

一种改进的电站流体网络实时仿真算法

蔡瑞忠¹, 余圣方², 王健夫², 吕崇德¹

1. 清华大学热能工程系, 北京 100084

2. 北京同方电子科技有限公司, 北京 100085

[摘要] 流体网络实时仿真计算涉及大型稀疏非线性“病态”方程组的求解问题, 是电站实时仿真建模中最复杂的计算问题之一。针对方程的非线性特性, 基于 Newton-Raphson 方法, 提出了一种改善收敛特性的迭代方法。改进后的方法具有大范围收敛特性。针对 Jacobi 矩阵的特点, 采用有效的稀疏矩阵方法求解矩阵方程, 以保证仿真的实时性。基于物理概念, 给出了小流量及“孤岛”情况下“病态”Jacobi 矩阵的数值处理方法。

[关键词] 电站; 仿真; 流量网络; 数值计算

[中图分类号] TP391.9

[文献标识码] A

[文章编号] 1000-7857(2007)08-0011-04

An Improved Numerical Calculation Method of Fluid Network for Real Time Simulation of Fossil Power Plant

CAI Ruizhong¹, YU Shengfang², WANG Jianfu², LU Chongde¹

1. Thermal Engineering Department, Tsinghua University, Beijing 100084, China

2. Beijing Tongfang Electronic Science and Technology Co., Ltd, Beijing 100085, China

Abstract: The simulation of fluid network involves issues of non-linear, large, sparse matrix and stiff equations, and perhaps is the most challenging task in the plant simulation. Based on characteristics of non-linear equations, an improved iteration method is put forward in this paper, with a good convergence property as compared with the original Newton-Raphson method. An efficient sparse matrix algorithm is also used to guarantee the simulation process to have a real time nature. The method dealing with the "stiff" problem occurred in the zero flow path and isolated islands is discussed.

Key Words: power plant; simulation; fluid network; numerical calculation

CLC Number: TP391.9

Document Code: A

Article ID: 1000-7857(2007)08-0011-04

0 引言

电站实时仿真用的流体网络动态数学模型^[1-3], 一般由常微分方程即动态的质量守恒方程和非线性的代数方程即稳态的流量计算方程所构成。流体压力过程的时间常数大约为毫秒级, 一般采用隐式差分方法求解质量守恒方程, 以保证大步长计算的稳定性。但是由于压力流量的非线性关系, 使用隐式差分时会遇到大型稀疏非线性方程组的求解问题, 而且在有些情况下方程组会出现严重“病态”或存在无穷多解, 这些情况都必须给予考虑和解决。

本文在 Newton-Raphson 算法基础上, 针对流体网络方程非线性特点, 找出了恰当的松弛因子, 使迭代过

程具备大范围收敛特性。针对 Jacobi 矩阵的稀疏、对称和对角占优特点, 采用有针对性的双因子分解技术求解矩阵方程, 使算法满足仿真的实时性要求。对于零流量和“孤岛”情况下出现的方程严重“病态”和多解问题, 依据层流和可压缩性等物理概念给出了一种解决办法。

1 单相可压缩流体网络模型

1.1 基本方程

对于常规火电站实时仿真培训系统, 单相可压缩流体网络模型可以满足绝大多数水、气、油、空气等系统的仿真要求, 基本方程由节点压力方程和支路的流量计算方程构成^[1-3]。具体如下。

收稿日期: 2007-03-10

作者简介: 蔡瑞忠, 男, 北京市海淀区清华大学热能工程系, 副教授, 研究方向为热动力系统建模, 核电、火电站仿真培训/分析系统开发; E-mail: cairz@tsinghua.edu.cn

1) 节点压力方程

$$C_i \frac{dp_i}{dt} = \sum_j w_{ij} \quad (1)$$

其中, $C_i = V_i \frac{\partial \rho_i}{\partial p_i}$, 称为节点 i 的工质可压缩系数, V_i 为节点(控制体) i 的体积, ρ_i 为工质密度, w_{ij} 为支路的质量流量, j 为与节点 i 相连的节点。需要说明的是, 节点压力方程(1)忽略了质量变化过程中焓变化这一因素, 因此该模型只能适用于单相流体。如果过程中伴随着较快的焓变化, 如气水相变过程、容器的快速充/放气过程, 该模型是不适用的。

