

点空间分析——分维与均匀度

罗传文

(东北林业大学林学院, 博士、教授 哈尔滨 150040)

〔摘要〕 对有限空间内的点集定义了独占圆、独占线和独占球。通过对有限点集均匀性的研究,抽象出了均匀度的定义。对分形集定义了度量映射,度量映射产生的点集的均匀度与分维之间有换算关系,可以说均匀性与复杂性是密不可分的。均匀度是对点集格局的一种测度,它描述的是点集的空间关系,而不是点的“多少”,有限点集的均匀度可以取到 $[0, 1]$ 区间的任何实数,这是它与测度和分维的区别。本文得到两个有趣的常数:一位无限循环小数产生的点集的均匀度为0.1,随机格局的均匀度的数学期望为 $1/x=0.318$ 。可见,均匀度将空间复杂性转移到了点集均匀性上,它为复杂性的研究打开了新的窗口。

〔关键词〕 独占圆 独占线 均匀度 度量映射 分维 [中图分类号] 01

〔文献标识码〕 A [文章编号] 1000-7857(2004)10-0051-04

POINT SPATIAL ANALYSES
——FRACTAL DIMENSION AND UNIFORM INDEX

LUO Chuan-wen

(School of Forestry, Northeast Forestry University, Harbin 150040, China)

Abstract: The concepts, monopolized circle, monopolized line and monopolized sphere were put forward in this paper. The uniform index was put forward based on the study of the uniformity about finity point set. New concept measuring mapping was defined to fractal set, the fractal dimension of the fractal set can be transformed to the uniform index of the point set created by measuring mapping, it is shown that the complexity and uniformity are tight. The uniform index is a measure of point set pattern, which describes the spatial relationship in the point set, but the number. The uniform index can be any real number in interval $[0, 1]$, which is different from mathematical measure and fractal dimension. Two very interesting numbers, the uniform index of 1 digit infinite repeating decimal and random pattern are 0.1 and $1/x=0.318$.

Key Words: monopolized circle, monopolized line, uniform index, measuring mapping, fractal dimension

CLC Number: 01

Document Code: A

Article ID: 1000-7857(2004)10-0051-04

一般认为, Mandelbrot^{[1][4]}1977年的专著是分形几何作为一个独立的学科的标志,之后分形学以极快的速度向各个学科渗透。但人们更多地研究了具有线、面图元的分形体,因为线、面图元产生的分形集有明显的形状,而对于有限点集的研究却相对较少。在分形学中有限点集的 Hausdorff^[6]维数为0,在测度论中有限点集的 Lebesgue 测度也为0;而有限点集的均匀度既不为0,也不为无穷大,它是一个实数,这大大地有利于有限点集的研究,而且均匀度与分维有着密不可分的关系。对于点集的空间信息分析的问题,笔者做了多方面的尝试^{[15][18]},并试图将这些内容归结为点空间分析。为了描述的方便,给点空间分析约定一个范围:将以点为基础的空间信息分析的理论和方法统称为点空间分析。

离散点集的均匀性的研究在生态学中有悠久的历史,为了描述在一块林地上分布的林木的均匀性,近百年来,许多学者进行了很多尝试。最早对群落中植物种群个体

分布的随机性进行研究的学者是 Gleason 和 Svedburg^[2]。Svedburg 通过比较实测频度与 Poisson 分布的理论频度来检验分布的随机性,并用方差/均值作为随机性的度量^[2]。Moore (1954)、Moristita(1959)在此基础上发展出更多的随机性指数^[2],而 Lloyd (1967)提出了平均拥挤指数 m^* 和聚块指数^[3-5], Moristita(1959)提出了分散指数^[2]。Hopkins 1954年提出了通过与随机格局进行比较的格局检验方法^[6]。Clark 和 Evens(1954)提出了基于随机植物到其最近邻体距离的格局检验方法^[7],这一方法由 Donnelly(1978)所修改^[8]。应用和发展过这一方法的还有 Smaltschinski (1998)、Pielou (1977)、Gleichmar (1998)、Fuldner(1995)、Kint(2003)等^[9-12]。

