

利用线化和校正法求非线性振动近似解

林少光, 龚善初

广东揭阳职业技术学院机电工程系, 广东揭阳 522000

摘要 非线性问题研究是当今工程应用研究的热点问题之一, 常规方法有多尺度法、积分法、平均法、同伦摄动法等。但常规方法所能解决的非线性问题仍然十分有限。本文应用线化和校正法, 研究了 Duffing 方程的非线性振动, 分别求出了 Duffing 方程非线性振动周期的精确解和近似解, 利用 Maple 9.0 绘图分别作出了 Duffing 方程周期、绝对误差和相对误差随参数 k 的变化曲线。所得结论为 Duffing 方程周期随参数 k 的增加而减小, 相对误差随参数 k 的增加而增加; Duffing 方程周期近似解与精确解比较, 具有简单实用、精度高、相对误差低等优点。该方法在求解非线性振动中具有较强的理论价值和实用价值。

关键词 非线性振动; Duffing 方程; 近似解; 线化和校正法

中图分类号 O322

文献标识码 A

文章编号 1000-7857(2009)23-0066-04

The Approximate Solution of a Nonlinear Oscillation by a Method of Linearization and Correction

LIN Shaoguang, GONG Shanchu

Department of Mechanical and Electronic Engineering, Jieyang Vocational & Technical College, Jieyang 522000, Guangdong Province, China

Abstract The nonlinear problems are frequently found in practical engineering. Among the common methods applied for these problems are the multiple scale method, the integral calculus method, the average method, and the homotopy method, but they have very limited capability in real applications. The nonlinear oscillations of the Duffing equations are studied by means of the method of linearization and correction, and the approximate solutions are compared with the exact solutions. With Maple 9.0, the curves of the period, the absolute error and the relative error are plotted against the parameter. It is concluded that the period decreases and the relative error increases with the increase of parameter; as compared to the exact solution, the approximate solution is simple, with high accuracy and lower relative error. So the method of linearization and correction is very useful in solving problems of nonlinear oscillations.

Keywords nonlinear oscillations; Duffing equations; approximate

solution; linearization and correction method

0 引言

在工程实际中, 除了极少部分理想模型是线性方程解之外, 大部分工程应用都是非线性问题, 因此, 非线性问题是当今工程应用研究的热点问题之一。非线性方程的求解, 是困扰数学和工程的难题之一, 非线性振动的近似解, 常用积分法^[1]、迦辽金-里兹法^[2]、多尺度法^[3]、Taylor 展开法^[3]、平均法^[4]、渐近法(又称 KBM 法)^[4]、摄动法^[5]、广义 PLK 法^[6]、变分迭代法^[7]等求解。本文利用一种拟摄动理论——线化和校正方法求非线性振动的近似解。

线化和校正法求解非线性方程的基本思想如下。设有非线性方程

$$\ddot{u} + \omega^2 u = N(u) \quad u(0) = A \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (1)$$

式中 N 为非线性算子。

把方程(1)中的非线性项 $N(u)$ 用线性项 αu (α 为一个线性化参数)逼近, 得到线性化方程

$$\ddot{u} + \beta^2 u = 0 \quad u(0) = A \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (2)$$

式中 $\beta^2 = \omega^2 + \alpha$, 于是方程(1)可等价表示为

$$\ddot{u} + \beta^2 u - N(u) - \alpha u = 0 \quad u(0) = A \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (3)$$

设方程(1)或方程(3)的近似解为

$$u = u_0 + u_1 \quad (4)$$

式中 u_0 为线性化方程(2)的解, 很明显有 $u_0 = A \cos \beta t$; u_1 为 u_0 的校正项, 且有 $|u_0| \gg |u_1|$ 。

把方程(4)代入方程(3), 得

收稿日期: 2009-10-18

基金项目: 广东揭阳学院 2006 年院级重点科研项目(JYCKZ0604)