2) 支路流量计算方程

支路流量一般由动量方程决定, 一般形式为

$$I_a \frac{dw_{ij}}{dt} = F(w_{ij}, p_i, p_j) \quad (2)$$

式中 I_a 为支路惯性系数。数值实验表明, 惯性环节对动态仿真效果没有什么影响, 因此一般都直接使用稳态方程计算流量

$$F(w_{ij}, p_i, p_j) = 0 \quad (3)$$

绝大多数电厂设备的流量计算公式可以用下列形式描述

$$w_{ij} = w(p_i, p_j) \quad (4)$$

其中, p_i 为入口压力, p_j 为出口压力。

电站仿真中, 一般认为管路和阀门等设备内的工质流动处于湍流状态, 故压力和流量可使用平方关系

$$w_{ij} = K \sqrt{\rho \Delta p} \quad (5)$$

其中 K 为设备的导纳。

1.2 节点压力方程的时间常数

时间常数 τ 是选取差分方法及步长时需要考虑的关键因素。显示差分是条件稳定的, 则需要满足条件 $\Delta t < 2\tau^{[4]}$, 才能保证计算稳定。由下面的例子可以看出, 电站热力系统流体压力过程的时间常数一般情况下是很小的。对于节点压力方程, 其特征值为

$$\lambda_i = \frac{1}{C_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \sum_j w_{ij} \quad (6)$$

对于 600 MW 电厂给水系统网络, 假设某节点体积 $V = 20 \text{ m}^3$, 进、出节点流量 $w_{in} = w_{out} = 560 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$, 进出管道压差、压力与流量假定为方程(5)所示的平方关系, 则

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{1}{2} \frac{w}{\Delta p} = 280, \text{ 可压缩性系数 } C = V \frac{\partial \rho}{\partial p} \approx V \frac{1}{a_c^2}, \text{ 压力}$$

波在水中的传播速度 $a_c = 1350 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。由方程(6)计算得到 $\lambda \approx -520 \text{ s}^{-1}$, 时间常数 $\tau = -1/\lambda \approx 0.002 \text{ s}$ 。可以看到, 热工水力过程的压力时间常数为毫秒级, 如果采用显示差分, 步长需要限制在毫秒级内, 这会大大增加计算时间和计算累积误差。事实上, 电站实时仿真并不关心毫秒级的动态过程, 步长可以取的较大, 例如 0.1 s^{-1} , 这时使用隐式差分算法是一个必然选择。隐式差分的稳定性

条件为 $|1/1 - \Delta t \lambda| < 1$, 对热工过程来说, 因为 λ 始终为负值, 该条件对于任意步长都能满足。

1.3 节点压力方程的 Newton-Raphson 迭代算法

为了节省内存及提高计算速度, 电站实时仿真中一般使用固定步长的单步差分法。节点压力方程(1)的单步隐式差分方程的形式为

$$C_i \frac{p_i^{t+1} - p_i^t}{\Delta t} = \sum_j w_{ij}^{t+1} \quad (7)$$

$$w_{ij}^{t+1} = w(p_i^{t+1}, p_j^{t+1}) \quad (8)$$

$$\text{令 } F_i^{t+1} = C_i \frac{p_i^{t+1} - p_i^t}{\Delta t} - \sum_j w_{ij}^{t+1} \quad (9)$$