地震的空间分布是有限离散点集,朱令人等^[13]用固定半径法和固定质量法研究地震分布,而计算精度与样本有关。笔者在研究一定地段上的植物个体的分布格局时,首先引进了独占圆的概念,进而提出了均匀度的概念。然而通过深入的研究发现,分形集均可以映射出一个不均匀的点集,而

收稿日期: 2004-06-09。

基金项目: 国家“十五”攻关课题(2001BA510B-07-02)子专题。

作者简介: 罗传文,男,1962~,哈尔滨市东北林业大学林学院 321 信箱(150040),主要从事空间信息学研究,E-mail: luocw-cf@nefu.edu.cn。

且均匀度与分维可以换算。

计算等比级数和等差级数的均匀度,而且确定性分形集经过度量映射所产生的就是一个等比级数。为此,笔者发现,均匀度将复杂性转移到了均匀性上,均匀度的应用范围已经远远超出了生态学格局的研究范围,它有更广的应用范围。

1 独占圆、独占线和独占球的定义

定义1 在2维欧氏空间中,对于一定空间范围内分布的点集,设任意一点与最近邻体的距离为 s ,以 $s/2$ 为半径所画的圆为该点的独占圆。这一定义称为独占圆的跨边定义。

定义2 考虑在 n 维欧氏空间中的点集,设任意一点与最近邻体的距离为 s ,则称以该点为球心, $s/2$ 为半径所画的球为该点的独占球。这一定义称为独占球的跨边定义。

定义3 称点集的分布为格局。在生态学中,习惯上将服从均匀分布(数学上的均匀分布)的点集称为随机格局。称点集中任意一点的最近邻体为邻近点。如果两个点互为邻近点,则称两点为一个邻体对。

定义4 在一维欧氏空间中,在一个闭区间内分布的点集(如图1),对于左右都有邻体的点 b ,设 ab 线段与 bc 线段长度的最小者为 s ,则以 b 点为中心,以 $s/2$ 为半径的区间为 b 点的独占线,其长度记为 $M(b)=s$ (注:独占线的长度与独占线要区分开)。对于离左边界最近的点 a ,定义 a 点的左边邻体距离为 $oa+de$;右边邻体距离为 ab ,则 a 点的独占线定义为以 a 点为中心以 $(oa+de)/2$ 与 $ab/2$ 之间的最小者(设为 s)为半径的线段;若 a 点的独占线左边超出了区间,则从 de 线段上分割出相应长度的线段作为 a 点的独占线, a 点的独占线长度记为 $M(a)=s$ 。对于 d 点,则它的左邻体距离为 cd ,而右邻体距离为 $de+oa$;与 a 点类似,可以得到其独占线长度。这一定义称为独占线的接边定义,称将独占线接到另一端的点为接边点。



图1 $[a, b]$ 区间上分布的点集
(端点上不一定有点,它只代表边界)

这一独占线的定义被称为独占线的接边定义,也即把一个区间看成一个封闭的圆来对待,这样独占线与邻体关系就得到了完全的统一,否则,独占线会存在边界问题。关于独占线的定义可以有多种形式,将另文讨论。

定义5 在1维欧氏空间中,区间 $[a, b]$ 上的点集,点集的独占线总长度与区间长度之比称为1维点集的均匀度。若独占线长度正好等于区间长度,则称之为1维完全均匀分布;不引起混淆时,则简称为完全均匀分布或均匀分布。显然,在区间 $[a, b]$ 上的分布的点,如果距离相等,且区间的两个端点上有点,则独占线总长度与区间长度相等,这时两个端点仅相当于1个点。

