

基于公共权重向量集的 DEA 排序方法

韩利娜, 张俊容

西南大学数学与统计学院, 重庆 400715

[摘要] 对利用一组公共权重求解决策单元相对效率指数进而对决策单元进行排序的方法进行了分析, 并指出了该方法的不足之处。在给出公共权重向量集概念的基础上, 提出了一种新的对决策单元进行排序的方法。

[关键词] DEA; 相对效率指数; 公共权重; 理想决策单元; 排序

[中图分类号] C934

[文献标识码] A

[文章编号] 1000-7857(2007)04-0041-03

A Ranking Method for DEA Based on Common Weights Vector Set

HAN Lina, ZHANG Junrong

College of Mathematics and Statistics, Xinan University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, a ranking method for DMU based on a set of common weights to obtain the DMU's relative efficiency index is analyzed, and the shortcoming of this method is pointed out. Then a definition of common weights vector set is given and a new ranking method for DEA based on it is proposed.

Key Words: DEA; relative efficiency index; common weights; ideal-DMU; ranking

CLC Number: C934

Document Code: A

Article ID: 1000-7857(2007)04-0041-03

0 引言

数据包络分析(DEA)是研究具有多输入、多输出的决策单元(DMU)间相对有效性的有用方法。但由原始的 DEA 模型——C²R 模型得到的决策单元的效率值是不会超过 1 的, 这样在被评价决策单元中, 往往会使得多个决策单元的效率值都为 1, 因而无法较好地地区分被评价决策单元的优劣性。不少文献都针对此问题提出了一些解决的方法, 例如文献[1-5]就分别提出了不同的解决方法。其中文献[5]提出: 在原始 DEA 模型中引入理想决策单元, 通过求解理想决策单元最大效率值的方法, 得到给定被评价决策单元的一组公共权重, 之后利用这组公共权重求解各决策单元的相对效率指数, 然后再依据各决策单元的相对效率指数的值对决策单元进行排序。该方法在一定程度上能够实现对被评价决策单元的完全排序, 但使用该方法存在公共权重取值不唯一的问题。本文针对此问题, 对原方法进行改进, 提出一种新的 DEA 排序方法。

1 问题分析

1.1 理想决策单元

定义 1 设有 n 个决策单元, 简记为 $DMU_k (k=1, 2, \dots, n)$, 每个决策单元都有 m 项输入和 s 项输出。记 $DMU_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk}, y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{sk})$, 其中 $x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk}$ 为第 k 个决策单元 DMU_k 的 m 项输入的取值; $y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{sk}$ 为第 k 个决策单元 DMU_k 的 s 项输出的取值。若令 $DMU_{n+1} = (x_1^-, x_2^-, \dots, x_m^-, y_1^+, y_2^+, \dots, y_s^+)$, 其中 $x_i^- = \min_{k=1,2,\dots,n} x_{ik}, (i=1, 2, \dots, m), y_j^+ = \max_{k=1,2,\dots,n} y_{jk} (j=1, 2, \dots, s)$, 则称 DMU_{n+1} 为上述给定的 n 个决策单元的理想决策单元。令 $x_{i,n+1} = x_i^-, (i=1, 2, \dots, m), y_{j,n+1} = y_j^+, (j=1, 2, \dots, s)$, 则理想决策单元 DMU_{n+1} 可记为 $DMU_{n+1} = (x_{1,n+1}, x_{2,n+1}, \dots, x_{m,n+1}, y_{1,n+1}, y_{2,n+1}, \dots, y_{s,n+1})$ 。

1.2 公共权重向量集及相对效率指数

利用 C²R 模型求解给定的 n 个决策单元 $DMU_k (k=1, 2, \dots, n)$ 的理想决策单元 DMU_{n+1} 的最大效率值的模

收稿日期: 2006-10-30

作者简介: 韩利娜, 女, 重庆市北碚区西南大学数学与统计学院, 硕士研究生, 主要从事 DEA 研究; E-mail: hanlina@swu.edu.cn

张俊容 (通讯作者), 女, 重庆市北碚区西南大学数学与统计学院, 副教授, 主要从事 DEA 研究; E-mail: xiaohong@swu.edu.cn

型如下(记为模型(I))

$$\left. \begin{aligned} & \max \sum_{j=1}^s u_j y_{j,n+1} / \sum_{i=1}^m v_i x_{i,n+1} \\ & \text{st } \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} \leq 1, k=1, 2, \dots, n, n+1 \\ & v_i \geq 0, u_j \geq 0, \forall i, j \end{aligned} \right\} \quad (\text{I})$$

定义 2 若 v^*, u^* 是模型(I)的一个最优解, 其中 $v^* = (v_1^*, v_2^*, \dots, v_m^*)$, $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_s^*)$, 则称 (v^*, u^*) 是决策单元集 $\{DMU_1, DMU_2, \dots, DMU_n\}$ 的一个公共权重向量。

定义 3 将决策单元集 $\{DMU_1, DMU_2, \dots, DMU_n\}$ 的所有公共权重向量组成的集合记为: $R = \{(v^*, u^*) | (v^*, u^*) \text{ 是模型(I)的最优解}\}$, 则称向量集 R 为给定的 n 个决策单元 $DMU_k (k=1, 2, \dots, n)$ 的公共权重向量集。

