

大统一的混合网络模型中的相称性系数转变新特点

李 永, 方锦清, 刘 强

中国原子能科学研究院, 北京 102413

[摘要] 首先建立了大统一的混合网络模型(LUHNM),并在总混合比 dr 基础上,引入了两个新的混合比:随机性混合比 gr 和确定性混合比 fd ,用这 3 个混合比控制整个网络生长和特性变化。通过调控 dr, gr 和 fd ,不仅再现了无权网络中不同类型网络的特性(如 BA 模型,ER 模型,HUHPM 模型和 BPRA 模型等),而且发现在无权的大统一的混合网络模型中出现了若干新现象和新特点:随着 3 个混合比的变化,相称性系数 r_c 可以在一个 $(-1, 1)$ 较大范围内变化,在 $dr=1/1$ 附近存在一个阈值 $fd=0.9/1$,随着 fd 的增加, r_c 实现从负值到正值大范围的转变;当 $dr \rightarrow 1/0$ 时,在 $fd=1/1$ 附近存在一个阈值(相变点),相称性系数 r_c 数值将从零附近迅速增加到较大的正值;特别是随着 $fd \rightarrow 1/1$, r_c 出现了多峰现象(多极值情形)。

[关键词] 相称性系数;大统一混合模型;混合比;复杂网络

[中图分类号] O231.3, N93, O415

[文献标识码] A

[文章编号] 1000-7857(2007)11-0023-07

New Features of Assortativity Characteristic Transition in Large Harmonious Unifying Networks Model

LI Yong, FANG Jinqing, LIU Qiang

China Institute of Atomic Energy, Beijing 102413, China

Abstract: Based on the harmonious unifying hybrid model, the large harmonious unifying network model (LUHNM) is further developed. In this model, two more hybrid ratios, which are gr and fd , are defined besides the previous total hybrid ratio dr . They are introduced as the deterministic hybrid ratio and the random hybrid ratio, respectively. The ratio dr controls the number of deterministic attachment and random attachment. The networks grow through adjusting the three hybrid ratios. In this paper, several new features of assortativity characteristic transition are revealed. The famous un-weighted BA model, ER model and HUHPM model can deduced by assigning different values of the three hybrid ratios. It is found that assortativity coefficient r_c can vary in a large range of $(-1, 1)$, and there exists a threshold value nearby at $fd=0.9/1$ as $dr=1/1$, where r_c can have a transition from negative to positive values. Also r_c can be rapidly increased to a large value from near zero at $fd=1/1$ as $dr \rightarrow 1/0$. In addition, the multi-peak phenomena of r_c appear as $fd \rightarrow 1/1$. These results can provide a better understanding about the evolution characteristics and the difference in growing complex networks between social networks and technological and biological networks.

Key Words: assortative coefficient; large harmonious unifying network model; hybrid ratios; complex networks

CLC Numbers: O231.3, N93, O415

Document Code: A

Article ID: 1000-7857(2007)11-0023-07

收稿日期: 2007-04-02

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(70431002), 中国原子能科学研究院院长基金项目(YZ0618)

作者简介: 李 永,男,北京市房山区良乡镇中国原子能科学研究院,博士研究生,研究方向为复杂网络;E-mail: liyong@ciae.ac.cn

方锦清(通讯作者),男,北京市房山区良乡镇中国原子能科学研究院,研究员,研究方向为网络科学、非线性科学和复杂性科学;E-mail: fj96@126.com

0 引言

现实生活中存在着大量的网络,包括社会网络、信息网络、技术网络、生物网络等。近年来,复杂网络引起了各个领域的密切关注,促使人们去研究这些复杂网络的拓扑特性,深入揭示和理解不同拓扑关系产生的不同的网络特性,并进一步研究复杂网络的拓扑结构与动力学行为的关系。其中,“小世界效应”、“无标度特性”、“度-度关联(或称相称性混合)”等网络特性已经在各种网络模型中得到了广泛研究^[1-3]。网络中的度-度关联性对网络的拓扑产生重要的影响,它对于深刻了解网络信息传播或传染病的传播特性以及网络的鲁棒性等问题具有重要意义^[4-7]。

根据 Newman 对相称性系数 r_c 的定义,可以简化计算如下^[8]。

$$r_c = \frac{\frac{1}{M} \sum_i j k_i - \left[\frac{1}{M} \sum_i \frac{1}{2} (j_i + k_i) \right]^2}{\frac{1}{M} \sum_i \frac{1}{2} (j_i^2 + k_i^2) - \left[\frac{1}{M} \sum_i \frac{1}{2} (j_i + k_i) \right]^2} \quad (1)$$

