

Fisher Z 分布流形的几何结构

仲锋惟, 孙华飞, 张真宁

北京理工大学理学院应用数学系, 北京 100081

[摘要] Fisher Z 分布作为一个统计分布在实际中有广泛的应用。首先从信息几何的角度对该分布进行了分析, 在分布的参数取其允许值时研究其全体所组成的流形几何结构; 讨论了 Fisher Z 分布流形的对偶结构及其平坦性, 进而给出了该流形的黎曼度量、 α 仿射联络和 α 曲率, 并在该统计流形上定义了散度来衡量两点之间的距离; 最后给出了 Fisher Z 分布流形在高一维欧氏空间中的一个图浸入。

[关键词] Fisher Z 分布统计流形; 对偶结构; 散度; 图浸入

[中图分类号] O129

[文献标识码] A

[文章编号] 1000-7857(2007)09-0033-04

Geometric Structures of Fisher Z Distribution

ZHONG Fengwei, SUN Huafei, ZHANG Zhenning

Department of Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

Abstract: Fisher Z distribution is a widely used statistics distribution in practice. In this paper, the Fisher Z distribution is studied from the viewpoint of information geometry. A dual affine structure is constructed on it and a divergence is defined as a distance like measure. Furthermore, the Riemannian metric, α -connections and α -curvatures of the Fisher Z manifold are given. At last, an immersion from the Fisher Z distribution manifold into the affine space is obtained.

Key Words: Fisher Z manifold; dual structure; divergence; embedding

CLC Number: O129

Document Code: A

Article ID: 1000-7857(2007)09-0033-04

0 引言

信息几何^[1-2]作为微分几何的分支已经被广泛地应用到其他领域中, 如统计推断、控制理论、神经网络、信号处理等。用信息几何考虑问题, 不仅提供了一个将问题几何化的方法, 而且为许多问题提供了不同于欧氏空间的更为实际的模型框架。将模型放入流形中考虑、建立相应的几何结构是用几何方法研究问题的基础, 而建立几何结构也是研究问题的关键。本文用几何方法研究 Fisher Z 分布, 但研究的不是单一的一个 Fisher Z 分布, 而是在参数取值范围内的一族 Fisher Z 分布, 将这样一族分布看成是一个流形, 参数作为该流形的坐标, 不同的参数对应于流形上不同的点。

Fisher Z 分布的密度函数为

$$p(x; a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} \quad (1)$$

其中, $a > 0, b > 0$, 也记之为 $Z(a, b)$ 。Fisher Z 分布族为

$$\{Z(a, b); a > 0, b > 0\}$$

Fisher Z 分布族与 Beta 分布和 F 分布有如下密切的关系^[3]。

$$1) \quad \text{若 } X \sim \text{Beta}(a, b), \text{ 则 } Y = \frac{X}{1-X} \sim Z(a, b);$$

$$\text{若 } X \sim Z(a, b), \text{ 则 } Y = \frac{X}{1+X} \sim \text{Beta}(a, b)。$$

$$2) \quad \text{若 } X \sim Z\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right), \text{ 则 } Y = \frac{n_2}{n_1} X \sim F(n_1, n_2)。$$

本文建立了 Fisher Z 分布流形的几何结构。首先, 证明该分布流形为指数族流形, 且为 ± 1 -平坦的流形, 并在其上建立了对偶结构。然后, 给出 Fisher Z 分布流形上散度的定义, 它是衡量两个不同的 Fisher Z 分布之间差异的一个度量。散度是一个类距离(distance like)

收稿日期: 2007-02-14

作者简介: 仲锋惟, 男, 北京市海淀区中关村南大街 5 号北京理工大学理学院应用数学系, 博士研究生, 研究方向为信息几何及其在线性系统中的应用; E-mail: killowind@bit.edu.cn

孙华飞(通讯作者), 男, 北京市海淀区中关村南大街 5 号北京理工大学理学院应用数学系, 教授, 研究方向为信息几何与仿射微分几何; E-mail: sunhuafei@263.net