作者简介: 林少光, 讲师, 研究方向为大学物理教学与研究, 电子信箱: lsg@jyc.edu.cn; 龚善初(通信作者), 教授, 研究方向为非线性振动, 电子信箱: gsc@jyc.edu.cn

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \beta^2 u_1 - N(u_0 + u_1) - \alpha(u_0 + u_1) = 0 \\ u_1(0) = 0, \dot{u}_1(0) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

由于 $|u_0| \gg |u_1|$, 故有

$$N(u_0 + u_1) \approx N(u_0) \quad \alpha(u_0 + u_1) \approx \alpha u_0 \quad (6)$$

于是, 式(5)可近似用以下线性方程表示

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \beta^2 u_1 - N(u_0) - \alpha(u_0) = 0 \\ u_1(0) = 0, \dot{u}_1(0) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

1 非线性振动的近似解

以非线性 Duffing 方程为例, 为便于比较, 先给出非线性 Duffing 方程的精确解, 然后求出非线性 Duffing 方程的近似解。

1.1 非线性 Duffing 方程精确解

为便于计算, 在解方程前进行无量纲化处理, 有如下形式的 Duffing 方程^[8]

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0 \quad x(0) = A \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (8)$$

对式(8)作变量代换 $\dot{x} = y$, 则式(8)变为

$$y \frac{dy}{dx} + x + \varepsilon x^3 = 0 \quad (9)$$

分离变量求积分得

$$t = \pm \int_A^x \frac{dx}{\sqrt{2C - x^2 - \varepsilon x^4/2}} \quad (10)$$

式中 C 为积分常数。

设 Duffing 运动精确解与 x 轴的两个交点分别为 $(A, 0)$ 和 $(-A, 0)$, 则积分常数 C 为

$$C = \frac{A^2}{2} + \frac{\varepsilon A^4}{4} \quad (11)$$

将积分常数 C 代入式(10), 得

$$t = \pm \int_A^x \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \varepsilon A^2 + \frac{1}{2} \varepsilon x^2}} \quad (12)$$

引进变换 $x = -A \cos \theta$, 上式可化为标准椭圆积分, 故式(12)变为

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon A^2}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k \sin^2 \theta}} \quad (13)$$

其中 $k = \frac{\varepsilon A^2}{2(1 + \varepsilon A^2)}$ 。

相平面从点 $(-A, 0)$ 到 $(A, 0)$ 是半个周期, 故周期精确解 T_{ex} 为

$$T_{ex} = \frac{2}{\sqrt{1 + \varepsilon A^2}} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k \sin^2 \theta}} \quad (14)$$

上式为第一类完全椭圆积分, 可以通过查表得到。

1.2 非线性 Duffing 方程的近似解

对式(8), 将非线性项 εx^3 线化为 $\varepsilon x^3 \sim \alpha x$, 式中 α 为线化参数。于是得到线化方程

$$\ddot{x} + \beta^2 x = 0 \quad x(0) = A \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (15)$$

其中 $\beta^2 = 1 + \alpha$ 。

设 $x = x_0 + x_1$, $x_0 = A \cos \beta t$ 为线化方程(15)的解, x_1 为 x_0 的校正项。于是可得

$$\ddot{x}_1 + \beta^2 x_1 + \varepsilon(x_0 + x_1)^3 - \alpha(x_0 + x_1) = 0 \quad (16)$$

根据线化和校正方法理论的基本假设: $|x_0| \gg |x_1|$, 方程(16)近似为

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \beta^2 x_1 + \varepsilon x_0^3 - \alpha x_0 = 0 \\ x_1(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

把 $x_0 = A \cos \beta t$ 代入上式可得

$$\ddot{x}_1 + \beta^2 x_1 + \varepsilon A^3 \cos^3 \beta t - \alpha A \cos \beta t = 0 \quad (18)$$