其中, M 为网络的总边数; j_i, k_i 分别为连接第 i 条边的两个顶点 j, k 的度; $i=1, 2, \dots, M$ 。

社会网络显示度大的结点往往倾向于与其他度大的结点相连^[8-9],此时相称性系数大于零,称为同配网络;技术网络和生物网络中度大的结点优先与度小的结点相连,此时相称性系数小于零,称为异配网络^[10-11]。如果结点之间的度没有关联,则相称性系数等于零。通过无权网络的数值模拟计算和初步理论分析发现,随着 3 种混合比的变化,相称性系数 r_c 出现多峰现象(多极值),以及可以在 $(-1, 1)$ 之间大范围内转变等新特点。这些结果将有助于揭示社会网络、技术及生物网络之间的联系,以及进一步探索在统一混合的含权网络中不同的拓扑关系及其动力学性质。

1 大统一的混合网络模型的建立

不论是社会网络,还是物理网络、生物网络和技术网络,都包含随机性和确定性两种混合过程,只是混合的程度不同。为了进一步研究随机性和确定性在不同混合连接方式下对整个网络特性产生的影响,本文首先建立了一个较文献^[12-18]提出的“和谐统一择优模型”(HUHPM)更广泛的统一混合模型。考虑到现实网络中,随机性和确定性两大类连接存在多种表现方式,既可能“择优”,又可能“扶贫”,也可能采取“折中”,还可能是“平衡”,或者其他多种混合方式连接,因此需要把 HUHPM 推广到“大统一混合模型”(LUHNM),将目前大多数网络模型统一概括在内,同时加入确定性因素,以适应各种真实世界网络研究的需要。

此外,虽然现在大量实际网络存在幂律形式的度分布,但它并不是严格的幂律形式,同时还存在其他类型的度分布。为此,在 HUHPM 模型^[12-18]、总混合比 dr 的基础上,引进了两个新的混合比 fd 和 gr 作为调控参数,

通过调节这 3 个混合比选择网络增长方式,对随机性和确定性两大类不同连接方式进行更深入的研究,期望能够得到比较符合实际网络的拓扑和动力学特性,以及较为完整的理论模型,从而揭示混合网络的拓扑性质和相称性系数随 3 种混合比的转变特点。

本文将大统一混合模型应用于著名的无权 BA 模型和 ER 模型,称之为无权 LUHNM 模型,算法如下。

1) 增长。在初始时刻,假定系统中已有少量度为 m_0 的结点,在以后的每一个时间间隔中,新增一个度为 m 的结点 ($m \leq m_0$),并将这 m 条边连接到网络中已经存在的 m 个不同的结点上。

2) 连接。当在网络中选择结点与新增结点连接时,被选择的结点 i 与新结点连接的概率计算方法是按照所需混合比 dr ,确定结点 i 是随机性连接还是确定性连接。如果是随机性连接方式,以 gr 的比率按照 BA 模型的既定生长方式增长网络,以 $(1-gr)$ 的比率按照 ER 连接规则增长网络;如果是确定性连接方式,则按照度分布进行排序,以 fd 的比率按照最大度择优增长网络,以 $(1-fd)$ 的比率按照最小度选择增长网络。

$$dr = \frac{d}{r} \quad (2)$$

$$gr = \frac{g}{r} \quad (3)$$

$$fd = \frac{f}{d} \quad (4)$$

其中, d 为总确定性连接(DA)的时步, r 为总随机性连接(RA)的时步, g 为一般随机连接(GPA)的时步, f 为确定性扶贫连接(HPA)的时步。

通过实施把随机性连接与确定性连接相结合的形式,经过 t 时间间隔后,便形成一个有 $N=m_0+mt$ 个结点、 mt 条边的网络。图 1 为 $N=14$ 时不同 dr 的模型演化示意图,其中点线表示随机择优连接,点划线表示一般随机连接,虚线表示确定性最小度连接,直线表示确定性最大度连接,带圈的数字表示结点加入网络的次序。

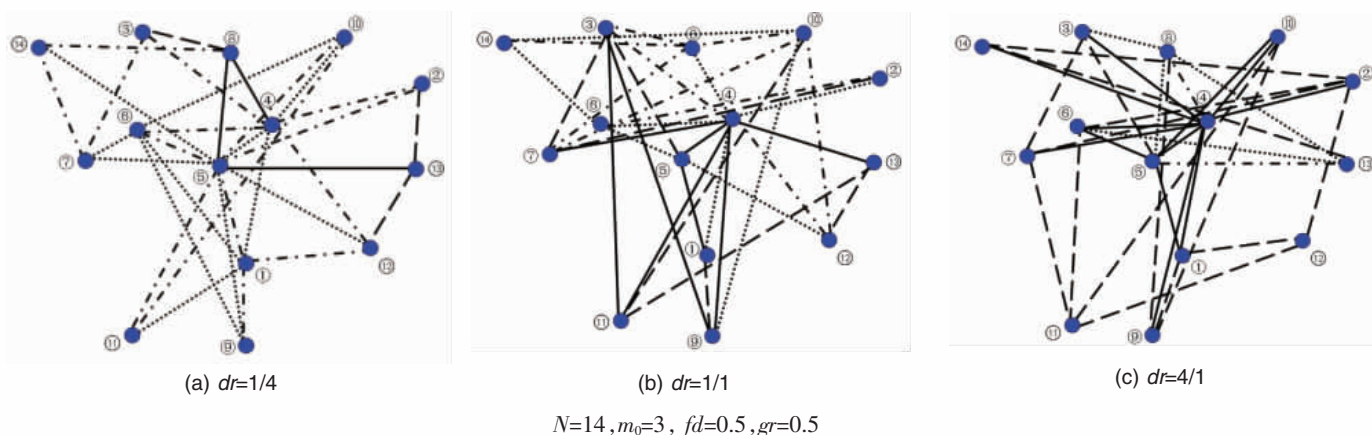
LUHNM 模型的主要理论框架概括如下。HUHPM 模型中,总混合比 dr 为第一层次混合比;新引入两个混合比作为第二层次的混合比:① fd 是确定性连接中确定性扶贫连接数与确定性总连接数之比,② gr 是随机性连接中一般等概率随机连接数与随机总连接数之比。因此,大统一混合模型至少有 3 个混合比可以灵活控制整个网络生长。事实上,根据实际研究需要,该模型还可以引进其他混和比。本文中,采用 3 个混合比,它们之间存在关系

