

# Hopf 分岔的一个数值算法

农绍宁

中国工程物理研究院总体工程研究所, 四川绵阳 621900

**[摘要]** 在特定条件下, 用 Runge-Kutta 数值法求解平面自治系统标准 Hopf 分岔方程这一类非线性常微分方程时, 出现与理论解不符合的情况。列举了几种算例下出现的这一情况, 针对该问题, 给出一个改进的数值算法, 得到更精确的解。

**[关键词]** 数值算法; Hopf 分岔

**[中图分类号]** O322

**[文献标识码]** A

**[文章编号]** 1000-7857(2007)11-0030-04

## A Numerical Algorithm for Hopf Bifurcation

NONG Shaoning

*Institute of Systems Engineering, China Academy of Engineering Physics, Mianyang 621900, Sichuan Province, China*

**Abstract:** The numerical results are not consistent with the theoretical ones when solving the Hopf bifurcation problems of planar autonomous system by means of Runger-Kutta method on certain conditions. In this paper, several examples of this problem are discussed. Finally, a new method is proposed to solve this problem and the validity of the method is demonstrated.

**Key Words:** numerical calculation; Hopf bifurcation

**CLC Number:** O322

**Document Code:** A

**Article ID:** 1000-7857(2007)11-0030-04

### 0 引言

由于非线性动力学的复杂性, 获得解析解几乎是不可能的, 目前仍主要局限于数值仿真。Matlab 提供了数值求解常微分方程的程序包 ODE 系列。该程序包功能全、使用简便, 广泛应用于求解非线性常微分方程的数值解, 以验证理论解的正确性<sup>[1-3]</sup>。尤其高精度的 4~5 阶变步长 Runge-Kutta 法(即 ODE45)最为常用。但是, 数值解法难免存在误差, 引起收敛及稳定性上的问题, 从而得到一些意想不到的结果。本文以平面自治系统标准 Hopf 分岔方程为例, 列举了用 Matlab 求解出现的一些问题, 并给出一个改进的数值算法。

### 1 平面自治系统 Hopf 分岔方程及数值计算

研究 Hopf 分岔的平面自治系统示例方程一般形式为<sup>[4]</sup>

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \omega y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = \omega x + \alpha y - y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2) \\ \dot{\varphi} = \omega \end{cases} \quad (1)$$

当参数  $\alpha > 0$  时,  $\rho$  值较小, 线性项  $\alpha\rho$  起主要作用, 轨线螺旋向外;  $\rho$  值较大, 非线性项  $-\rho^3$  起主要作用, 轨线螺旋向内, 两者必有一个交叉值, 其相图为一个收敛的不变圈, 见图 1。参数  $\alpha$  确定了不变圈矢径  $\rho$  的大小, 有  $\rho = \sqrt{\alpha}$ 。

当  $\alpha = 0.0004$  时,  $\rho = \sqrt{\alpha} = 0.02$ , 以下总设  $\omega = 3$ 。不论初始值取值范围如何, Matlab 的 ODE45 结果均得到正确的相图(见图 2)。