在初值 $p_0^{t+1} = (p_{1,0}^{t+1}, p_{2,0}^{t+1}, \dots, p_{n,0}^{t+1})$ 附近, 对 F_i^{t+1} 做一阶泰勒展开并建立迭代方程^[5]

$$F_{i,k}^{t+1} + \sum_j \frac{\partial F}{\partial p_i} \bigg|_k (p_{j,k+1}^{t+1} - p_{j,k}^{t+1}) = 0 \quad (10)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} p_{1,k+1}^{t+1} \\ p_{2,k+1}^{t+1} \\ \vdots \\ p_{n,k+1}^{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1,k}^{t+1} \\ p_{2,k}^{t+1} \\ \vdots \\ p_{n,k}^{t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \frac{\partial F_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial p_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial p_1} & \frac{\partial F_2}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial p_1} & \frac{\partial F_n}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial p_n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -F_{1,k} \\ -F_{2,k} \\ \vdots \\ -F_{n,k} \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中, $p_{j,k}^{t+1}, p_{j,k+1}^{t+1}$ 分别为第 k 步和第 $k+1$ 步 p_j^{t+1} 的近似解。具体迭代过程见图 1。

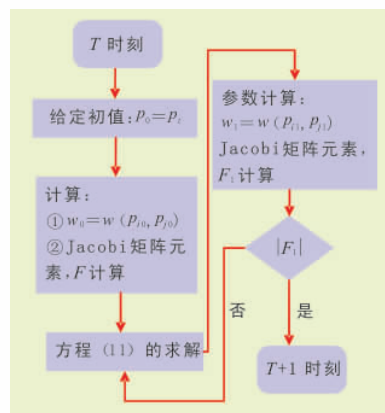


图 1 迭代过程程序结构图

Fig. 1 Calculation process of the iteration algorithm

1.4 Jacobi 矩阵元素计算和矩阵特点

方程(11)中由 $\partial F_i / \partial p_i$ 构成的矩阵称为 Jacobi 矩阵, 其特点如下。

1) 对角元素 $\partial F_i / \partial p_i$ 始终为正值, 非对角元素 $\partial F_i / \partial p_j$ 始终为负值。

因为

$$\frac{\partial F_i}{\partial p_i} = \frac{C_i}{\Delta t} - \sum_j \frac{\partial w_{ij}}{\partial p_i} = \frac{C_i}{\Delta t} - \left(\sum_j \frac{\partial w_{in}}{\partial p_i} - \sum_j \frac{\partial w_{out}}{\partial p_i} \right)$$

式中, w_{in} , w_{out} 为进、出节点流量, 节点 i 的压力增加, 即 $\partial p_i > 0$, 则有 $\partial w_{in} < 0$, $\partial w_{out} > 0$, 因此 $\frac{\partial w_{in}}{\partial p_i} < 0$, $\frac{\partial w_{out}}{\partial p_i} > 0$ 。

在任何情况下, 都有

$$a_{ii} = \frac{\partial F_i}{\partial p_i} = \frac{C_i}{\Delta t} + \sum_j \left| \frac{\partial w_{ij}}{\partial p_i} \right| > 0$$

对于非对角元素 $\partial F_i / \partial p_j$, 若节点 j 在节点 i 的上游, 则 $\frac{\partial F_i}{\partial p_j} = \frac{\partial w_{ij}}{\partial p_j} = \frac{\partial w_{in}}{\partial p_j}$, 如果压力增加即式中 $\partial p_i > 0$, 则有 $\partial w_{in} < 0$, $\frac{\partial F_i}{\partial p_j} < 0$; 若节点 j 在下游, 有 $\frac{\partial F_i}{\partial p_j} = -\frac{\partial w_{ij}}{\partial p_j} = \frac{\partial w_{out}}{\partial p_j}$ 。如果式中 $\partial p_j > 0$, 则有 $\partial w_{out} > 0$, $\frac{\partial F_i}{\partial p_j} < 0$ 。所以, 非对

角元素 $a_{ij} = -\left| \frac{\partial w_{ij}}{\partial p_i} \right|$ 始终为负值。

2) 通常为结构对称的大型稀疏矩阵。电站热力系统的流体网络节点数可达几百个, 而每个节点一般仅与两三个节点连接, 矩阵零元素可占 95%~98%。

3) 如果所有支路都有 $|\partial w_{ij} / \partial p_j| = |\partial w_{ji} / \partial p_j|$ (例如支路流量 $w_{ij} = C_v \sqrt{\rho(p_i - p_j)}$, 则 $a_{ij} = a_{ji} = -\frac{1}{2} \left| \frac{w}{\Delta p} \right|$), 此时矩阵结构不仅对称而且数值对称。