$$DA = HPA + DPA \quad (5)$$

$$RA = GRA + RPA \quad (6)$$

其中, $dr \in [0, +\infty]$, $fd \in [0, 1]$, $gr \in [0, 1]$ 。

依照前面的定义,有 $gr=0/1$ 表示完全随机择优连接(RPA); $gr=1/1$ 表示完全一般随机连接(GRA); $fd=0/1$ 表示确定性连接时采用完全择优连接(DPA); $fd=1/1$ 表示采用确定性完全扶贫连接(HPA)。表 1 列出了 LUHNM 模型按照 3 个混合比进行不同组合所涵盖的

图 1 不同 dr 的无权 LUHNM 模型演化示意图Fig. 1 Network's evolution process according to different dr in un-weighted LUHNM model

若干网络模型。当 $fd=0/1$ 且 $gr=0/1$ 时,LUHNM 模型退化为 HUHPM 模型^[12];当 $fd=0/0$ (即 $dr=0/1$) 且 $gr=0/1$ 时,模型为 BA 模型^[20];当 $fd=0/0$ 且 $gr=1/0$ 时,模型为 ER 模型^[21-22];当 $gr \neq 0$ 且 $fd=0/0$ 时,为 BPRA 模型^[23];当 $fd \neq 0$ 且 $gr=0/0$ 时,为完全确定性模型(DNM)。这样可以依据任意类型网络各自的生长方式,即可采用一些已经被广泛研究的网络模型(包括无权或含权网络),深入研究这些网络模型出现的新特性。

表 1 若干网络模型与统一混合模型的关系及其控制参数

Table 1 Relation between some network models and LUHNM, and their control parameters

模型	参数		
	dr	gr	fd
LUHNM	可调	可调	可调
HUHPM	可调	0/1	0/1
BA	0/1	0/1	0/0
ER	0/1	1/0	0/0
BPRA	0/1	可调	0/0
DNM	1/0	0/0	可调

2 相称性系数

对于无权的 BA 模型、ER 模型、HUHPM 模型中的相称性系数,在文献[8,18]中已有相应描述。但是在无权 LUHNM 模型中,加入两个新混合比参数进行调控后,发现一些新的现象和特性。

如图 2 所示,对于初始结点 $m=m_0=3$,网络规模为 $N=1\ 000$ 的统一混合增长网络中对不同 fd 和 gr 情形的相称性系数 r_c 进行了数值模拟,计算结果是计算 50 次的平均值(以下皆同),并在半对数坐标下绘图。BA 模型中的 r_c 为图 2 中 $dr=0/1$ 且 $gr=0/1$ 对应的值;ER 模型中的 r_c 为图 2 中 $dr=0/1$ 且 $gr=1/1$ 对应的值;HUHPM 模型中的相称性系数 r_c 变化为图 2(a)中 $gr=0$ 的情形。Newman 曾提出 ER 模型中 r_c 应该为 0^[8],而 Callaway 通过引入一种随机增长模型($m=1$)与静态 ER 随机图进

行了比较,发现该模型有正的度的相关性^[24],通过调整模型参数, r_c 最大值约为 0.35;在 LUHNM 模型中,数值模拟显示增长的 ER 模型, r_c 最大值约为 0.2,同样表明具有正的度的相关性。

图 3 是 $gr=0/1$ 和 $gr=1/1$ 时对于不同 fd 情形 r_c 的变化图。可以看出, gr 的变化对整个网络的 r_c 的变化影响还是很小的。对于 $dr \rightarrow 1/0$ 的情形(接近网络规模 N),当 $fd \rightarrow 0/1$ 时,网络中有 m 个高聚集结点,网络中绝大部分结点都只与这 m 个高聚集结点连接,彼此之间没有连接;即度高的结点优先于度低的结点连接, $r_c \rightarrow -1$;当 $fd \rightarrow 1/1$ 时,网络中绝大部分结点具有相同的度,度分布相对比较均匀,度低的结点与度低的结点相连接, $r_c \rightarrow 1$;当 $fd=1/1$ 时, r_c 的值发生非线性剧变, r_c 的数值从 0 附近迅速增加到 0.7 左右,这说明少量非最小度连接会对网络的 r_c 有很大影响。