由三角恒等式知

$$\cos^{2n+1} \phi =$$

$$\frac{1}{2^{2n}} \left[\cos(2n+1)\phi + (2n+1)\cos(2n-1)\phi + \cdots + \frac{(2^n+1)!}{n!(n+1)!} \cos \phi \right]$$

$$\cos^3 \beta t = \frac{1}{4} [\cos 3\beta t + 3\cos \beta t]$$

将 $\cos^3 \beta t$ 展开式代入式(18), 合并同类项, 得

$$\ddot{x}_1 + \beta^2 x_1 + \left(\frac{3}{4} \varepsilon A^2 - \alpha \right) A \cos \beta t + \frac{1}{4} \varepsilon A^3 \cos 3\beta t = 0 \quad (19)$$

因 x_1 是 x_0 的一级校正项, 通过 Newton 迭代公式, 一级校正项具有很高的精度, 对于二级校正项 x_2 , 三级校正项 $x_3, \dots$, 通过不断的迭代可得到精度更高的近似解。由于每一次迭代中校正项 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 都会出现 $\cos \beta t$, 故称 $\cos \beta t$ 为迭代中的长期项, 为满足条件 $|x_0| \gg |x_1| \gg |x_2| \gg \cdots \gg |x_n|$, 需消除长期项^[9-10], 令 $\cos \beta t$ 的系数为零, 得线化参数 α 为

$$\alpha = \frac{3}{4} \varepsilon A^2$$

于是线性方程式(15)的解为

$$x_1 = -\frac{A^3}{32\beta^2} (\cos \beta t - \cos 3\beta t) \quad (20)$$

故方程式(8)的近似解为

$$x = x_0 + x_1 = A \cos \beta t - \frac{A^3}{32\beta^2} (\cos \beta t - \cos 3\beta t) \quad (21)$$

由 $\beta^2 = 1 + \alpha$ 和 $\alpha = \frac{3}{4} \varepsilon A^2$ 可知, 角频率为

$$\beta = \sqrt{1 + \alpha} = \sqrt{1 + \frac{3}{4} \varepsilon A^2} \quad (22)$$

于是非线性 Duffing 方程的近似解 T_{app} 为

$$T_{app} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + 3\varepsilon A^2/4}} \quad (23)$$

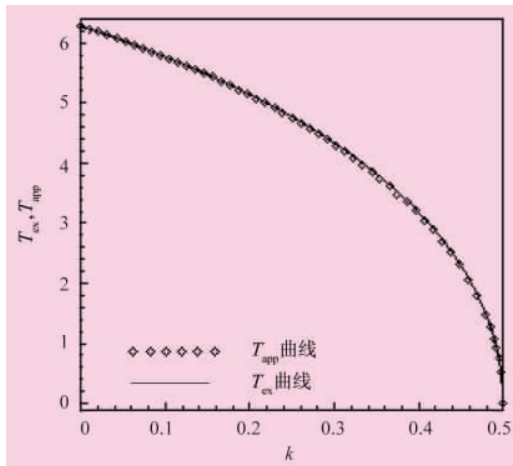
2 结论与讨论

2.1 T_{ex} 和 T_{app} 随参数 k 的变化曲线

为简单计算, 设 $0 \leq \varepsilon \leq \infty$, 即 $0 \leq \varepsilon A^2 \leq \infty$, 由 $k = \frac{\varepsilon A^2}{2(1 + \varepsilon A^2)}$ 知, $0 \leq k \leq 0.5$, 利用 Maple 9.0 绘图^[11], T_{ex} 和 T_{app} 随参数 k 的变化曲线分别如图 1 所示。