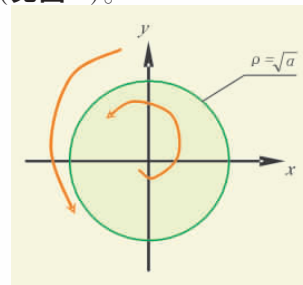


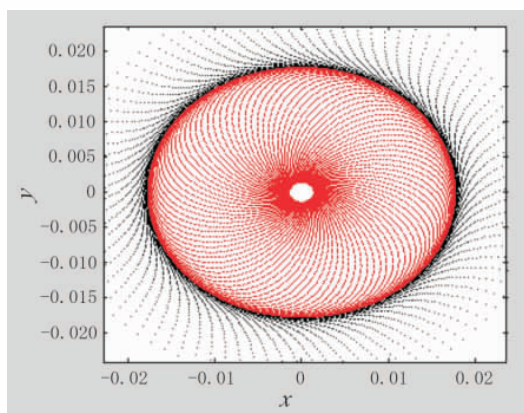
图 1 Hopf 分岔相图

Fig. 1 Portraits of Hopf bifurcation

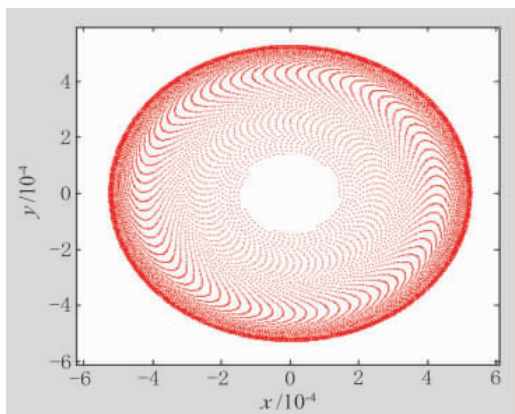
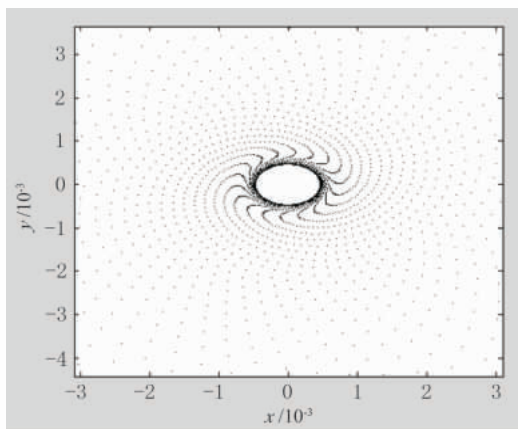
收稿时间: 2006-12-20

作者简介: 农绍宁, 男, 四川省绵阳市中国工程物理研究院总体工程研究所, 工程师, 主要从事非线性动力学与稳定性研究;

E-mail: nsn2004@163.com

图 2  $\alpha=0.0004$  相图Fig. 2 Phase portraits for  $\alpha=0.0004$ 

当  $\alpha=0.0004$  时,  $\rho=\sqrt{\alpha} \approx 0.0063$ 。初始值取原点附近, 得相图如图 3 所示, 不变环半径约为 0.0005, 显然未得到正确的相图。初始值取不变圈以外的点 (如取 (0.06, 0.06)), 也收敛于图 3 的圆环上, 相图见图 4 所

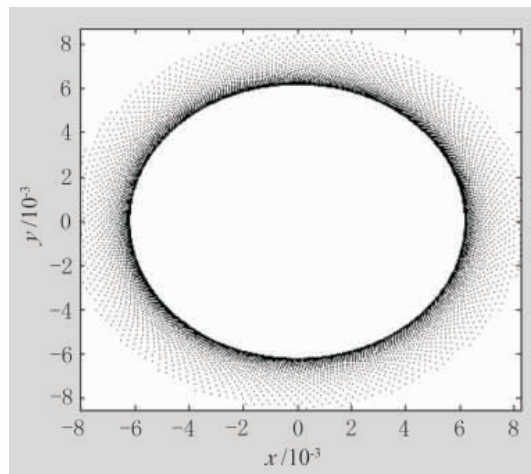
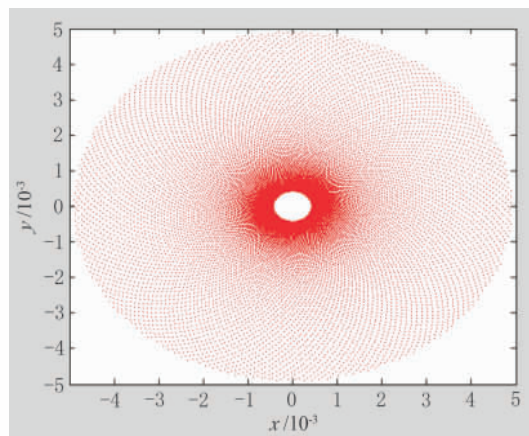
图 3  $\alpha=0.0004$  初始点取原点附近的相图Fig. 3 Phase portraits for  $\alpha=0.0004$  near the origin图 4  $\alpha=0.0004$  初始点取圆环外的相图Fig. 4 Phase portraits for  $\alpha=0.0004$  outside the limit circle