从图 2 中可以看出,对于不同的 dr ,随着随机性选择方式 gr 的变化, r_c 的值变化不是很大;但从图 3 可以看出,随着确定性选择方式 fd 的变化, r_c 的值在 $(-1, 1)$ 大范围内变化。当确定性选择方式从最大度择优($fd=0/1$)向最小度择优($fd=1/1$,即完全扶贫)过渡时,在 $dr=1/1$ 附近存在一个阈值 $fd=0.9/1$,当 $fd < 0.9/1$ 时, r_c 随 dr 单调线性增加;当 $fd > 0.9/1$ 时, r_c 出现极值情形,并实现从负值到正值的转变。另外,对于较大的 dr ,在 $fd=1/1$ 处的 r_c 值发生非线性剧变。

文中提出的大统一的混合网络模型,通过 3 个混合比参数调控,可以使相称性系数 r_c 在正负值之间实现较大范围的转变。也有其他模型^[19-20]通过可调的参数在相称和异配网络之间变化,得到的 r_c 可以在正负一定小范围之间转变,不同的是本文模型中的 r_c 变化的范围较之更宽,从而网络结构也更丰富多样。表 2 给出了不同模型的 r_c 变化范围。

对于社会网络、技术及生物网络之间的 r_c 不同,虽然 Newman 等提出了一些解决思路^[33],但也可以应用本模型进行合理解析。这是由于人类社会普遍具有“扶贫

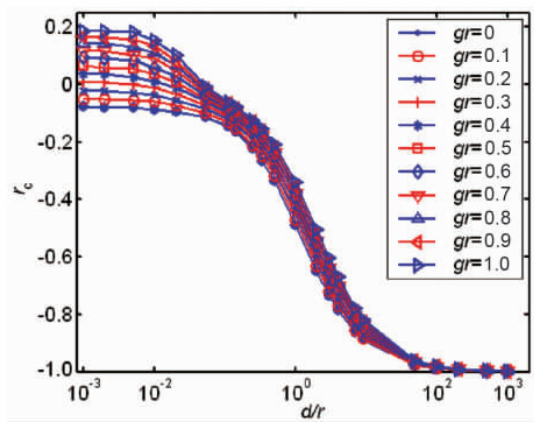
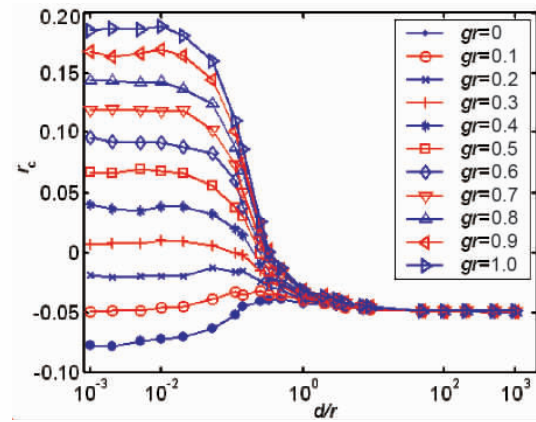
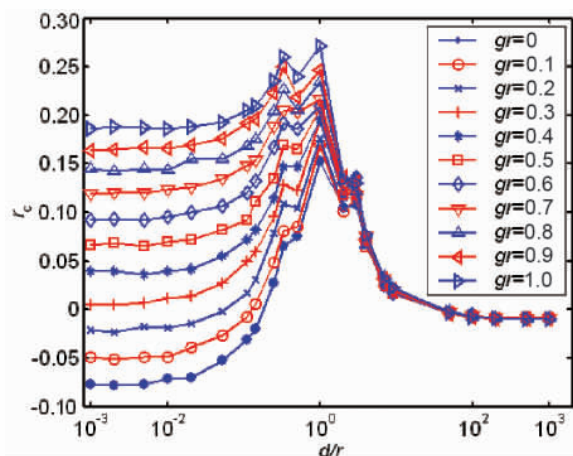
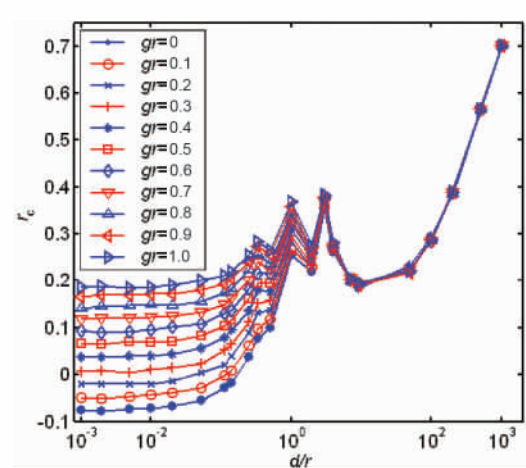
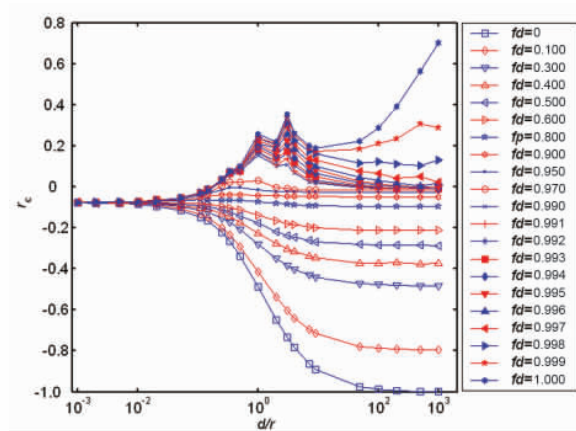
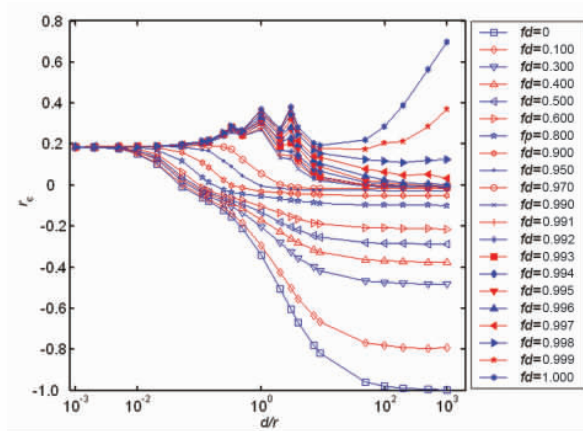
(a) $fd=0/1$ (b) $fd=0.9/1$ (c) $fd=0.99/1$ (d) $fd=1/1$ 图 2 半对数坐标下不同 gr 和 fd 情形下相称性系数 r_c 的变化Fig. 2 r_c as a function of dr for different gr and fd in semi-log scale(a) $gr=0/1$ (b) $gr=1/1$ 图 3 $gr=0/1$ 和 $gr=1/1$ 时对于不同 fd 情形 r_c 的变化Fig. 3 r_c as a function of dr for different fd

