

# 两类图的 Mycielski 图的均匀全色数

## Equitable Total Chromatic Number of Mycielski Graphs of Two Classes of Graphs

王海英/WANG Hai-ying, 孙 良/SUN Liang

北京理工大学数学系, 北京 100081

Department of Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

**[摘要]** 设  $G$  是简单图,  $G$  的点和边称为  $G$  的元素。如果  $G$  的点和边的染色满足相邻或关联的元素得到不同的颜色, 则称为  $G$  的正常全染色。如果  $G$  的一个正常全染色满足任意两种颜色所染元素数目相差不超过 1, 则称为  $G$  的均匀全染色, 其所用最少染色数称为  $G$  的均匀全色数。本文确定了轮和扇的 Mycielski 图的均匀全色数。

**[关键词]** 均匀全染色, 均匀全色数, Mycielski 图, 轮, 扇

**[中图分类号]** O157.5

**[文献标识码]** A

**[文章编号]** 1000-7857(2005)08-0029-02

**Abstract:** Let  $G$  be a simple graph. The vertices and edges of  $G$  are called the elements of  $G$ . For a coloring of the elements of  $G$ , if any two adjacent or incident elements of  $G$  have different colors, then it is called the proper total coloring of  $G$ . The equitable total coloring of a graph  $G$  is the proper total coloring such that the numbers of elements in any two color classes differ by at most one. The equitable total chromatic number is the smallest integer  $k$  such that  $G$  has an equitable total  $k$ -coloring. In this paper, we determine the equitable total chromatic number of Mycielski graphs of wheels and fans.

**Key Words:** equitable total coloring, equitable total chromatic number, Mycielski Graph, wheel, fan

**CLC Number:** O157.5

**Document Code:** A

**Article ID:** 1000-7857(2005)08-0029-02

### 1 引言

设  $G=(V, E)$  是以  $v$  为点集,  $E$  为边集的简单图。  $G$  的点和边统称为  $G$  的元素。  $\Delta(G)$  表示  $G$  的最大度。 以  $V=\{v_1, \wedge, v_n, u\}$  为点集,  $E=\{v_i v_{i+1}: i=1, \wedge, n-1\} \cup \{uv_i: i=1, \wedge, n\}$  为边集的图称为轮, 记作  $W_n$ 。  $W_n - \{u\}$  是长为  $n$  的圈, 称为  $W_n$  的外圈, 记作  $C_n$ 。 以  $V=\{v_1, \wedge, v_n, u\}$  为点集,  $E=\{v_i v_{i+1}: i=1, \wedge, n-1\} \cup \{uv_i: i=1, \wedge, n\}$  为边集的图称为扇, 记作  $F_n$ 。  $F_n - \{u\}$  是长为  $n$  的路, 称为  $W_n$  的外缘, 记作  $P_n$ 。 设  $G$  是图, 以  $V(G) \cup V' \cup \{w\}$  为点集,  $E(G) \cup \{uv': u \in V(G), v' \in V' \text{ 并且 } uv \in E(G)\} \cup \{wv' : v' \in V'\}$  为边集的图称为  $G$  的 Mycielski 图, 记作  $M(G)$ , 其中  $w \notin V(G); V'=\{v' : v \in V(G)\}$ 。

如果图  $G$  的点和边的  $k$ -染色  $f$  满足相邻或关联的元素得到不同的颜色, 则称此染色为  $G$  的正常  $k$ -全染色, 简称为  $k$ -全染色, 其所用最少色数称为  $G$  的全色数, 记为  $\chi_t(G)$ 。 如果图  $G$  的一个正常  $k$ -全染色  $f$  满足任意两种颜色所染元素数目相差不超过 1, 则称为  $G$  的均匀  $k$ -全染色, 其所用最少色数称为  $G$  的均匀全色数, 记为  $\chi_{et}(G)$ 。 显然有  $\chi_{et}(G) \geq \Delta(G)+1$ 。 图中被染色为  $i$  的元素的集合用  $S_i$  表示。

图的染色具有重要的理论意义和实际意义, 但是确定图的有关色数是一个十分困难的问题, 是图论的主要研究内容之一。 1973 年, Meyer<sup>[1]</sup> 给出了均匀染色和均匀色数的概念; 1994 年, Fu<sup>[2]</sup> 给出了均匀全染色和均匀全色数的概念。 关于这方面的研究结果见文献 [1~6]。 本文给出了轮和扇这两类图的 Mycielski 图的均匀全色数。