4) 具有对角占优特性。如果 $C_i / \Delta t \neq 0$, 或节点 i 至少与一个边界点连通, 则有 $a_{ii} > \sum_j |a_{ji}|$, 矩阵为强对角占优; 如果 $C_i / \Delta t = 0$ 而且没有边界点, 或者与边界点没有连通, $a_{ii} = \sum_j |a_{ji}|$, 矩阵为弱对角占优。

1.5 稀疏矩阵方程求解

为保证计算的稳定性和收敛速度, 耦合性强的系统一般尽可能放在一个网络矩阵中求解。例如, 一般将电站中所有的蒸汽系统、给水及凝结水系统组成一个气水网络求解, 节点数有时可达到 500~600 阶。

稀疏矩阵技术充分利用矩阵的稀疏性、对称性和对角占优等特点, 计算时间一般仅与矩阵阶数呈线性关系。目前, 稀疏矩阵技术基本上是针对特有类型的矩阵结构专门编制的。由于网络计算在电站仿真计算中占有相当大的比重, 且矩阵方程计算步骤嵌在迭代过程之内, 因此采用高效的稀疏矩阵算法尽量缩短计算时间是非常关键的。

目前, 不同流体网络计算程序采用的稀疏矩阵算法各不相同。本文采用双因子分解 (Bi-Factorization) 算法^[6]。该算法是 20 世纪 60 年代德国人 Zollenkopf 开发的, 专门用于处理数值对称, 或数值不对称但结构对称的对角占优矩阵。由于充分考虑了矩阵的结构对称性和对角占优的特点, 因此采用双因子分解法的计算速

度会较其他方法更快。

稀疏矩阵技术一般分为预处理和实时计算两部分。预处理是根据网络拓扑结构进行模拟排序, 相当于对节点重新进行编号, 使消去过程中产生的非零元素最少; 实时计算是以模拟排序的结果为依据, 对系数矩阵进行消元与回代处理, 解出未知量。

2 迭代方法的改进

Newton-Raphson 法有两个局限, 一个是该方法属于局部收敛, 要求初值非常接近于根才能收敛; 另一个是要求 Jacobi 矩阵在方程的根处非奇异。

在电站实时仿真中, 为了应对各种复杂初始工况和大的扰动, 要求迭代方法大范围收敛或无条件收敛, 因此需要根据具体的方程 (11) 的特性, 采用合适的初值给定方法和松弛因子 K_L 保证迭代过程的收敛。

首先考察单个节点的压力迭代方程

$$p_{k+1}^{i+1} = p_k + \frac{-\left[C \frac{p_k^{i+1} - p^t}{\Delta t} - (w_{1k} - w_{2k}) \right]}{\frac{C}{\Delta t} + \left| \frac{\partial w_1}{\partial p} \right| + \left| \frac{\partial w_2}{\partial p} \right|} \quad (12)$$

其中, w_1 , w_2 为进出节点的流量。

假定流量和压差为平方关系

$$w_1 = \sqrt{p_A - p} \quad w_2 = \sqrt{p - p_B}$$

其中, p_A , p_B 是进出流量的边界点压力。

流量对压力的导数为

$$\frac{\partial w_1}{\partial p} = -\frac{1}{2\sqrt{p_A - p}} \quad \frac{\partial w_2}{\partial p} = \frac{1}{2\sqrt{p - p_B}}$$

将以上各式代入迭代方程, 整理得到

$$p_{k+1}^{i+1} = \frac{\frac{C}{\Delta t} p^t + M_A p_A + M_B p_B}{\frac{C}{\Delta t} + M_A + M_B} + \frac{w_{1k} - w_{2k}}{M_A + M_B} \quad (13)$$

$$\text{其中, } M_A = \frac{1}{\sqrt{p_A - p_{1,k}}}, M_B = \frac{1}{\sqrt{p_{1,k} - p_B}}.$$