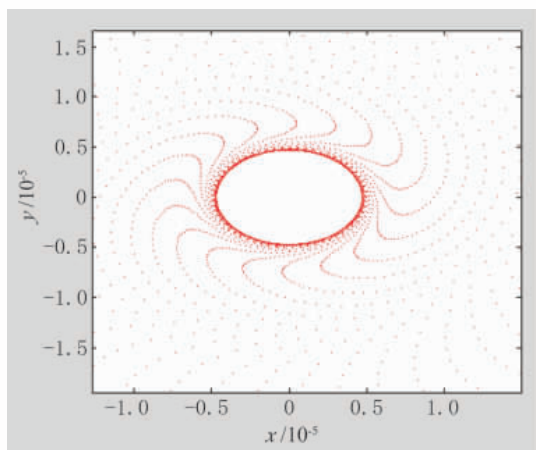
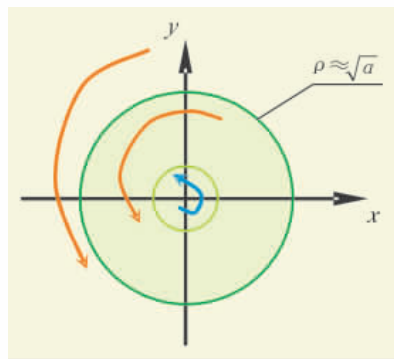
示。若提高 ODE45 计算的相对误差和绝对误差, 例如两者取  $10^{-8}$ , 则初始值取不变圈以外的点获得“正确”的相图, 见图 5。而初始值取原点附近时, 得到半径很小的圆环相图, 见图 6、图 7。在相对误差和绝对误差为  $10^{-8}$  时, 进一步的计算表明, 数值计算出现的是两个极限环, 轨迹如图 8 所示。

当  $\alpha$  逐渐变小时, 如  $\alpha=0.000004$  时,  $\rho=\sqrt{\alpha} \approx 0.002$ 。计算结果与上例相似, 出现两个极限环。而内圈的环的半径也逐渐变小, 且为一收敛的极限环。进一步的分析表明, 内环是由以下的线性系统产生

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega y \\ \dot{y} = \omega x \end{cases} \quad (2)$$

但是, 上述线性系统是不会出现极限环的, 其相图应为一簇同心圆。

图 5  $\alpha=0.0004$  提高误差限的相图 (外环)Fig. 5 Phase portraits for  $\alpha=0.0004$  with increased error tolerance (outside circle)图 6  $\alpha=0.0004$  提高误差限的相图 (内环)Fig. 6 Phase portraits for  $\alpha=0.0004$  with increased error tolerance (inner circle)

图 7  $\alpha=0.000\ 04$  提高误差限的局部相图(内环)Fig. 7 Local phase portraits for  $\alpha=0.000\ 04$  with increased error tolerance (inner circle)图 8  $\alpha$  很小的两极限环相图Fig. 8 Phase portraits for small value of  $\alpha$ 

## 2 计算分析及改进算法

当  $\alpha$  很小时,可以忽略掉含  $\alpha$  的项,同时,初始点取原点附近,可以忽略掉方程的三次项,这样,式(1)转化为式(2)。必须解决式(2)出现的收敛极限环问题,才有可能获得“准确”的结果。根据数值分析教程,4 阶显式 Runge-Kutta 法的稳定区间与矩阵特征值的实部、虚部有关,显式 Runge-Kutta 方法 1~4 阶的绝对稳定区域见图 9<sup>[5]</sup>。其中,实部为正的稳定域范围很小。而 Hopf 分岔出现的稳定极限环是从不稳定平衡点附近冒出来的,即极限环的存在区域是在平衡点的充分小的邻域内,捕获这样的极限环必须采用适合正实部值较小的算法。