### 2 主要结果

#### 2.1 定理 1

当  $n \geq 3$  时,  $\chi_{et}(M(W_n)) = 2n+1$ 。

证明: 设轮  $W_n$  的点集和边集分别为  $V=\{v_1, \wedge, v_n, u\}$ ,  $E=\{v_i v_{i+1}: i=1, \wedge, n-1\} \cup \{uv_i: i=1, \wedge, n\}$ 。 因为  $\Delta(M(W_n))=2n$ , 所以只需给出  $M(W_n)$  的均匀  $(2n+1)$ -全染色  $f$  即可。

当  $n=3$  时,  $\Delta(M(W_n))=6$ , 我们给出  $M(W_n)$  的均匀 7-全染色  $f$  如下。

1)  $W_3$  的外圈  $C_3$  上的元素的染法: 依次用色 1, 2, 3, 4, 5, 6 染点和边  $v_1, v_1 v_2, v_2, v_2 v_3, v_3, v_3 v_1$ 。

2)  $M(W_3)$  的其它元素的染法:

$$\begin{aligned} f(v_2 u) &= f(v_3 v'_1) = f(v'_2 w) = 1; & f(v_3 v'_2) &= f(u v'_1) = f(v'_3 w) = 2; \\ f(v_1 u) &= f(v_3 u) = f(v'_2) = 3; & f(v_1 v'_2) &= f(u') = f(u v'_3) = f(v'_1 w) = 4; \\ f(v_1 u) &= f(v_2 u') = f(v'_3) = 5; & f(v_2 v'_3) &= f(w u') = f(u v'_2) = f(v'_1) = 6 \\ f(v_1 v'_3) &= f(v_2 v'_1) = f(v_3 u') = f(w) = f(u) = 7. \end{aligned}$$

当  $n \geq 4$  时, 分两种情形讨论。

情形 1  $n$  为偶数。

1)  $W_n$  的外圈  $C_n$  上的元素的染法: 分别用色 1,  $\wedge, 2n$  染点和边  $v_1, v_1 v_2, v_3, \wedge, v_{n-1} v_n, v_n, v_n v_1$ 。

2)  $M(W_n)$  的其它元素的染法:

$$\begin{aligned} f(w) &= 1; f(u') = f(u) = 2; f(w u') = 2n+1; \\ f(v'_i) &= \begin{cases} 2i+3, & i=1, 2, \wedge, n-3; \\ 2n+1, & i=n-2, n-1; \\ 3, & i=n; \end{cases} \end{aligned}$$

收稿日期: 2005-06-20

作者简介: 王海英, 女, 北京市海淀区中关村南大街 5 号北京理工大学数学系, 博士生, 研究方向为图论与组合最优化; E-mail: whycht@sina.com

孙 良, 男, 北京市海淀区中关村南大街 5 号北京理工大学数学系, 教授, 主要从事图论与组合最优化研究; E-mail: sun30318@yahoo.com

$$f(wv'_i)=2n+2-2i, \quad i=1, 2, \dots, n;$$

$$f(v_i v'_{i+1})=2i+1, \quad i=1, 2, \dots, n-1;$$

$$f(v_{i+1} v'_i)=\begin{cases} 2i+4, & i=1, 2, \dots, n-2; \\ 1, & i=n-1; \end{cases}$$

$$f(uv_i)=\begin{cases} 2i+4, & i=1, 2, \dots, n-2; \\ 2n+1, & i=n-1; \\ 4, & i=n; \end{cases}$$

$$f(v_n v'_1)=2; \quad f(v'_n v_1)=4;$$

$$f(uv'_i)=2n+1-2i, \quad i=1, 2, \dots, n;$$

$$f(u'v_i)=\begin{cases} 2i+3, & i=1, 2, \dots, n-2; \\ 1, & i=n-1; \\ 3, & i=n; \end{cases}$$

容易验证: 当  $i \in \{2\} \cup \{3, 5, \dots, 2n-3\}$  时,  $|S_i|=5$ ; 当  $i \in \{2n-1, 2n+1\} \cup \{4, 6, \dots, 2n\}$  时,  $|S_i|=4$ 。因此, 上述的  $f$  是  $M(W_n)$  的均匀  $(2n+1)$  全染色。

情形 2 为奇数

1)  $W_n$  的外圈  $C_n$  上的元素的染法: 依次用颜色  $1, \dots, 2n$  染点和边  $v_1, v_1 v_2, v_2, \dots, v_{n-1} v_n, v_n, v_n v_1$ 。