定义6 一个独占圆的外接正方形称之为独占方,一个 n 维球的外接 n 维正方体称之为 n 维独占体。

2 独占圆的性质

对于独占线、独占圆和独占球,下面的引理1和引理2可以得到相似的结论。但是,本文只对平面内的独占圆进行

证明。需要说明的是,独占线与独占圆和独占球在边界处理上是有差异的,尽管如此,两个引理的结论仍然成立。

引理1 在一定的边界内的点集,点集内所有点的独占圆是不重叠的,它们最近的空间关系是相切。

这一结论是显然的。

引理2 设在一个长方形内有 $a \times b = n$ 个均匀分布的点(如图2所示),点与最近邻体之间的距离均为 s ,称这样的格局为2维完全均匀格局。若将每一个独占方 k 次2等分,得到的独占方数、独占圆数和点数为 $n, 4n, \dots, 4kn$,而独占圆面积的总和保持不变。

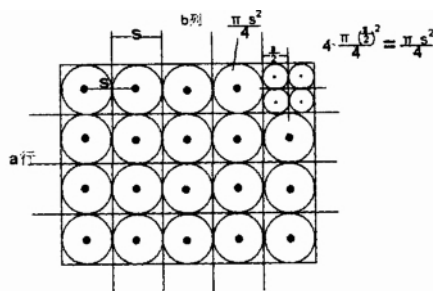


图2 独占圆半径缩小一半而个数变为4个(面积不变)

证明:由假设可知,以任一点为圆心,以 $s/2$ 为半径的圆是该点的独占圆,独占圆外有一外接正方形,其边长为 s 。

显然,所有的外接正方形覆盖整个长方形;

所以,长方形总面积为: ns^2

而,独占圆的总面积为: $n \frac{\pi s^2}{4}$

若将每一个外接正方形均匀分割成4份,在每一个小正方形的中心放一个点,这时长方形总面积为: $4n(\frac{s}{2})^2 = ns^2$

独占圆的总面积为: $4n\pi(\frac{s}{4})^2 = n \frac{\pi s^2}{4}$

这时的点数为 $4n$ 。

所以,对于上述完全均匀格局而言,当点数为 $n, 4n, \dots, 4^k n$ 时,独占圆总面积保持不变,且是长方形总面积的 $\frac{\pi}{4}$ 倍。证毕。

引理2说明,对于完全均匀格局,独占圆的总面积与点数无关。

3 均匀度的定义与应用

根据引理1,独占圆是不重叠的。且显然,独占圆面积的总和被格局唯一确定。

根据引理2,对于均匀分布而言,独占圆面积的总和与点数无关,它是长方形总面积的 $\frac{\pi}{4}$ 倍。

基于上述两个引理,可以引入以下2维均匀度定义。

在长方形内,所有点的总独占圆面积与长方形总面积的 $\frac{\pi}{4}$ 倍之比称为格局均匀度。

设 a 为点的总独占圆面积, A 为长方形面积,令 $L = \frac{4a}{\pi A}$ 为格局均匀度;

则: $a = \frac{\pi AL}{4}$

设 $\bar{\omega} = \sum_i d_i^2 / n$ 为点与最近邻体的距离平方的平均数,

$$\text{则: } a = \frac{\pi}{4} n \bar{\omega}, \quad \bar{\omega} = \frac{4a}{\pi n} = \frac{4}{\pi n} \frac{\pi AL}{4} = \frac{AL}{n}$$

当格局为随机格局(数学上的均匀分布)时,根据 Pielou^[10] 的证明,有密度函数:

$$f(\bar{\omega}) = \frac{(n\lambda)^n \bar{\omega}^{n-1} e^{-n\lambda\bar{\omega}}}{\Gamma(n)}$$

$2n\lambda\bar{\omega}$ 服从 χ^2 分布, λ 为每单位半径圆内的平均点数,

$$\lambda = \frac{\pi n}{A}$$

则有: $2n\lambda\bar{\omega} = 2n \frac{\pi n}{A} \frac{AL}{n} = 2\pi nL$ 服从自由度为 $2n$ 的 χ^2