常微分方程的数值解法是将导数离散成差分形式,不同的算法取不同的导数值,如前插欧拉方法取前一个点处的导数,后插欧拉方法取后一个点处的导数,Runge-Kutta 方法取前后之间几个点的导数,等等。对于式(2),其相图应为一圆环。考察圆环的导数,设  $K_1$  为前一个点(即  $(x_0, y_0)$ )处的导数,  $K_2$  为后一个点(即  $(x_1, y_1)$ )处的导数。

因为  $\dot{\theta}_i = f(r)$ ,故  $\frac{1}{2}dt$  转过的角度为  $dt$  的一半,如图 10 所示。若要从  $(x_0, y_0)$  经过  $dt$  到达准确的  $(x_1, y_1)$ ,应该沿斜率  $K'$  前进,而斜率  $K'$  就是  $\frac{1}{2}dt$  处的导数  $K_0$ 。由此,采用如下差分格式计算相图

$$\begin{cases} x_1 \\ y_1 \end{cases} = \begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases} + \frac{1}{2} \Delta t \begin{cases} \dot{x}(t_0 + \frac{1}{2} \Delta t) \\ \dot{y}(t_0 + \frac{1}{2} \Delta t) \end{cases} \quad (3)$$

本文编制了相应的 Matlab 程序,程序计算中,由于  $\frac{1}{2}dt$  处的导数  $K_0$  值未知,参考隐式欧拉方法,采用迭代法计算。可以取步长较小,使得隐式欧拉方法收敛<sup>[5]</sup>。图 11、图 12 分别给出了  $\alpha=0.000\ 04$  及  $\alpha=0.000\ 004$  时计算的相图,不论初始值位于圆环之内或之外,均收敛于正确的圆环上。可见显著改善了精度,获得了准确的结果。程序数值计算全部采用 Matlab 程序的默认相对误差及绝对误差。

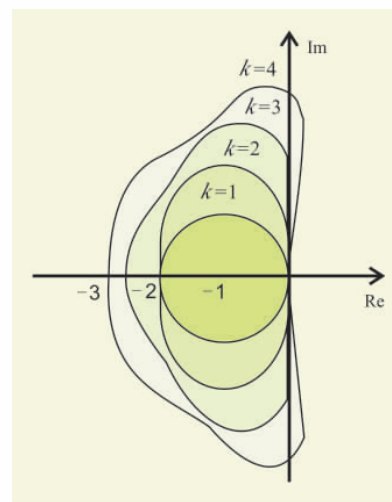


图 9 数值计算稳定域

Fig. 9 Stability zones of numerical calculation

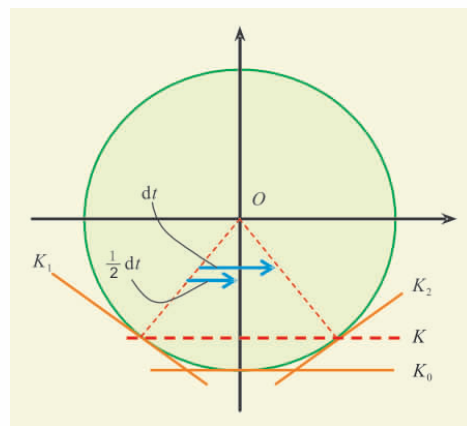
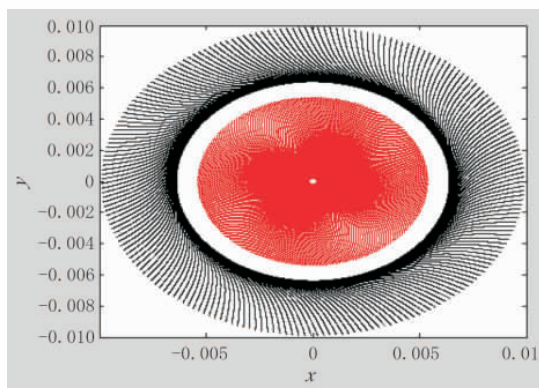
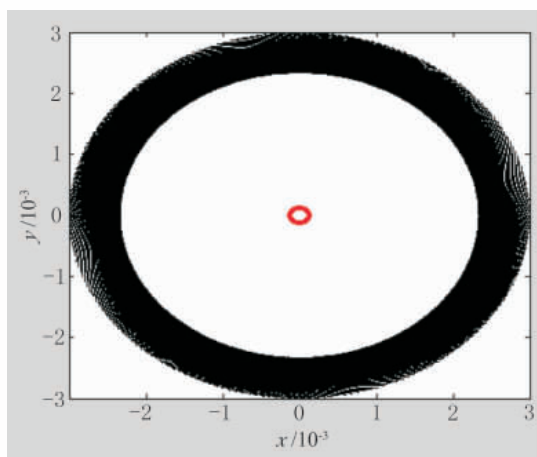