并不满足距离公理中的对称性和三角不等式。最后,给出Fisher Z 分布流形在仿射空间中的一个图浸入。

1 Fisher Z 分布流形的几何结构

定义 1 集合

$$S = \left\{ p(x; a, b) \mid p(x; a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}, a, b \in \mathbf{R}^+ \right\} \quad (2)$$

为 Fisher Z 分布流形,其中 $\xi = (\xi_1, \xi_2) = (a, b)$, 起坐标系的作用。

定理 1 Fisher Z 分布流形是 ± 1 -平坦的。

证明 形如式(1)的 Fisher Z 分布的密度函数可以重新写成

$$\ln p(x; a, b) = (a-1)\ln x - (a+b)\ln(1+x) + \ln \Gamma(a+b) - \ln \Gamma(a) - \ln \Gamma(b) \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \ln x, & \theta_1 &= a \\ y_2 &= -\ln(1+x), & \theta_2 &= a+b \\ M(y) &= -\ln x \end{aligned} \right\}$$

且势函数 $\varphi(\theta)$ 可以表示为

$$\varphi(\theta) = \ln \Gamma(\theta_1) + \ln \Gamma(\theta_2 - \theta_1) - \ln \Gamma(\theta_2) \quad (4)$$

所以, Fisher Z 分布可以写成

$$\ln p(y; \theta) = y_1 \theta_1 + y_2 \theta_2 + M(y) - \varphi(\theta) \quad (5)$$

即是一个指数族分布流形。由指数族分布流形的性质^[4]可知, Fisher Z 分布流形为 ± 1 -平坦的。

记

$$\psi(\theta) = \frac{\partial \ln \Gamma(\theta)}{\partial \theta}, \quad \psi'(\theta) = \frac{\partial^2 \ln \Gamma(\theta)}{\partial \theta^2}, \quad \psi''(\theta) = \frac{\partial^3 \ln \Gamma(\theta)}{\partial \theta^3}$$

$$\psi_{ij}(\theta) = \frac{\partial^2 \ln \Gamma(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad \psi_{ijk}(\theta) = \frac{\partial^3 \ln \Gamma(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k}$$

用下面的命题来给到流形的对偶结构。

命题 1 Fisher Z 分布流形的自然坐标、期望坐标及其对应的对偶势函数为:

1) $\theta = (\theta_1, \theta_2) = (a, a+b)$ 是 Fisher Z 分布流形的自然坐标系;

2) $\varphi(\theta) = \ln \Gamma(\theta_1) + \ln \Gamma(\theta_2 - \theta_1) - \ln \Gamma(\theta_2)$ 是关于自然坐标系 θ 的势函数;

3) $\eta = (\eta^1, \eta^2) = (\psi(a) - \psi_1(b), \psi_2(b) - \psi(a+b))$ 是 Fisher Z 分布的对偶坐标, 也称为期望坐标系;

4) $\phi(\eta) = a(\psi(a) - \psi_1(b)) + (a+b)(\psi_2(b) - \psi(a+b)) - \ln \Gamma(a) - \ln \Gamma(b) - \ln \Gamma(a+b)$ 是关于期望坐标系 η 的势函数。

证明 该命题的前两条在定理 1 中已经证明, 这里只证明 3) 和 4)。

因为

$$\eta^i = \frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial \theta_i}$$

故 Fisher Z 分布流形的期望坐标系统为

$$(\eta^1, \eta^2) = (\psi(a) - \psi_1(b), \psi_2(b) - \psi(a+b))$$

其中,

$$\psi(a) = \frac{\partial \ln \Gamma(\theta_1)}{\partial \theta_1} \Big|_{\theta_1=a}, \quad \psi_1(b) = \frac{\partial \ln \Gamma(\theta_2 - \theta_1)}{\partial \theta_1} \Big|_{\theta_1=a, \theta_2=a+b}$$

$$\psi_2(b) = \frac{\partial \ln \Gamma(\theta_2 - \theta_1)}{\partial \theta_2} \Big|_{\theta_1=a, \theta_2=a+b}, \quad \psi(a+b) = \frac{\partial \ln \Gamma(\theta_2)}{\partial \theta_2} \Big|_{\theta_2=a+b}$$

