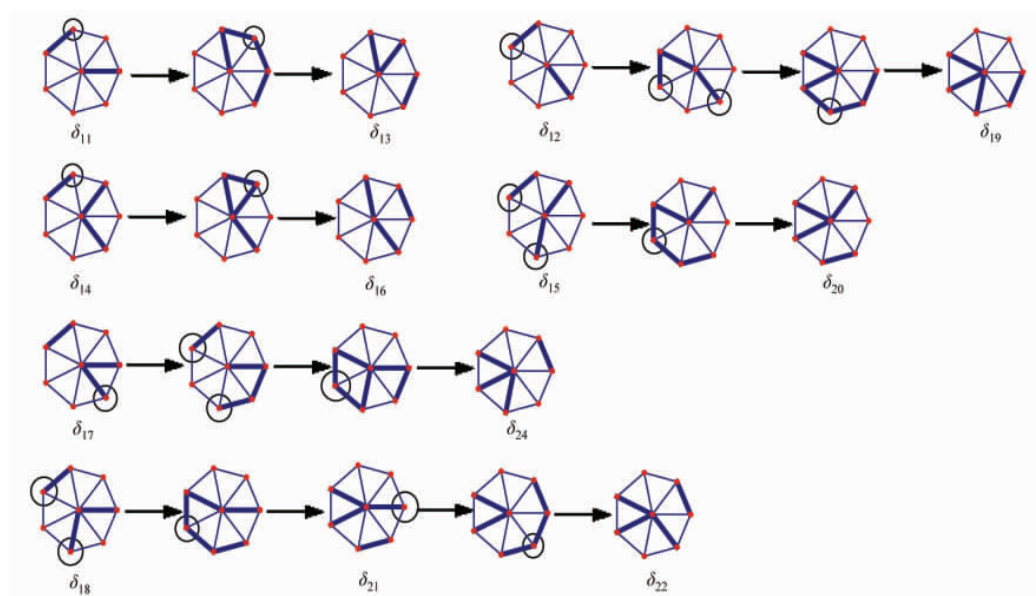


图 2 W_8 扭转等价图

Fig. 2 Twisted equivalents of W_8

定理 3 具有收缩 W_8 的图式流形有且仅有 18 个。分别为 $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7, \delta_8, \delta_9, \delta_{10}, \delta_{11} \sim \delta_{13}, \delta_{12} \sim \delta_{19}, \delta_{14} \sim \delta_{16}, \delta_{15} \sim \delta_{20}, \delta_{17} \sim \delta_{24}, \delta_{18} \sim \delta_{21} \sim \delta_{22}$ 和 δ_{23} 。

按照上述分类方法,可以得到轮图 W_9 的代表系(粗线为黑边,细线为白边),有 41 个代表图形,如图 3 所示。

对图 3 中的一些图式流形在同胚的意义下的通过扭转变换进行分类合并,可以得到等价关系如图 4 所示,分别为:

$\delta_{20} \sim \delta_{22}, \delta_{21} \sim \delta_{31}, \delta_{23} \sim \delta_{26}, \delta_{24} \sim \delta_{25} \sim \delta_{32}, \delta_{28} \sim \delta_{34} \sim \delta_{35}, \delta_{29} \sim \delta_{33}, \delta_{30} \sim \delta_{40}, \delta_{36} \sim \delta_{37}, \delta_{38} \sim \delta_{39}$ 。

故有以下结论。

定理 4 在同胚意义下,具有收缩 W_9 的图式流形有且仅有 30 个,分别为: $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7, \delta_8, \delta_9, \delta_{10}, \delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{14}, \delta_{15}, \delta_{16}, \delta_{17}, \delta_{18}, \delta_{19}, \delta_{20} \sim \delta_{22}, \delta_{21} \sim \delta_{31}, \delta_{23} \sim \delta_{26}, \delta_{24} \sim \delta_{25} \sim \delta_{32}, \delta_{27}, \delta_{28} \sim \delta_{34} \sim \delta_{35}, \delta_{29} \sim \delta_{33}, \delta_{30} \sim \delta_{40}, \delta_{36} \sim \delta_{37}$ 和 $\delta_{38} \sim \delta_{39}$ 。