分布

$$\text{则: } L \sim \frac{\chi^2(2n)}{2\pi n}, \text{ 且有 } E(L) = \frac{1}{\pi}, L \text{ 的方差}$$

$$D(L) = \frac{D(\chi^2(2n))}{4\pi^2 n^2} = \frac{4n}{4\pi^2 n^2} = \frac{1}{n\pi^2}. \text{ 可见 } E(L) \text{ 与点数和长方}$$

形面积均无关,它是一个相对指标,它可以在不同点数和不同面积的长方形之间比较其均匀性。它相当于,在随机格局的假设下,每单位半径的圆的面积内正好有一个点时的点密度指标。这是一个标准的密度指标,它剔除了点数与长方形面积对均匀性的影响。但是,当 $n \rightarrow \infty$ 时, $D(L) \rightarrow 0$, 所以 L 是均方收敛的,这预示着在点充分多的情况下,均匀度的差别会变小。由于 L 的分布已经获得, L 可以用于格局类型检验,其检验的结果与经典的检验方法相同^[15]。

4 等比数列与等差数列的均匀度

引理 3 考虑一个等比级数的前 n 项 $a_0, a_0q, \dots, a_0q^{n-1}$, 依此数列产生一个点集(见图 3)。图 3 中第 1 排文字代表点与点之间的距离,第 2 排文字是点的代号,求此点集的均匀度。



图 3 用等比级数前 n 项创建的点集示意图($q < 1$)

图中 a_0 为 b_0 点与原点的距离, $a_i (i=1, 2, \dots)$ 依次为 b_i 点距左边点的距离,所以当 $q < 1$ 时,整个区间长度为:

$$Ob = \frac{a_0}{1-q}$$

b_n 点以 O (根据定义, O 点与 b 点相当于同一个点) 点为邻体,还是以 b_{n-1} 为邻体要视条件而定。

(1) 当 $1 > q > \frac{1}{2}$ 时

$$b_n b = \frac{a_0}{1-q} - \frac{a_0(1-q^{n+1})}{1-q} = \frac{a_0 q^{n+1}}{1-q}$$

$$b_{n-1} b_n = a_0 q^n$$

由于 $1 > q \geq \frac{1}{2}$, 必有 $b_n b \geq b_{n-1} b_n$, 这时 b_n 以 b_{n-1} 为邻

体,故有:

$$M(b_n) = a_0 q^n$$

$$M(O) = M(b) = b_n b = \frac{a_0 q^{n+1}}{1-q}$$

从图 3 中可见,此点集的最左边界为 O , 右边界为 $a_0/(1-q)$, 则从右边起各点的独占线长度分别为:

$$a_0 q^n, a_0 q^{n-1}, a_0 q^{n-2}, a_0 q^{n-3}, \dots, a_0 q, \frac{a_0 q^{n+1}}{1-q}$$

故独占线的总长度为:

$$\begin{aligned} T &= a_0 q^n + a_0 q^{n-1} + a_0 q^{n-2} + a_0 q^{n-3} + \dots + a_0 q + \frac{a_0 q^{n+1}}{1-q} \\ &= a_0 q \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{a_0 q^n (1-q) + a_0 q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{a_0 q - a_0 q^{n+1}}{1-q} + a_0 \frac{q^n - q^{n+1} + q^{n+1}}{1-q} \\ &= a_0 \frac{q - q^{n+1} + q^{n+1}}{1-q} \\ &= a_0 \frac{q}{1-q} \end{aligned}$$

由于该区间总长度为: $T_0 = \frac{a_0}{1-q}$

则该点集的均匀度为:

$$L_n = q - q^{n+1} + q^n$$

显然,当 $q \rightarrow 1$ 时, $L_n \rightarrow 1$, 且有: $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = q$