关于期望坐标系统的对偶势函数为

$$\begin{aligned} \phi(\eta) &= \sum_i \eta^i \varphi_i(\theta) = \theta_1(\psi(\theta_1) - \psi_1(\theta_2 - \theta_1)) + \theta_2(\psi_2(\theta_2 - \theta_1) - \psi(\theta_2)) - \\ &\quad \ln \Gamma(\theta_1) - \ln \Gamma(\theta_2 - \theta_1) - \ln \Gamma(\theta_2) \\ &= a(\psi(a) - \psi_1(b)) + (a+b)(\psi_2(b) - \psi(a+b)) - \\ &\quad \ln \Gamma(a) - \ln \Gamma(b) + \ln \Gamma(a+b) \end{aligned}$$

证毕。

下面在流形上引入类距离的概念——Kullback 散度, 它不满足距离公理中的对偶性和三角不等式。用 Kullback 散度来衡量流形上两点之间的距离, 即给出流形上两个概率密度之间的差异。

定理 2 令 Fisher Z 分布流形上的两点 P, Q 的参数分别为 (a_P, b_P) 和 (a_Q, b_Q) , 则 P 和 Q 点之间的 Kullback 散度为

$$\begin{aligned} K(P, Q) &= \ln \frac{\Gamma(a_P)}{\Gamma(a_Q)} + \ln \frac{\Gamma(b_P)}{\Gamma(b_Q)} + \ln \frac{\Gamma(a_Q + b_Q)}{\Gamma(a_P + b_P)} + (a_Q - a_P) \cdot \\ &\quad (\psi(a_Q) - \psi_1(b_Q)) + (a_Q + b_Q - a_P - b_P) (\psi_2(b_Q) - \psi(a_Q + b_Q)) \end{aligned}$$

证明 由于流形上两点 P 和 Q 所对应的参数分别为 (a_P, b_P) 和 (a_Q, b_Q) , 则 P 的 θ 坐标和对应的 θ 势函数、 Q 的 η 坐标和对应的 η 势函数分别为

$$\left. \begin{aligned} \theta_P &= (\theta_{1P}, \theta_{2P}) = (a_P, a_P + b_P) \\ \varphi(\theta_P) &= \ln \Gamma(a_P) + \ln \Gamma(b_P) - \ln \Gamma(a_P + b_P) \\ \eta_Q &= (\eta_Q^1, \eta_Q^2) = (\psi(a_Q) - \psi_1(b_Q), \psi_2(b_Q) - \psi(a_Q + b_Q)) \\ \phi(\eta_Q) &= a_Q (\psi(a_Q) - \psi_1(b_Q)) + (a_Q + b_Q) (\psi_2(b_Q) - \psi(a_Q + b_Q)) - \\ &\quad \ln \Gamma(a_Q) - \ln \Gamma(b_Q) + \ln \Gamma(a_Q + b_Q) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

则 Kullback 散度为

$$\begin{aligned} K(P, Q) &= \varphi(\theta_P) + \phi(\eta_Q) - \theta_P \cdot \eta_Q \\ &= \ln \frac{\Gamma(a_P)}{\Gamma(a_Q)} + \ln \frac{\Gamma(b_P)}{\Gamma(b_Q)} + \ln \frac{\Gamma(a_Q + b_Q)}{\Gamma(a_P + b_P)} + (a_Q - a_P) \cdot \\ &\quad (\psi(a_Q) - \psi_1(b_Q)) + (a_Q + b_Q - a_P - b_P) (\psi_2(b_Q) - \psi(a_Q + b_Q)) \end{aligned} \quad (7)$$