可以看出, 迭代方程右端由两项组成, 第 1 项是边界点压力及上一时刻压力的加权平均, 第 2 项与进出节点的净流量有关。显然, 无论压力和流量的初值如何选取, 第 1 项的值都落在 (p^t, p_A, p_B) 区间内, 而第 2 项则没有这种特性并依赖于初值。

考虑到系统稳定时第 2 项为零, 因此不妨将该项去掉, 直接采用下面迭代方程

$$p_{k+1}^{i+1} = \frac{\frac{C}{\Delta t} p^t + M_A p_A + M_B p_B}{\frac{C}{\Delta t} + M_A + M_B} \quad (14)$$

数值实验表明, 上述迭代过程是大范围收敛的, 与初值无关, 而且收敛过程是单调的。

可以发现, 将 $\frac{\partial w}{\partial p}$ 乘以 2 后代入方程 (12) 同样可以

去掉迭代方程(13)中的第2项。这并非巧合,而是由压差与流量为平方关系这个特点所决定的。数值2实际就是迭代松弛因子 K_L 的值,迭代方程因此可改为

$$\begin{bmatrix} p_{1,k+1}^{t+1} \\ p_{2,k+1}^{t+1} \\ \vdots \\ p_{n,k+1}^{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1,k}^{t+1} \\ p_{2,k}^{t+1} \\ \vdots \\ p_{n,k}^{t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\frac{\partial F_1}{\partial p_1} & 2\frac{\partial F_1}{\partial p_2} & \cdots & 2\frac{\partial F_1}{\partial p_n} \\ 2\frac{\partial F_2}{\partial p_1} & 2\frac{\partial F_2}{\partial p_2} & \cdots & 2\frac{\partial F_2}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2\frac{\partial F_n}{\partial p_1} & 2\frac{\partial F_n}{\partial p_2} & \cdots & 2\frac{\partial F_n}{\partial p_n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -F_{1,k} \\ -F_{2,k} \\ \vdots \\ -F_{n,k} \end{bmatrix}$$

事实上, Jacobi 矩阵的大小与方程的解无关, 仅会影响收敛特性。可以证明, 上述迭代过程是无条件且单调收敛的, 吴靖^[4]等给出过类似方法的相关证明。

3 若干特殊情况的数值处理方法

3.1 零流量

电站热力系统管道流动通常假设处于平方阻力区, 流量对压力的导数 $\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{1}{2} \frac{w}{\Delta p}$ 。当 $\Delta p \rightarrow 0$, 则 $w \rightarrow 0$, $\partial w / \partial p \rightarrow \infty$ 。这会造成方程的严重“病态”, 并导致计算不稳定。为了避免这种情况, 当压差较小 (例如 $\Delta p \leq \Delta p_{\min}$) 时, 可以认为流动处于层流状态, 这时流量与压差为线性关系, 压力对流量的导数不为零。

3.2 “孤岛”情况

当流网中某些阀门被关闭时, 可能会造成网络内某一部分节点与边界点没有任何联系, 这部分节点就形成了“孤岛”。对于不可压缩流体, 由于 $\partial w / \partial p = 0$, 有可压缩性系数 $C_i = 0$, 这意味着节点压力与时间无关, 完全由边界点压力决定。因此, 对于不可压缩流体网络, “孤岛”内的节点压力是不能确定的, 此时迭代方程中的 Jacobi 矩阵会变成奇异, 右端项为零, 有无穷多解; 所以即使是不可压缩流体 C_i 也不能为零。事实上, 实际应用中的流体都具有可压缩性, 孤岛内的节点压力应该与前一时刻的状态有关系; 由于 C 值影响到节点压力的动态过程, 所以既不能太大, 也不能太小, 以保证在任何情况下 Jacobi 矩阵都能对角占优。