(2) 当 $q \leq \frac{1}{2}$ 时, $\frac{a_0 q}{1-q} \leq a_0 q^n$, 这时 b_n 点以 O 为邻体, b_n

点的独占线长度为: $M(b_n) = \frac{a_0 q^{n+1}}{1-q}$

Ob 区间上的独占线总长度为:

$$\begin{aligned} T &= a_0 q^n + a_0 q^{n-1} + a_0 q^{n-2} + a_0 q^{n-3} + \dots + a_0 q + \frac{a_0 q^{n+1}}{1-q} + \frac{a_0 q^{n+1}}{1-q} \\ &= a_0 q \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{2a_0 q^{n+1}}{1-q} \\ &= a_0 \frac{q - q^{n+1} + 2q^{n+1}}{1-q} \\ &= a_0 \frac{q + q^{n+1}}{1-q} \end{aligned}$$

则该点集的均匀度为: $L_n = q + q^{n+1}$

当然有: $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = q$

(3) 当 $q > 1$ 时

图 3 表示的点 b 不存在,以 b_n 为区间的右边界,其邻体关系的方向向左, b_n 点与 O 点为同一个点, O 点的邻体为 b_0 点。

$$M(O) = a_0$$

$$M(b_0) = a_0 q$$

此点集的全部独占线长度为:

$$T = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \dots + a_0 q^n = \frac{a_0 (1 - q^{n+1})}{1 - q}$$

而区间总长度为:

$$T_0 = a_0 + a_0 q + \wedge + a_0 q^n = \frac{a_0(1-q^{n+1})}{1-q}$$

故此点集的均匀度为:

$$L_n = \frac{T_0}{T} = \frac{2-q-q^n}{1-q^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \frac{1}{q}$$

可见, q 越大, 均匀度越小; 由等比级数所产生的点集的均匀度, 完全由公比所确定, 与初始大小无关。

更为有趣的是: 一个公比 $q > 1$ 的数列的均匀度与公比为 $1/q$ 的数列的均匀度完全相等。

定义 7 设分形集 S 的分维为 $D^{[17]}$, 如果把 S 划分成 l 个同等大小的子集, 每一子集是原来集合的 $1/k$ 倍, 则有 $D = \frac{\ln l}{\ln k}$, 且第 n 次划分对应一个数为: $a_n = (\frac{1}{k})^n (l)^n = (k^{D-1})^n$; 这样的划分将分形集 S 映射成了一个点集 (a_n) , 称这一映射为度量映射, 而称其它将分形集映射为点集的映射为非度量映射。

定理 1(称为度量映射定理) 设 $a_n = (\frac{1}{k})^n (l)^n = (k^{D-1})^n$ 为从分形集 S 通过度量映射产生的点集, 则此点集的均匀度为:

(1) 当 $D \geq 1$ 时, $k^{D-1} \geq 1$

$$L = \frac{1}{k^{D-1}} = k^{1-D}$$

(2) 当 $D < 1$ 时, $k^{D-1} < 1$

$$L = k^{D-1}$$

这一定理是引理 3 的应用。

可见, 分维与均匀度之间可通过一个映射对应起来, 且度量映射产生的点集的均匀度与分维之间有换算关系。

推论 1 一位循环小数映射的点集的均匀度为 0.1, 无限循环小数的均匀度与循环步长有关。

一位循环小数可以看成公比为 $1/10$ 的等比级数的和, 它所产生的点集的均匀度由等比级数的公式计算为: 0.1。

引理 4 求等差级数均匀度

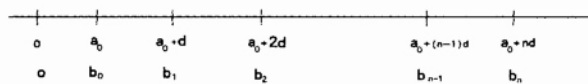


图 4 等差级数产生的点集

图 4 中第 1 排文字代表点与点之间的距离, 第 2 排文字是点的代号。假设在 O 点没有点, 整个区间共有 $n+1$ 个点, b_n 点与 O 点视为同一点, 则 b_n 点的独占线长度为 a_0 。