2)  $M(W_n)$  的其它元素的染法:

$$f(u)=1; f(u)=2n; f(u')=2n+1; f(wu')=3;$$

$$f(v'_i)=\begin{cases} 2n+1-2i, & i=1, 2, \dots, n-1; \\ 2n-1, & i=n; \end{cases}$$

$$f(wv'_i)=\begin{cases} 2i+2, & i=1, 2, \dots, n-1; \\ 2, & i=n; \end{cases}$$

$$f(v_i v'_{i+1})=2i+3, \quad i=1, 2, \dots, n-1;$$

$$f(v_{i+1} v'_i)=\begin{cases} 2n-3-2i, & i=1, 2, \dots, n-2; \\ 2n+1, & i=n-1; \end{cases}$$

$$f(v_n v'_1)=1; f(v'_n v_1)=2n-3;$$

$$f(uv'_i)=2n+3-2i, \quad i=1, 2, \dots, n-1;$$

$$f(uv'_i)=\begin{cases} 2i, & i=1, 2, \dots, n-2; \\ 21, & i=n; \end{cases}$$

$$f(u'v_i)=\begin{cases} 2i+2, & i=1, 2, \dots, n-1; \\ 2, & i=n; \end{cases}$$

容易验证: 当  $i \in \{1, 3, \dots, 2n-1\}$  时,  $|S_i|=5$ ; 当  $i \in \{2n+1\} \cup \{2, 4, \dots, 2n\}$  时,  $|S_i|=4$ 。因此, 上述的  $f$  是  $M(W_n)$  的均匀  $(2n+1)$ -全染色。

## 2.2 定理 2

当  $n \geq 3$  时,  $\chi_{et}(M(F_n))=2n+1$ 。

证明: 设扇  $F_n$  的点集和边集分别为  $V=\{v_1, \dots, v_n, u\}$ ,  $E=\{v_i v_{i+1} : i=1, \dots, n-1\} \cup \{uv_i : i=1, \dots, n\}$ 。因为  $\Delta(M(F_n))=2n$ , 所以只需给出  $M(F_n)$  的均匀  $(2n+1)$ -全染色  $f$  即可。

1) 当  $n=3$  时,  $\Delta(M(F_n))=6$ , 只需给出  $M(F_n)$  的均匀 7-全染色  $f$  如下。

①  $F_3$  的外缘  $P_3$  上的元素的染法: 分别用色  $1, 2, 3, 4, 5$ , 染点和边  $v_1, v_1 v_2, v_2, v_2 v_3, v_3, v_3 v_1$ 。

②  $M(F_3)$  其它元素的染法:

$$f(v_2, u)=f(u'v_3)=f(v'_2 w)=1; \quad f(v_3 v'_2)=f(u'v'_1)=f(v'_3 w)=2;$$

$$f(v_1, u')=f(v_3 u)=f(v'_2)=3; \quad f(v_1 v'_2)=f(u'v'_3)=f(v'_1 w)=4;$$

$$f(v_1, u)=f(v_2, u')=f(v'_3)=5; \quad f(v_2 v'_3)=f(wu')=f(u'v'_2)=f(v'_1)=6;$$

$$f(v_2 v'_1)=f(u')=f(w)=f(u)=7。$$

2) 当  $n=4$  时,  $\Delta(M(F_n))=8$ , 只需给出  $M(F_n)$  的均匀 9-全染色  $f$  如下。

①  $F_4$  的外缘  $P_4$  上的元素的染法: 分别用色  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  染点和边  $v_1, v_1 v_2, v_2, v_2 v_3, v_3, v_3 v_4, v_4$ 。

②  $M(F_4)$  其它元素的染法:

$$f(v'_4, u)=f(u'v_3)=f(v_4 v'_3)=1; \quad f(u)=f(u')=f(v'_4 w)=2;$$

$$f(v_4, u')=f(v'_3 u)=f(v_1 v'_2)=3; \quad f(uv_4)=f(v'_1)=f(v'_3 w)=4;$$

$$f(v'_2, u)=f(v_1 u')=f(v_2 v'_3)=5; \quad f(v_2 v'_1)=f(uv_1)=f(wv'_2)=6;$$

$$f(uv_2)=f(v_3 v'_4)=f(w)=f(uv'_1)=7;$$

$$f(wv'_1)=f(v'_3)=f(v_3 v'_2)=f(uv_2)=8;$$

$$f(v'_2)=f(v'_4)=f(wu')=f(uv_3)=9。$$

3) 当  $n \geq 5$  时, 下面分两种情形讨论。

情形 1  $n$  为偶数。

①  $F_n$  的外缘  $P_n$  上的元素的染法: 分别用色  $1, 2, \dots, 2n-1$  染点和边  $v_1, v_1 v_2, v_2, \dots, v_{n-1} v_n, v_n$ 。