定义 4 对于决策单元 $DMU_k (k=1, 2, \dots, n)$ 及 $(v^*, u^*) \in R$, 令

$$h_k = \sum_{j=1}^s u_j^* y_{jk} / \sum_{i=1}^m v_i^* x_{ik}$$

则称 h_k 为 DMU_k 的相对效率指数。

文献[5]即是根据 h_k 的值对给定的 n 个决策单元进行排序的。

1.3 问题分析

分析文献[5]中提到的方法可以发现, 由模型(I)得到的 (v^*, u^*) 的值可能不唯一, 因此与 (v^*, u^*) 的值密切相关的决策单元的相对效率指数 h_k 也可能是不唯一的。而文献[5]是基于 h_k 的值来对决策单元进行排序的, 由于 h_k 的值可能不唯一, 因此有可能对决策单元的排序造成一定的影响。也就是说, 不同的 (v^*, u^*) 值可能会对不同的决策单元的排序结果。现举例如下。

	x_1	x_2	y_1	y_2
DMU_1	1	1	2	2
DMU_2	1	2	1	3
DMU_3	2	1	1	4

例 1 设有两种输入、两种输出的决策单元共 3 个, 其输入、输出值如下:

若用 DEA-C²R 模型求解, 则 DMU_1, DMU_2, DMU_3 的最大效率值均为 1。因此对 3 个决策单元的排序为

$$DMU_1 \sim DMU_2 \sim DMU_3$$

现在利用文献[5]的方法对上述 3 个决策单元进行排序。

首先由决策单元 DMU_1, DMU_2, DMU_3 的输入、输出值, 很容易得到它们的理想决策单元(记为 DMU_4)的输入、输出值:

$$x_1=1, x_2=1, y_1=2, y_2=4$$

利用模型(I)求解很容易得到: $(0, 1, \frac{1}{2}, 0), (1, 0, 0,$

$\frac{1}{4}), (0, 1, 0, \frac{1}{4})$ 均为决策单元 DMU_1, DMU_2, DMU_3 的公共权重向量值。

利用文献[5]中求决策单元相对效率指数的排序方法, 可以得到下面的结果。

1) 用公共权重向量值 $(0, 1, \frac{1}{2}, 0)$ 求得的决策单元 DMU_1, DMU_2, DMU_3 的相对效率指数分别为

$$h_1=1, h_2=0.25, h_3=0.5$$

由此得 DMU_1, DMU_2, DMU_3 的排序为

$$DMU_1 > DMU_3 > DMU_2$$

2) 用公共权重向量值 $(1, 0, 0, \frac{1}{4})$ 求得的决策单元 DMU_1, DMU_2, DMU_3 的相对效率指数分别为

$$h_1=0.5, h_2=0.75, h_3=0.5$$

由此得出 DMU_1, DMU_2, DMU_3 的排序为

$$DMU_2 > DMU_1 \sim DMU_3$$

3) 用公共权重向量值 $(0, 1, 0, \frac{1}{4})$ 求得的决策单元 DMU_1, DMU_2, DMU_3 的相对效率指数分别为

$$h_1=0.5, h_2=0.375, h_3=1$$

由此得 DMU_1, DMU_2, DMU_3 的排序为

$$DMU_3 > DMU_1 > DMU_2$$

由例 1 可以看出, 由于选取的公共权重值的不同, 得到的决策单元的相对效率指数也不同, 进而造成的对决策单元的排序也就不同。可见, 用公共权重法来对决策单元进行排序存在不足之处, 还需要探求更为科学合理的方法。

2 新模型的建立

针对上述问题, 本文认为较为公平合理的方法是: 在求得的公共权重向量集 R 中, 对被评价的决策单元 DMU_{k_0} 所选取的 (v^*, u^*) 值, 应使得该决策单元的效率值达到最大, 即在公共权重向量集 R 中求被评价单元的最大相对效率指数(记为 $h_{k_0, \max}$), 很显然这样得到的 $h_{k_0, \max}$ 的值是唯一的, 然后再依据 $h_{k_0, \max}$ 的值来对决策单元进行排序, 得到的排序结果就是唯一的。

根据上面的思路, 本文提出对决策单元进行排序的方法如下。

1) 由给定的 n 个决策单元 $DMU_k (k=1, 2, \dots, n)$ 的输入、输出值求出这 n 个决策单元的理想决策单元 DMU_{n+1} 的输入、输出值。