2.2 T_{ex} 和 T_{app} 的绝对误差 ΔT 随参数 k 的变化曲线

设非线性 Duffing 方程的周期精确解 T_{ex} 与近似解 T_{app} 的

图1 T_{ex} 和 T_{app} 随参数 k 的变化曲线Fig. 1 T_{ex} and T_{app} vs parameter k

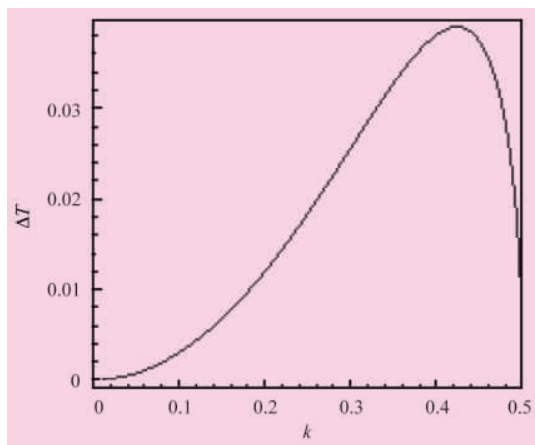
绝对误差为 ΔT , 则绝对误差 ΔT 为

$$\Delta T = T_{\text{ex}} - T_{\text{app}} \quad (24)$$

将式(14)、(23)表示成参数 k 的函数并化简代入式(24)得

$$\Delta T = 2\sqrt{1-2k} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k\sin^2\theta}} - \frac{2\pi\sqrt{2-4k}}{\sqrt{2-k}} \quad (25)$$

取 $0 \leq k \leq 0.5$, 利用 Maple 9.0 绘图^[11], ΔT 随参数 k 的变化曲线如图 2 所示。

图2 ΔT 随参数 k 的变化曲线Fig. 2 ΔT vs. parameter k

2.3 T_{ex} 和 T_{app} 的相对误差 E_r 随参数 k 的变化曲线

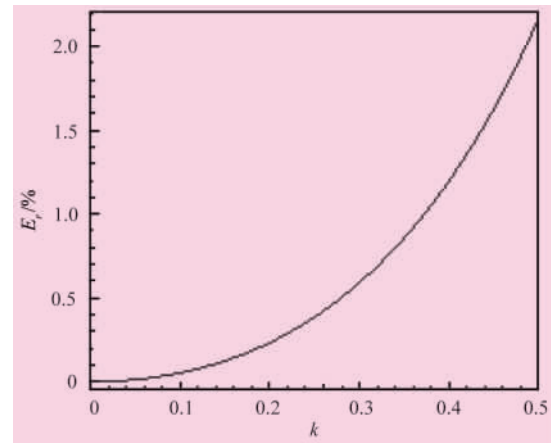
设非线性 Duffing 方程的周期近似解 T_{app} 与精确解 T_{ex} 的相对误差为 E_r , 则相对误差 E_r 为

$$E_r = \frac{|T_{\text{ex}} - T_{\text{app}}|}{T_{\text{ex}}} \times 100\% \quad (26)$$

将式(14)、(23)表示成参数 k 的函数并化简代入式(26)得

$$E_r = \frac{\left| 2\sqrt{1-2k} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k\sin^2\theta}} - \frac{2\pi\sqrt{2-4k}}{\sqrt{2-k}} \right|}{2\sqrt{1-2k} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k\sin^2\theta}}} \times 100\% \quad (27)$$

利用 Maple 9.0 绘图^[11], 取 $0 \leq k \leq 0.5$, E_r 随参数 k 的变化曲线如图 3 所示。

图3 E_r 随参数 k 的变化曲线Fig. 3 E_r vs parameter k

由式(26)知, 当 $k=0.5$ 时, 分子 $T_{\text{ex}} - T_{\text{app}} = 0$, 故 T_{ex} 与 T_{app} 的相对误差 $E_r = 0$, 但由式(27)知, E_r 变为 $0/0$ 型, $\lim_{k \rightarrow 0.5} E_r = 2.1723$, 图 3 显示的在 $k=0.5$ 时仅表示 $E_r = 0/0$ 型, E_r 的极限值为 2.1723, 这一点的值并不表示 E_r 的物理意义。

2.4 周期精确解 T_{ex} 与近似解 T_{app} 比较

对式(14)Duffing 方程周期精确解 T_{ex} 和式(23)利用 Maple 9.0 计算^[11], 得 Duffing 方程的 T_{ex} 与 T_{app} 的比较如表 1 所示。