②  $M(F_n)$  其它元素的染法:

$$f(w)=1; f(u')=f(u)=2; f(wu')=2n+1;$$

$$f(v'_i)=\begin{cases} 4, & i=1; \\ 2n, & i=2; \end{cases}$$

$$f(v'_i)=\begin{cases} 2i+3, & i=3, 4, \dots, n-3; \\ 2n+1, & i=n-2, n-1; \\ 3, & i=n; \end{cases}$$

$$f(wv'_i)=2n+2-2i; \quad i=1, 2, \dots, n;$$

$$f(v_i v'_{i+1})=2i+1, \quad i=1, 2, \dots, n-1;$$

$$f(v'_i v_{i+1})=\begin{cases} 2i+4, & i=1, 2, \dots, n-2; \\ 1, & i=n-1; \end{cases}$$

$$f(uv'_i)=\begin{cases} 2i+4, & i=1, 2, \dots, n-2; \\ 2n+1, & i=n-1; \\ 4, & i=n; \end{cases}$$

$$f(uv'_i)=2n+1-2i, \quad i=1, 2, \dots, n-2;$$

$$f(u'v_i)=\begin{cases} 2i+3, & i=1, 2, \dots, n-2; \\ 1, & i=n-1; \\ 3, & i=n; \end{cases}$$

容易验证: 当  $i \in \{1, 3, 9, 11, \dots, 2n-3\}$  时,  $|S_i|=5$ , 否则,  $|S_i|=4$ 。因此上述的  $f$  是  $M(F_n)$  的均匀  $(2n+1)$ -全染色。

情形 2  $n$  为奇数

①  $F_n$  的外缘  $P_n$  上的元素的染法: 分别用色  $1, 2, \dots, 2n-2$  和  $2n$  染点和边  $v_1, v_1 v_2, v_2, \dots, v_{n-1} v_n, v_n$ 。

②  $M(F_n)$  其它元素的染法:

$$f(w)=1; f(u)=2n; f(u')=2n+1; f(wu')=3;$$

$$f(v'_i)=\begin{cases} 2n+1-2i, & i=1, 2, \dots, n-1; \\ 2n-1, & i=n; \end{cases}$$

$$f(wv'_i)=\begin{cases} 2i+2, & i=1, 2, \dots, n-1; \\ 2, & i=n; \end{cases}$$

$$f(v_i v'_{i+1})=2i+3, \quad i=1, 2, \dots, n-1;$$

$$f(v_i v'_{i+1})=\begin{cases} 2n-3-2i, & i=1, 2, \dots, n-2; \\ 2n+1, & i=n-1; \end{cases}$$

$$f(uv_i)=2n+3-2i, \quad i=1, 2, \dots, n-2;$$

$$f(uv'_i)=\begin{cases} 2i, & i=1, 2, \dots, n-1; \\ 1, & i=n; \end{cases}$$

$$f(u'v_i)=\begin{cases} 2i+2, & i=1, 2, \dots, n-1; \\ 2, & i=n; \end{cases}$$

容易验证: 当  $i \in \{3, 5, \dots, 2n-5\}$  时,  $|S_i|=5$ , 否则,  $|S_i|=4$ 。因此, 上述的  $f$  是  $M(F_n)$  的均匀  $(2n+1)$ -全染色。

## 参考文献 (References)

- [1] Meyer, W. Equitable Coloring [M]. American Math., Monthly, 1973, 80: 920~922
- [2] Fu H.-L. Some results on equalized total coloring [J]. Congr. Numerantium, 1994, 102: 111~119
- [3] Wang Weifan. Equitable Total Coloring of Graphs with Maximum Degree 3 [J]. Graphs and Combinatorics, 2002, 18: 677~685
- [4] Lih K-W, Wu P. On Equitable Coloring of Bipartite Graphs [J]. Discrete Mathematics, 1996, 151: 155~160
- [5] 张忠辅. 关于图的均匀全染色 [R]. 天津南开大学数学研究所, 1996
- [6] 张忠辅. 圈的 Mycielski 图的均匀全染色 [J]. 兰州铁道学院学报, 2003, 22 (6): 1~3

(责任编辑 苏青)