表 2 各种网络模型中 r_c 的变化范围
Table 2 Range of r_c in different network models

r_c 变化范围	网络模型或模型控制参数	参考文献
$[-1, 0]$ 或 $[0, 1]$	一种算法,有 1 个控制参数	[4]
0	BA 模型,随机 ER 模型	[8]
$[0, 0.5)$	Callaway 提出的一种模型,有 1 个控制参数	[8]
异配	相似无尺度网络	[25]
同配	地震网络	[26]
$(-1, 0]$	交通流驱动模型,有 1 个控制参数	[27]
同配	社会模型	[28]
$(-0.6, 0.3)$	相互吸引模型,2 个控制参数	[29]
$(-0.21, 0.41)$	22 个公共运输系统,观察到随着规模 N 的递增,出现异配到同配的转变,转变点约在 $N=500$	[30]
同配	cul.arxiv.org(科学家合作网)	[31]
0.4952	Penna 位串模型, $N=500$	[32]
$(-1, 1)$	统一混合模型(LUHNM),有 3 个控制参数	本文

济困”和“助人为乐”的社会美德和社会责任感,在 LUHNM 模型中,即使在无权网络下,一旦考虑完全扶贫(HPA)连接,或扶贫连接占绝对优势(90%以上)时,必然出现正的相称性系数;而且在一定条件下,相称性系数还随总混合比变化出现多极值情形,说明仍然依混合比的不同而出现新的变化特点和复杂性;并且正的相称性系数随随机性混合比 gr 的增加而线性地增加,当 $fd \geq 90\%$ 时出现非线性增长,数值变化范围很大,这是目前其他含权模型相称性系数只是小范围变化情况远所不及的^[29],说明出现正的相称性系数并非一定是含权(或结点双向吸引)网络的结果。至于技术网络,例如往往是采用强-强联合高科技网络,所以出现负的相称性系数。但如果国家或公司考虑的是技术扶贫,让东部地区的先进技术支持西部改变技术落后状态,从“高端技术”向“低端技术”扩散,这样组成的技术网络也会出现正的相称性系数。因此,相称性系数在正负之间的转变在各种类型网络都可能发生,这种转变特性与 3 个混合比密切相关。

应用本文模型还有助于理解现实生活中一些现象。模型中 $r_c > 0$ 的情形是网络中结点的大部分连接只发生在临近结点之间,而现实生活中人们总是生活在自己的“圈子”内,但由于其他因素(比如学术会议、工作调动等)的存在,总会与其他“圈子”的人发生联系,从而具有“小世界”现象。而这种结果就极大地降低了现实相称网络的 r_c 。模型中 $r_c < 0$ 的情形反映的是网络中有集聚结点的存在,比如万维网上面就存在一些访问率极高的网页。通过调整模型的参数可以控制集聚结点的出现以及集聚程度。