表 1 Duffing 方程的 T_{ex} 与 T_{app} 比较
Table 1 A comparison between T_{ex} with T_{app}
of Duffing equations

k	εA^2	T_{ex}	T_{app}	ΔT	$E_r/\%$
0	0	6.283 2	6.283 2	0	0
0.10	0.250 0	5.768 8	5.765 8	0.003 0	0.052 0
0.20	0.666 7	5.142 2	5.130 2	0.012 0	0.233 4
0.30	1.500 0	4.335 8	4.310 2	0.025 6	0.590 4
0.40	4.000 0	3.179 7	3.141 6	0.038 1	1.198 2
0.50	∞	0	0	0	0

由图 1 可知, 周期近似解 T_{app} 与精确解 T_{ex} 随参数 k 的增加而减小, T_{app} 和 T_{ex} 随参数 k 的变化曲线几乎完全一致, 表 1 计算结果与图 1、图 2 和图 3 (图 3 中除 $k=0.5$ 一点外) 完全吻合; 由图 3 知, E_r 随参数 k 的增加而增加。

因此该方法是一种行之有效、简单方便、精度高、误差低的方法, 在求解非线性振动中具有一定的实用价值。

参考文献 (References)

- [1] 屈维德, 唐恒龄. 机械振动手册 [M]. 2 版. 北京: 机械工业出版社, 2000: 528-529.

- Qu Weide, Tang Hengling. Handbook of mechanical oscillations[M]. 2nd. Beijing: Machinery Industry Press, 2000: 528-529.
- [2] 倪振华. 振动力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1990: 288-295.
Ni Zhenghua. Oscillation mechanics[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1990: 288-295.
- [3] Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear oscillations [M]. New York: Wiley, 1979: 153-160.
- [4] 龚善初. 物理学与工程技术中非线性振动的常见求解方法 [M]. 北京: 中国科学文化出版社, 2006.
Gong Shanchu. Common solutions to nonlinear oscillations in physics and engineering technology [M]. Beijing: China Scientific & Cultural Press, 2006: 35-37.
- [5] 程昌钧, 戴世强, 刘宇陆. 现代数学和力学[M]. 上海: 上海大学出版社, 1997: 47-53.
Chen Changjun, Dai Shiqian, Liu Yulu. Modern mathematics and mechanics[M]. Shanghai: Shanghai University Press, 1997: 47-53.
- [6] Dai S Q, Sigalov G F, Diogenov A V. Approximate analytical solution for some strongly nonlinear problems [J]. *Science in China: Ser A*, 1990, 33 (7): 153-162.
- [7] 何吉欢. 非线性问题的变分近似方法及其应用 [J]. 力学与实践, 1998, 20(1): 30-32.
He Jihuan. *Mechanics & Practice*, 1998, 20(1): 30-32.
- [8] 闻邦椿, 李以农, 韩清凯. 非线性振动理论中的解析方法及工程应用 [M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2001: 23-32.
Wen Bangchun, Li Yinong, Han Qingkai. Analytic solutions to nonlinear oscillation theory and their applications in engineering [M]. Shenyang: Northeastern China University Press, 2001: 23-32.
- [9] 龚善初. 利用线化和校正法求非线性单摆运动的周期 [J]. 大学物理, 2006, 25(2): 16-18.
Gong Shanchu. *College Physics*, 2006, 25(2): 16-18.
- [10] 何吉欢. 求解摄动问题的一种新方法 [J]. 上海大学学报, 1998, 4(3): 323-325.
He Jihuan. *Journal of Shanghai University*, 1998, 4(3): 323-325.
- [11] 黎捷. Maple 9.0 符号处理及应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2004: 156-159.
Li Jie. Maple 9.0 symbol handling and application[M]. Beijing: Science Press, 2004: 156-159.

(责任编辑 齐志红)

时间: 2010年5月17-21日
地点: 中国·北京

25th
International
Symposium on
Ballistics

2010 Beijing

第25届国际弹道大会

25th International Symposium on Ballistics

主办: 中国兵工学会

电话: 010-68963154
<http://www.isb2010.com>