图 10 相图为圆环的导数位置图

Fig. 10 Derivative diagram of circle



图 11  $\alpha=0.000\ 04$  的相图Fig. 11 Phase portraits for  $\alpha=0.000\ 04$ 图 12  $\alpha=0.000\ 004$  的相图Fig. 12 Phase portraits for  $\alpha=0.000\ 004$ 

### 3 结论

用数值方法求解非线性微分方程, 必须注重数值结果的考察识别。本文针对 Hopf 分岔相图分析中 Runge-Kutta 数值解法出现的“伪环”进行研究, 提出了一个改进算法。从实例的比较结果可知, 该算法是有效的, 并获得了较准确的相图。

### 参考文献 (References)

- [1] AHAMADI M, GERVAIS J-J. Symbolic-numerical methods for the computation of normal forms of PDEs[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003, 158: 443-472.
  - [2] PENG Mingshu, UCAR A. The use of the Euler method in identification of multiple bifurcations and chaotic behavior in numerical approximation of delay-differential equations [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 21: 883-891.
  - [3] PENG Mingshu. Symmetry breaking, bifurcations, periodicity and chaos in the Euler method for a class of delay differential equations [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 24: 1287-1297.
  - [4] HALE J K, KOCAK H. Dynamics and bifurcations[M]. New York: Springer-Verlag, 1992: 344-350.
  - [5] 金一庆, 陈越. 数值方法 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2004: 202.
- JIN Yiqing, CHEN Yue. Numerical methods [M]. Beijing: China Machine Press, 2004: 202.

(责任编辑 齐志红)

### ·科技智力游戏·

如果将本栏目正确答案寄至本刊编辑部, 您将有获得自下期至 2008 年底的《科技导报》一套。

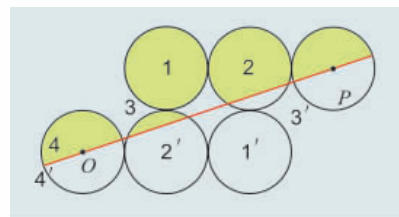
### 好玩的数学——扑克牌排序

把 A 到 K 共 13 张扑克牌排成一摞后按如下方式进行操作: 最上面的一张放到一摞的最底下, 下一张取出摆放在一边, 作为新一摞的第 1 张; 剩下摞的最上面一张放到最底下, 其下一张取出作为新一摞的第 2 张……一直如此重复下去, 直到原来一摞全部移成新的一摞。

问题: 原来一摞扑克牌按照什么顺序排放, 才能使新的一摞扑克牌的顺序从第 1 张到第 13 张恰好为 A, 2, 3, ..., Q, K。

#### 上期“等分面积”答案

在右上角作一个一样大小的辅助圆, 这样一来, 全部 6 个圆就其整体而言, 便构成了一个对称图形。设辅助圆的圆心是 P, 只要把 O, P 两点连成一条直线, 我们就可以把原先的 5 个圆的面积一分为二了。



原因很简单, 如图所示, 容易看出圆 1 和圆 1', 圆 2 和圆 2', 圆 3 和圆 3', 圆 4 和圆 4' 对应的面积分别相等, 因此由它们拼成的图形, 其面积自然也相等。

(供稿 韩雪涛 责任编辑 黄永明)