3 相称性系数的变化

图 4 反映了在不同混合比 dr 下中相称性系数 r_c 随 gr 和 fd 的变化。对于不同的 dr , r_c 和 gr 近似满足线性关

系

$$r_c = a \cdot gr + b, \quad gr \in [0, 1] \quad (7)$$

其中, a 为直线斜率, b 为直线在 r_c 轴上的截距。特别是当 $dr < 1/1$ 时, $a > 0$; 随着 dr 的增加, a 不断减少。当 $dr \rightarrow +\infty$, $a \rightarrow 0$ 时, 因为随着确定性连接的增加, 随机性连接 gr 产生的影响不断减少。此外, 当 $dr > 1/1$ 时, r_c 随 fd 变化的曲线为先凸后凹, 在 $fd=0.9/1$ 附近的点为拐点, 在拐点处往右 r_c 大幅度增加, 造成图 2、图 3 中的 r_c 出现剧变; 同时, 在 $dr=1/1$ 附近, r_c 增加速度大于附近 dr 的 r_c 增加速度, 于是产生了峰值。但是为什么在 $dr=1/1$ 附近会发生峰值, 仍需进一步深入研究。

对数值计算结果进行分析, 发现当 dr 比较小时, r_c 和 fd 近似满足线性关系

$$r_c = a' \cdot fd + b', \quad fd \in [0, 1] \quad (8)$$

式中 a' 为直线斜率, b' 为直线在 r_c 轴上的截距。

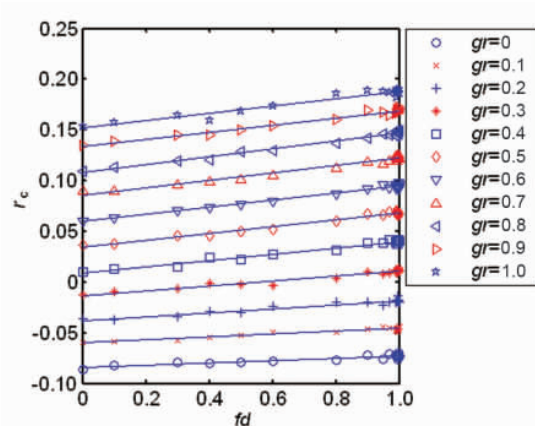
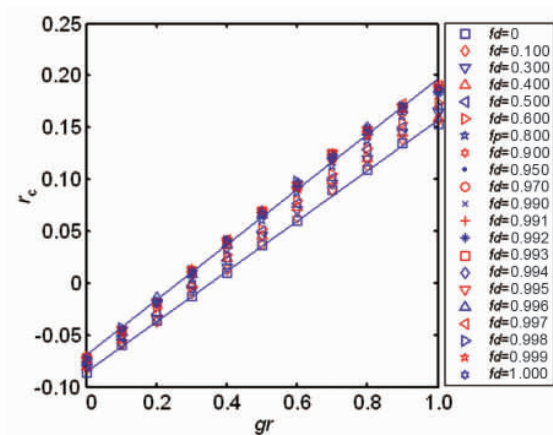
而当 dr 较大, $fd \rightarrow 1$ 时就出现了前面的剧变情况, 此时满足解析式

$$r_c = \begin{cases} a_1 e^{\frac{fd}{a_2}} + a_3 & 0 \leq fd < 0.9 \\ b_1 + \frac{2b_2 b_3}{p(4(fd-b_4)^2 + b_3^2)} & 0.9 \leq fd \leq 1 \end{cases} \quad (9)$$

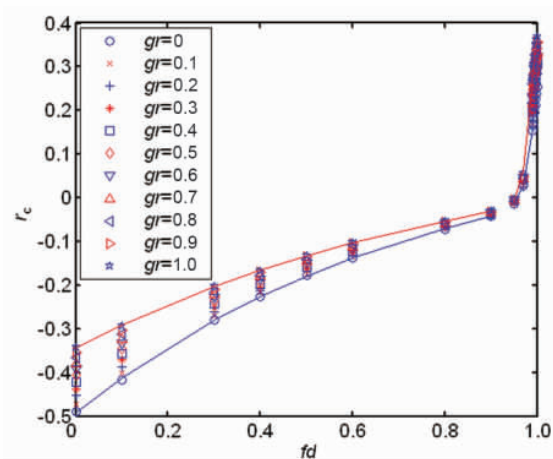
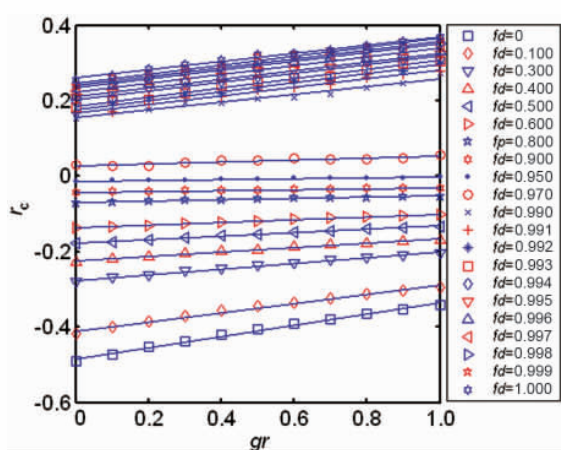
其中 a_i, b_j 为相应参数, $i=1, 2, 3; j=1, 2, 3, 4$ 。当 $dr \rightarrow 0$ 时, 式(9)可近似写成式(8)。对图 4 中的数据拟合得到 r_c 和 fd 的关系式(7)和(9)。