4 边界点和节点的转换

在实际应用中, 有时会遇到边界点和节点的转换问题。例如, 超临界机组在启动过程中, 水气分离器的工质处于两相状态, 其内部压力由能量方程决定, 此时水气分离器应该作为网络的边界点处理。正常运行或满水时, 水气分离器的工质为单相状态, 此时应该作为整个水气网络中的一个节点处理, 并在流体网络方程中计算压力, 以保证压力的快速响应。这时就涉及到节点和边界点的转换问题, 下面介绍两种方法。

1) Jacobi 矩阵中的对角元素是节点 i 的净流量对本节点压力的导数, 非对角元素是节点的净流量对相邻节点的导数, 边界点没有包括在内。因此, 如果网络中的某个节点 i 变为边界点, 对于所有与该节点相连的节

点 L , 将相关矩阵元素 $a(L, L)$ 设为零即可。

2) 可以利用节点泄漏项进行处理。节点泄漏项可表示 $W_L = D_i (p_i - p_{ai})$, p_{ai} 为泄漏点的环境压力, D_i 为导纳。式(7)可以写为

$$C_i \frac{p_i^{t+1} - p_i^t}{\Delta t} = \sum_j w_{ij}^{t+1} - D_i (p_i - p_{ai})$$

变换得到

$$p_i = p_{ai} + \frac{-C_i \frac{p_i^{t+1} - p_i^t}{\Delta t} + \sum_j w_{ij}^{t+1}}{D_i}$$

可以看出, 如果希望节点压力 p_i 等于已知压力 p_{ai} , 可令 D_i 为 ∞ , 则有 $p_i \approx p_{ai}$ 。

5 结论

流体网络计算涉及大型稀疏非线性“病态”方程组的求解问题, 可以说是电站实时仿真建模中最复杂的数学问题之一。由于非线性方程组形态的多样性, 其求解既属于一门科学, 更属于一种技巧^[5], 应用中需要针对方程的特点, 找到恰当的数值计算方法。本文针对压力流量为平方关系的特点, 找到一种有利于改善收敛特性的松弛因子。同时, 使用层流和可压缩性等物理概念, 解决了零流量和“孤岛”情况下方程病态和多解问题。这些方法在实际应用中取得了很好的效果。

参考文献 (References)

- [1] 蔡瑞忠, 张 力, 谢茂清, 等. 热工流体网络的实时仿真模型及其算法[J]. 系统仿真学报, 1992, 4(4): 13-18.
CAI Ruizhong, ZHANG Li, XIE Maoqing, et al. Modeling of the real-time simulation of the fluid network[J]. Journal of System Simulation, 1992, 4(4): 13-18.
- [2] 马迎辉. 电站模块化模型开发系统及流体网络的建模方法[D]. 北京: 清华大学, 1990.
MA Yinghui, Modular modeling method of the power plant simulation and the fluid network algorithm [D]. Beijing: Tsinghua University, 1990.
- [3] ABB Company. THLF-Piping network modeling package [M]. Finland: AFORA Press, 1988.
- [4] 吴 靖, 曾建潮, 孙国基. 单相可压缩流体网络的动态实时仿真[J]. 太原重型机械学院学报, 1998, 19(2): 45-51.
WU Jing, ZENG Jianchao, SUN Guoji. Real-time simulation of the single phase fluid network [J]. J Taiyuan Univ Sci Tech, 1998, 19(2): 45-51.
- [5] J·H·费尔齐格. 数值方法在工程中的应用 [M]. 潘任先, 王晖夫, 译. 北京: 机械工业出版社, 1990.
FERGIGER J H. Numerical methods for engineering application [M]. PAN Renxian, WANG Huifu, Trans. Beijing: China Machine Press, 1990.
- [6] ZOLLENKOPF K. Bi-Factorization: Basic computational algorithm and programming techniques [M]// Large Sparse Sets of Linear Equations. USA: Academic Press, 1977: 75-96.

(责任编辑 赵 佳)