2) 利用模型(I)求解这 n 个决策单元的公共权重向量集 R 。

3) 记 $DMU_{k_0} (k_0=1, 2, \dots, n)$ 为被评价的决策单元,

用下面的模型(记为模型(II))求解 DMU_{k_0} 的最大相对效率指数 $h_{k_0, \max}$ 。

$$h_{k_0, \max} = \max \left\{ \sum_{j=1}^s u_j y_{j, k_0} / \sum_{i=1}^m v_i x_{i, k_0}, k=1, 2, \dots, n \right\} \quad (II)$$

$$\text{st}(v, u) \in R$$

式中 R 为由模型(I)求得的 n 个决策单元的公共权重向量集。

4) 依据 $h_{k_0, \max}$ ($k_0=1, 2, \dots, n$) 的值对给定的 n 个决策单元进行排序。

上述方法需要借助两个模型, 为给出新方法的一个综合模型, 先对理想决策单元进行分析, 由于理想决策单元 DMU_{n+1} 相对于其他决策单元来说是 DEA 有效的^[5], 因此用模型(I)求解理想决策单元的最大效率值肯定为 1, 这就使得满足模型(I)的 (v, u) 的值与同时满足下面两个式子的 (v, u) 的值是相同的。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} &\leq 1, \quad k=1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} & \\ v_i &\geq 0, u_j \geq 0, \forall i, j \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^s u_j y_{j, n+1} &= 1, \quad v_i \geq 0, u_j \geq 0, \forall i, j \\ \sum_{i=1}^m v_i x_{i, n+1} & \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

因此模型(I)与模型(II)可以合并为如下的模型, 记为模型(III)。

$$h_{k_0, \max} = \max \left\{ \sum_{j=1}^s u_j y_{j, k_0} / \sum_{i=1}^m v_i x_{i, k_0} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} \text{st} \sum_{j=1}^s u_j y_{jk} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} &\leq 1, \quad k=1, 2, \dots, n \\ \sum_{j=1}^s u_j y_{j, n+1} / \sum_{i=1}^m v_i x_{i, n+1} &= 1 \\ v_i &\geq 0, u_j \geq 0, \forall i, j \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

这样, 上面介绍的方法就可简化为如下步骤。

1) 由给定的 n 个决策单元 DMU_k ($k=1, 2, \dots, n$) 的输入、输出值求出这 n 个决策单元的理想决策单元 DMU_{n+1} 的输入、输出值。

2) 记 DMU_{k_0} ($k_0=1, 2, \dots, n$) 为被评价的决策单元, 利用模型(III)求解被评价决策单元 DMU_{k_0} 的最大相对效率指数 $h_{k_0, \max}$ 。

3) 依据 $h_{k_0, \max}$ ($k_0=1, 2, \dots, n$) 的值对给定的 n 个决策单元进行排序。

由上面的叙述可知, 利用模型(III)求得的决策单元

的最大相对效率指数是唯一的, 因此对决策单元进行排序, 得到的结果也是唯一的。而且让决策单元在公共权重向量集中选取对自身最有利的权重向量值, 在一定程度上保证了对各决策单元的公平性。

现利用本文提出的方法对例 1 中的决策单元进行排序。

利用上面得到的数据, 用模型(III)求 3 个决策单元的最大相对效率指数 $h_{1, \max}, h_{2, \max}, h_{3, \max}$ 的值分别为

$$h_{1, \max}=1, h_{2, \max}=0.75, h_{3, \max}=1$$

因此, 对给出的 3 个决策单元的排序结果为

$$DMU_1 \sim DMU_3 > DMU_2$$

可见, 用本文提出的方法得到的决策单元的最大相对效率指数是唯一的, 进而得到的决策单元的排序也是唯一的。

3 结论

本文提出的方法在求解被评价决策单元的相对效率指数时, 给了各决策单元相对较充分的自由权利, 即在公共权重向量集中选取对自身最有利的权重向量, 使得各自的相对效率指数达到最大, 因此在一定程度上保证了对各决策单元的公平性。而且这样得到的各决策单元的最大相对效率指数是唯一的, 因此, 以其为基础进行的排序也是唯一的。本文提出的方法还未能实现对所有的决策单元进行完全排序, 今后可针对此问题做进一步的研究。

参考文献 (References)

- [1] ZILLA S, FRIEDMAN L. DEA and the discriminant analysis of rations for ranking units[J]. Eur J Oper Res, 1998, 111: 470-478.
- [2] 谢昌芸, 樊相宇. 我国邮电工业企业相对效益的 DEA 分析[J]. 陕西师范大学学报, 1999(5): 98-102.
XIE Changyun, FAN Xiangyu. Analysis of DEA efficiency on China posts and telecommunications industry & enterprise [J]. J Shaanxi Nor Univ (Natural Science Ed), 1999(5): 98-102.
- [3] 樊相宇, 谢昌芸. 邮电高校办学效益的 DEA 分析 [J]. 西安邮电学院学报, 1999(6): 38-41.
FAN Xiangyu, XIE Changyun. DEA analysis of the benefit for P&T institutions [J]. J Xi'an Ins Post Telecom, 1999(6): 38-41.
- [4] TOSHIYUKI S, KENJI O, YOUICHI K. A benchmark approach for baseball evaluation [J]. Eur J Oper Res, 1999, 115: 429-448.
- [5] 李 果, 沈晓勇, 王应明. 对决策单元进行排序的一种方法[J]. 预测, 2000(4): 51-53.
LI Guo, SHEN Xiaoyong, WANG Yingming. A new method for ranking DMUs[J]. Forecasting, 2000(4): 51-53.

(责任编辑 齐志红)