证毕。

下面给出 Fisher Z 分布流形的几何量。由于在自然坐标系下, 相关的几何量为^[5]

$$\left. \begin{aligned} g_{ij}(\theta) &= \partial_i \partial_j \psi(\theta) \\ T_{ijk}(\theta) &= \partial_i \partial_j \partial_k \psi(\theta) = \partial_k (g_{ij}) \\ \Gamma_{ijk}^{(\alpha)}(\theta) &= \frac{1-\alpha}{2} T_{ijk}(\theta) \\ R_{ijkl}^{(\alpha)}(\theta) &= \frac{1-\alpha^2}{4} (T_{kmi} T_{jlq} - T_{kmj} T_{ilq}) g^{mq} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

则关于自然坐标系统 θ 的黎曼度量矩阵为

$$(g_{ij}(\theta)) = \begin{bmatrix} \psi'(\theta_1) + \psi_{11}(\theta_2 - \theta_1) & -\psi_{12}(\theta_2 - \theta_1) \\ -\psi_{12}(\theta_2 - \theta_1) & \psi_{22}(\theta_2 - \theta_1) - \psi'(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (9)$$

其逆矩阵为

$$(g^{ij}(\theta)) = \frac{1}{\det(g_{ij})} \begin{bmatrix} \psi_{22}(\theta_2 - \theta_1) - \psi'(\theta_2) & \psi_{12}(\theta_2 - \theta_1) \\ \psi_{12}(\theta_2 - \theta_1) & \psi'(\theta_1) + \psi_{11}(\theta_2 - \theta_1) \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中, $\det(g_{ij}) = (\psi_{22}(\theta_2 - \theta_1) - \psi'(\theta_2))(\psi'(\theta_1) + \psi_{11}(\theta_2 - \theta_1)) - (\psi_{12}(\theta_2 - \theta_1))^2$ 。则该统计模型的体积为

$$V = \int \sqrt{\det(g_{ij})} d\theta = \int \sqrt{(\psi_{22}(\theta_2 - \theta_1) - \psi'(\theta_2))(\psi'(\theta_1) + \psi_{11}(\theta_2 - \theta_1)) - (\psi_{12}(\theta_2 - \theta_1))^2} d\theta$$

Fisher Z 分布流形的三阶张量 T 为

$$\left. \begin{aligned} T_{111} &= \psi''(\theta_1) - \psi_{111}(\theta_2 - \theta_1) \\ T_{112} &= T_{121} = T_{211} = \psi_{112}(\theta_2 - \theta_1) \\ T_{122} &= T_{212} = T_{221} = -\psi_{122}(\theta_2 - \theta_1) \\ T_{222} &= \psi_{222}(\theta_2 - \theta_1) - \psi''(\theta_2) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

故 α 联络为

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{111}^{(\alpha)} &= \frac{1-\alpha}{2} (\psi''(\theta_1) - \psi_{111}(\theta_2 - \theta_1)) \\ \Gamma_{112}^{(\alpha)} &= \Gamma_{121}^{(\alpha)} = \Gamma_{211}^{(\alpha)} = \frac{1-\alpha}{2} \psi_{112}(\theta_2 - \theta_1) \\ \Gamma_{122}^{(\alpha)} &= \Gamma_{212}^{(\alpha)} = \Gamma_{221}^{(\alpha)} = -\frac{1-\alpha}{2} \psi_{122}(\theta_2 - \theta_1) \\ \Gamma_{222}^{(\alpha)} &= \frac{1-\alpha}{2} (\psi_{222}(\theta_2 - \theta_1) - \psi''(\theta_2)) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