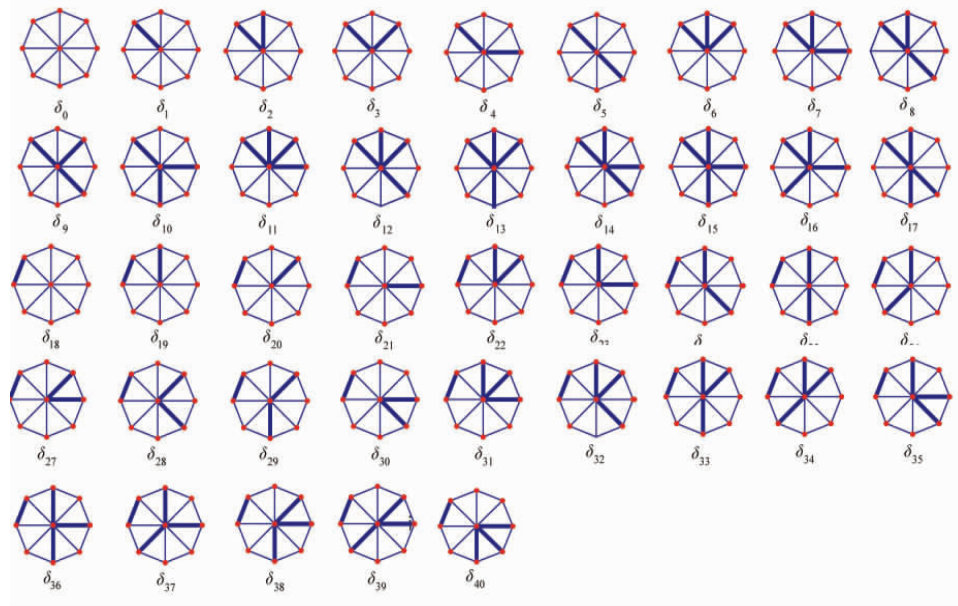


图 3 轮图 W_9 的代表系

Fig. 3 Representative systems of W_9

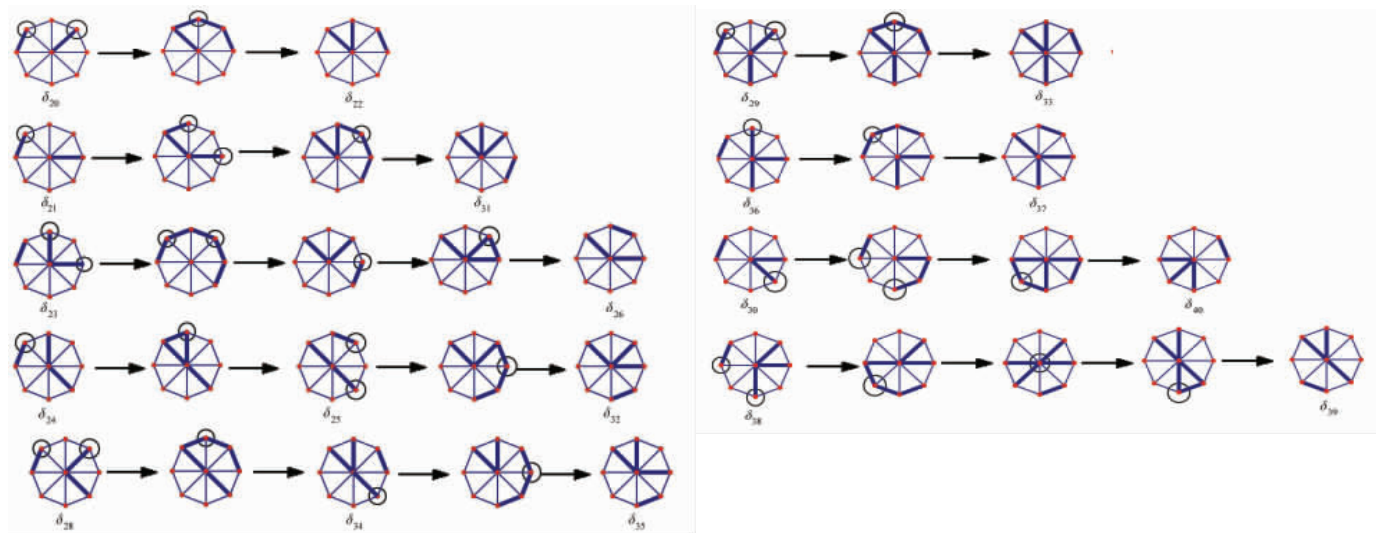


图 4 轮图 W_9 的扭转等价图

Fig. 4 Twisted equivalents of W_9

3 结论

采用图的边染色理论得到 W_8 、 W_9 的图式流形的代表系,并给出了其全部图形。并且对于可以通过扭转变换相互转化的图形,进一步给出了这些图形间的具体扭转方法和它们的图形表示。最终得到具有收缩 W_8 、 W_9 的图式流形,它们分别只有 18 个和 30 个。

参考文献 (References)

- [1] Liu Y X, Li Q S. Graphlike manifolds [J]. *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, 1994, 9(4): 46–51.
- [2] Lin Y, Wang Q. A combinatorial approach for topological classification of graphlike manifolds [J]. *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, 1998, 13(3): 1–11.
- [3] 林诒勋, 邓俊强. 图式流形拓扑分类中的图着色计数问题 [J]. 郑州大

学学报: 理学版, 1999, 31(2): 1–6.

Lin Yixun, Deng Junqiang. *Journal of Zhengzhou University: Natural Science Edition*, 1999, 31(2): 1–6.

- [4] 周慧清, 陈胜敏. K_8 和 K_9 图式流形的拓扑分类的下界[J]. 浙江师范大学学报: 自然科学版, 2007, 30(1): 49–53.

Zhou Huiqing, Chen Shengmin. *Journal of Zhejiang Normal University: Natural Sciences Edition*, 2007, 30(1): 49–53.

- [5] 张忠辅, Woodall D R, 姚兵, 等. 正则图的邻强边染色和全染色 [J]. 中国科学 A 辑, 2008, 38(11): 1313–1320.

Zhang Zhongfu, Woodall D R, Yao Bing, et al. *Science in China: Series A*, 2008, 38(11): 1313–1320.

- [6] 卢建立, 陈清. 余树在图式流形拓扑分类中的应用[J]. 科技导报, 2009, 27(22): 105–107.

Lu Jianli, Chen Qing. *Science & Technology Review*, 2009, 27 (22): 105–107.

(责任编辑 代丽)