4 结论

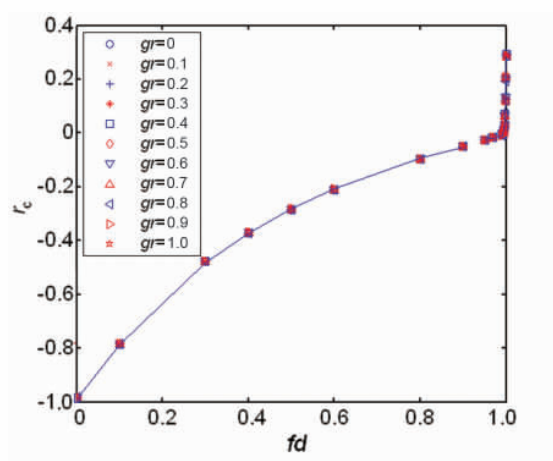
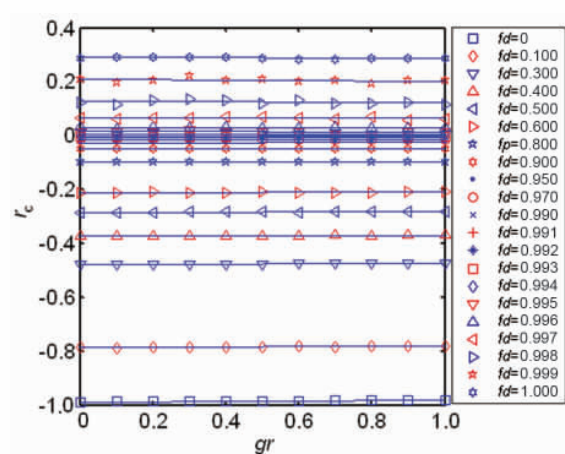
本文首先把“和谐统一的混合择优模型”进一步推广到“大统一的混合网络模型”, 在总混合比 dr 基础上, 又引入了 2 个新的混合比参数 fd 和 gr 调控网络增长机制, 通过调控不同的 gr 和 fd , 再现无权的 BA 模型、ER 模型、HUHPM 模型和 BPRA 模型等网络模型特性; 同时发现, 相称性系数 r_c 可以在 $(-1, 1)$ 区间内大范围变



(a) $dr=1/99$



(b) $dr=1/1$



(c) $dr=99/1$

图 4 在 3 种不同总混合比 $dr=1/99$, $dr=1/1$ 和 $dr=99/1$ 下, r_c 与 gr , fd 的关系, 对应的曲线为拟合的结果

Fig. 4 Dependence of r_c variation with respect to fd and gr at various d/r . Curves are numerically fitted, respectively

化, 从而网络结构也更为丰富多样。利用数值模拟研究, 可以看到网络特性随混合比变化的新特点和新现象。在 $fd \sim 1/1$ 附近存在一个阈值(相变点), 相称性系数 r_c 的数值从零附近以非线性方式迅速增加到较大数值; 此外, 随着 dr 的增加 r_c 还出现了极值现象。这些研究结果将有助于揭示不同网络之间(例如社会网络与技术网络等)的差异和相互联系。同时, 通过数值模拟, 对 r_c 与 gr, fd 的关系进行了初步的解析表达。

参考文献 (References)