则关于自然坐标系统的 Fisher Z 分布的非零的 α 曲率张量为

$$\begin{aligned} R_{1212}^{(\alpha)} &= \frac{1-\alpha^2}{4\det(g_{ij})} [\psi''(\theta_1)\psi_{122}(\theta_2 - \theta_1) - \psi_{111}(\theta_2 - \theta_1)\psi_{122}(\theta_2 - \theta_1) - \\ &\quad \psi_{112}^2(\theta_2 - \theta_1) \cdot (\psi_{22}(\theta_2 - \theta_1) - \psi'(\theta_2)) + (\psi''(\theta_1)\psi_{222}(\theta_2 - \theta_1) - \\ &\quad \psi_{111}(\theta_2 - \theta_1)\psi_{222}(\theta_2 - \theta_1) - \psi''(\theta_1)\psi''(\theta_2) + \psi''(\theta_2)\psi_{111}(\theta_2 - \theta_1) + \\ &\quad \psi_{112}(\theta_2 - \theta_1)\psi_{122}(\theta_2 - \theta_1)) \cdot \psi_{12}(\theta_2 - \theta_1) + (\psi_{222}(\theta_2 - \theta_1) \cdot \\ &\quad \psi_{112}(\theta_2 - \theta_1) - \psi''(\theta_2)\psi_{112}(\theta_2 - \theta_1) - \psi_{122}^2(\theta_2 - \theta_1)) \cdot \psi'(\theta_1) \cdot \\ &\quad \psi_{11}(\theta_2 - \theta_1)] \end{aligned} \quad (13)$$

从几何的角度, 我们关心的主要是流形上的不变量, 也就是说在坐标变换下保持不变的量, 而高斯曲率正是这样一个量。我们接下来就给出 Fisher Z 分布流形上的高斯曲率。

定理 3 Fisher Z 分布流形上的 α 高斯曲率为

$$K^{(\alpha)} = \frac{1-\alpha^2}{4(\det(g_{ij}))^2} [\psi''(\theta_1)\psi_{122}(\theta_2 - \theta_1) - \psi_{111}(\theta_2 - \theta_1)\psi_{122}(\theta_2 - \theta_1) -$$

$$\begin{aligned} &\psi_{112}^2(\theta_2 - \theta_1) \times (\psi_{22}(\theta_2 - \theta_1) - \psi'(\theta_2)) + (\psi''(\theta_1)\psi_{222}(\theta_2 - \theta_1) - \\ &\psi_{111}(\theta_2 - \theta_1)\psi_{222}(\theta_2 - \theta_1) - \psi''(\theta_1)\psi''(\theta_2) + \psi''(\theta_2)\psi_{111}(\theta_2 - \theta_1) + \\ &\psi_{112}(\theta_2 - \theta_1)\psi_{122}(\theta_2 - \theta_1)) \times \psi_{12}(\theta_2 - \theta_1) + (\psi_{222}(\theta_2 - \theta_1) \cdot \\ &\psi_{112}(\theta_2 - \theta_1) - \psi''(\theta_2)\psi_{112}(\theta_2 - \theta_1) - \psi_{122}^2(\theta_2 - \theta_1)) \times \psi'(\theta_1) \cdot \\ &\psi_{11}(\theta_2 - \theta_1)] \end{aligned} \quad (14)$$

证明 由于 α 高斯曲率由下式给出

$$K^{(\alpha)} = \frac{R_{1212}^{(\alpha)}}{\det(g_{ij})}$$

结合式(13)可得定理结论。当 $\alpha=0$ 时, 即为黎曼时的情况。

2 仿射浸入

令 M 是一个 m 维流形, f 是从 M 到 R^{m+1} 的浸入, ξ 是沿 f 的一个截向量场。对于任意 $x \in R^{m+1}$, 有 $T_x R^{m+1} \equiv R^{m+1}$ 。 $\{f, \xi\}$ 被称为从 M 到 R^{m+1} 的一个仿射浸入^[6], 若对于每一点 $P \in M$, 则

$$T_{f(P)} R^{m+1} = f_*(T_P M) \oplus \text{span} \xi_P \quad (15)$$

式中, f_* 为 f 的切映射, $\text{span} \xi_P$ 为由 ξ_P 张成的线性空间。

用 D 表示 R^{m+1} 的平坦仿射联络。沿 f 的共变导数等同于 D , 则有

$$\left. \begin{aligned} D_X f_* Y &= f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi \\ D_X \xi &= -f_*(\text{Sh}(X)) + \tau(X)\xi \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中, ∇ 为浸入联络, h 为仿射基本形式, Sh 为仿射形状算子, τ 表示截仿射形式。