Ob_n 区间总长度为:

$$a_0 + a_0 + d + a_0 + \wedge + a_0 + nd = \frac{a_0 + a_0 + nd}{2} (n+1) = A$$

独占线总长度为:

$$a_0 + a_0 + d + a_0 + \wedge + a_0 + (n-1)d + a_0 = \frac{a_0 + a_0 + (n-1)d}{2} n + a_0$$

所以, Ob_n 区间上的独占线均匀度为:

$$L_n = \frac{2a_0 + (2a_0 + nd)(n+1)}{(2a_0 + (n-1)d)n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 1$$

可见, 对于等差级数产生的点集, 点数增加其均匀性也

增加。

5 讨论

(1) 本文主要研究了一些 1 维或 2 维欧氏空间的某些点集的均匀度, 对于多维欧氏空间的点集的均匀度还有待展开。

(2) 均匀度是点集空间关系的一种测度。

(3) 需要注意的是, 独占线与独占圆、独占球在边界处理上是略有差别的。对于独占圆和独占球的跨边定义, 对于一些特殊情况, 均匀度有可能大于 1, 但这并不影响均匀度的意义和作用。

(致谢: 感谢唐守正院士和孙良教授对本文提出的宝贵意见。)

参考文献(References)

- [1] Mandelbrot B B. Fractals: Form, Chance and Dimension [M]. Freeman, San Francisco, 1977
- [2] 李海涛. 植物种群分布格局研究概况[J]. 植物学通报, 1995, 12(2): 19~25
- [3] Lloyd M. Mean Crowding[J]. J. Anim. Ecol. 1967, 36:1~30
- [4] Moristita J. Measuring of the dispersion of individuals and analysis of the distributional patterns[M]. Mem. Fao. Sci., Kyusha University Der. E., 1959. 380~385
- [5] Moore P G. Spacing in plant populations [J]. Ecology, 1954, 35: 222~227
- [6] Hopkins B, J G Skellam. A new method for determining the type of distribution of tree individuals.[J] Ann. Bot. Lond. N.S., 1954, 18:213~227
- [7] Clark P J, Evans F C. Distance to nearest neighbour as a measure of spatial Relationships in populations[J]. Ecology, 1954, 35:445~453
- [8] Donnelly K P. Simulation to determine the variance and edge-effects of total nearest Neighbor distance[A]. In: Hodder, I.R.(ed.). Simulation methods in archaeology [M]. Cambridge University Press, London, United Kingdom, 1978. 91~95
- [9] Smaltschinski T. Charakterisierung von Baumverteilungen [J]. Forstwiss. Cent. bl., 11, 1998, 7:355~363
- [10] Pielou E C. Mathematical Ecology [M]. Wiley, Oxford, United Kingdom, 1977. 385
- [11] Kint V, Meirvenne M V, Nachtergale L, Geudens G, N Lust. Spatial methods for quantifying forest stand structure development: a comparison between nearest-neighbor indices and variogram analysis[J]. Science, 2003, 49(1):36~49
- [12] Fuldner K. Zur Strukturbeschreibung in Mischbeständen [J]. Forstarchiv, 1995, 66:235~240
- [13] 朱令人, 龙海英. 离散点集(地震)空间分布多重分形集计算的精度估算[J]. 地震, 2000, 20(3): 1~8
- [14] 夏德勇, 罗传文. 非线性现象——耗散结构、混沌与分形 [M]. 哈尔滨: 黑龙江科学技术出版社, 1994. 128~129
- [15] 罗传文. 空间信息分析与处理[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社, 2004. 21~45
- [16] 李水根. 分形[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004. 120
- [17] 文志英, 井竹君. 分形几何和分维数简介[J]. 数学的实践与认识, 1995(4): 26
- [18] 罗传文. 联结度指数构造模型及其应用 [J]. 林业科学, 2004, 40(2):183~188

(责任编辑 苏 青)