- [1] DOROGOVTSSEV S N, MENDES J F F. Evolution of networks[J/OL]. [2001-06-07]. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0106144>.
- [2] NEWMAN M E J. The structure and function of complex networks[J/OL]. [2003-05-25]. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0303516>.
- [3] BOCCALETIA S, LATORAB V, MORENOD Y, *et al*. Complex networks: Structure and dynamics [J]. Physics Reports, 2006, 424(4-5): 175-308.
- [4] XULVI-BRUNET R, SOKOLOV I M. Reshuffling scale-free networks: From random to assortative [J]. Phys Rev E, 2004, 70(6): 066102.
- [5] MARIAN B, ROMUALDO P S. Class of correlated random networks with hidden variables [J]. Phys Rev E, 2003, 68(3): 036112.
- [6] MASLOV S, SNEPPEN K. Specificity and stability in topology of protein networks [J]. Science, 2002, 296(5569): 910-913.
- [7] GARNETT G P, ANDERSON R M. Sexually transmitted diseases and sexual behavior: Insights from mathematical models[J]. J Infect Dis, 1996, 174(2): 150-161.
- [8] NEWMAN M E J. Assortative mixing in networks [J]. Phys Rev Lett, 2002, 89(20): 208701.
- [9] ANDREA C, GUIDO C, Paolo D L R. Quantitative description and modeling of real networks[J]. Phys Rev E, 2003, 68(4): 047101.
- [10] NEWMAN M E J. Mixing patterns in networks [J]. Phys Rev E, 2003, 67(2): 026126.
- [11] PASTOR-SATORRAS R, VÁZQUEZ A, VESPIGNANI A. Dynamical and Correlation Properties of the Internet[J]. Phys Rev Lett, 2001, 87(25): 258701.
- [12] FANG J Q, LIANG Y. Topological properties and transition features generated by a new hybrid preferential model [J]. Chin Phys Lett, 2005, 22(10): 2719-2722.
- [13] FANG J Q, BI Q, LI Y. Advances in theoretical models of network[J]. Front of Phys in Chin, 2007, 1: 109-124.
- [14] 方锦清, 毕桥, 李永, 等. 复杂动态网络的一种和谐统一的混合择优模型及其普适特性 [J]. 中国科学 G 辑, 2007, 1: 109-124.
FANG Jinqing, BI Qiao, LI Yong, *et al*. A harmonious unifying hybrid preferential model and its universal properties for complex dynamical networks [J], China Sci, 2007, 1: 109-124.
- [15] FANG J Q, BI Q, LI Y, *et al*. Sensitivity of exponents of three power-laws to hybrid ratio in weighted hupm[J]. Chin Phys Lett, 2007, 24(1): 279-282.
- [16] 方锦清. 网络科学的理论模型探索及其进展 [J]. 科技导报, 2006, 24(12): 67-72.
FANG Jinqing. Exploring theoretical model of network science and research progresses [J]. Sci & Tech Rev, 2006, 24(12): 67-72.
- [17] 方锦清. 第二届全国复杂动态网络学术论坛论文集 [C], 北京: 中国高等科学技术中心, 2005(170).
FANG Jinqing. Proceedings of second national forum on complex dynamical networks [C]. Beijing: CCAST-WL Workshop Series, 2005(170).
- [18] LU X B, WANG X F, FANG J Q. Topological transition features and synchronizability of a weighted hybrid preferential network [J]. Physica A, 2006, 371(2): 841-850.
- [19] AMARAL L A N, SCALA A, BARTHÉLÉMY M, *et al*. Classes of small-world networks [C]//Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2000, 97(21): 11149-11152.
- [20] BARABÁSI A L, ALBERT R. Emergence of scaling in random networks [J]. Science, 1999, 286(5439): 509-512.
- [21] ERDOS P, RENYI A. On the evolution of random graphs [C]. Publ Math Inst Hung Acad Sci, 1960, 5: 17-61.
- [22] BOLLOBÁS B. Random graphs [M]. London: Cambridge University Press, 2001, 34-59.
- [23] LIU Z H, LAI Y C, YE N, *et al*. Connectivity distribution and attack tolerance of general networks with both preferential and random attachments [J]. Phys Lett A, 2002, 303: 337-344.
- [24] CALLAWAY D S, HOPCROFT J E, KLEINBERG J M, *et al*. Are randomly grown graphs really random[J]. Phys Rev E, 2001, 64(4): 041902.
- [25] SOON-HYUNG Y, FILIPPO R, HILDEGARD M O. Self-similar scale-free networks and disassortativity [J]. Phys Rev E, 2005, 72(4): 045105.
- [26] SUMIYOSHI A, NORIKAZU S. Complex earthquake networks: Hierarchical organization and assortative mixing[J]. Phys Rev E, 2006, 74(2): 026113.
- [27] WANG W X, WANG B H, HU B, *et al*. General dynamics of topology and traffic onweighted technological networks[J]. Phys Rev Lett, 2005, 94(18): 188702.
- [28] GRABOWSKI A, KOSINSKI R A. Evolution of a social network: The role of cultural diversity [J]. Phys Rev E, 2006, 73(1): 016135.
- [29] WANG W X, HU B, WANG B H, *et al*. Mutual attraction model for both assortative and disassortative weighted networks[J]. Phys Rev E, 2006, 73(1): 016133.
- [30] JULIAN S, JANUSZ A H. Statistical analysis of 22 public transport networks in Poland[J]. Phys Rev E, 2005, 72(4): 046127.
- [31] MICHELE C, GUIDO C, LUCIANO P. Assortative model for social networks[J]. Phys Rev E, 2004, 70(3): 037101.
- [32] LI C G, PHILIP K M. Complex networks generated by the Penna bit-string model: Emergence of small-world and assortative mixing[J]. Phys Rev E, 2005, 72(4): 045102.
- [33] NEWMAN M E J, PARK J. Why social networks are different from other types of networks [J]. Phys Rev E, 2003, 68(3): 036122.

(责任编辑 代丽)