命题 2 由于 (S, h, ∇, ∇^*) 是 Fisher Z 分布流形, 它是对偶平坦的空间, 有全局坐标系。 θ 是关于 ∇ 的仿射坐标系, 并且 φ 是 θ 势函数, 则 Fisher Z 分布流形 (S, h, ∇) 通过下面的方式浸入 R^3 中,

$$f: S \rightarrow R^3$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \ln \Gamma(\theta_1) + \ln \Gamma(\theta_2 - \theta_1) - \ln \Gamma(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (17)$$

被称为从 S 到 R^3 的一个图浸入, 并且截向量 $\xi = [0, 0, 1]^T$ 。

3 结论

利用几何框架解决各种问题是当今国际上非常普遍的现象。本文主要从几何的角度计算了 Fisher Z 分布的一些相关几何量, 给出了对应的量化结果, 对今后的实际应用给出了理论支持。

硝基咪唑类药物在鸡肉组织中残留量的检测方法探究

齐鼎铭¹, 宋艳红², 刘春龙², 王鹏¹, 程序¹

1. 山西医科大学药学院, 太原 030001

2. 山西省兽药监察所残留室, 太原 030027

[摘要] 通过对组织样品前处理方法的深入探究, 从提取和净化的每一个环节入手, 改变提取时间和温度、萃取的振摇方式, 以及净化时的滴速等细节条件, 建立了高效液相色谱方法测定鸡肉组织中硝基咪唑类药物的残留量。结果表明: 测定鸡肉组织中硝基咪唑类药物残留量的回收率由 40%~50% 提高到 70%~80%, 同时增强了标准的可操作性, 优化了农业部 236 号公告发布的“动物性食品中硝基咪唑类药物残留检测方法”。

[关键词] 硝基咪唑类药物; 鸡肉; 残留; 高效液相色谱法

[中图分类号] S859.84

[文献标识码] A

[文章编号] 1000-7857(2007)09-0036-04

Determination of Nitroimidazoles Residue in Chicken Tissues

QI Dingming¹, SONG Yanhong², LIU Chunlong², WANG Peng¹, CHENG Xu¹

1. College of Pharmacy, Shanxi Medical University, Taiyuan 030001, China

2. Shanxi Supervision Institute for Veterinary Drug Control, Taiyuan 030027, China

Abstract: A new HPLC method for determining the Nitroimidazoles in chicken tissues is proposed, based on the studies on the method of pre-processing of tissues and by adjustments of the time and temperature of extraction, the mode of shaking and the dropping rate during cleaning. The results show that the recovery rate is increased from 40%~50% to 70%~80%. This method is easier to be implemented than the previous one and is an optimization of the method in the 236th bulletin of Ministry of Agriculture.

Key Words: nitroimidazoles; chicken; residue; high-performance liquid chromatography

CLC Number: S859.84

Document Code: A

Article ID: 1000-7857(2007)09-0036-04

收稿日期: 2007-02-07

作者简介: 齐鼎铭, 男, 太原市新建南路 86 号山西医科大学药学院, 助理实验师, 研究方向为药物化学; E-mail: qidmde@yahoo.com.cn

参考文献(References)

- [1] AMARI S. Differential geometrical methods in statistics[M]. Germany: Springer lecture Notes in Statistics, 1985.
- [2] AMARI S. Methods of information geometry [M]. England: Oxford University Press, 2000.
- [3] DODSON C T. Gamma manifolds and stochastic geometry[C]// Proceedings of the workshop on recent topics in differential geometry. Santiago de Compostela, 1997: 16-19.
- [4] AMARI S. Differential geometry of a parametric family of

invertible linear systems Riemannian metric, dual affine connections and divergence [J]. Mathematical Systems Theory, 1987(20): 53-82.

- [5] ABDEL-ALL N H, ABD-ELLAH H N, MOUSTAFA H M. Information geometry of random walk distribution[J]. Publ Math Debrecen, 2003(63): 51-66.
- [6] DODSON C T, MATSUZOE H. An affine embedding of the gamma manifold[J]. Appl Sci, 2003(5): 1-6.

(责任编辑 代丽)